УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

Наближене розв'язування деяких граничних задач теорії потенціалу методом інтегральних рівнянь без використання кубатурних формул

Позначимо через M, N, P і т.д. точки в $\mathbf{R}^3$, а $\mathrm{R}(M,N):=\mathrm{dist}(M,N)$. Припустимо, що в $\mathbf{R}^3$ міститься сукупність гладких розімкнених поверхонь $S:=\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$, які не мають спільних точок та точок самоперетину. Нехай $\overline{S}:=S_i\bigcup\partial S_i$, де ∂S_i – кусково гладкий контур скінченної довжини, який обмежує S_i, а $\overline{S}:=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\overline{S}_i$. Поки що вважатимемо S однією розімкненою поверхнею. Доповнимо довільним чином S поверхнею S_0 так, щоб їхнім об'єднанням була деяка замкнена поверхня $\Sigma:=S\bigcup S_0$. Область, обмежену Σ, позначимо Ω_+. Тоді $\Omega_-:=\mathbf{R}^3\setminus\overline{\Omega}_+$, а $\Omega:=\mathbf{R}^3\setminus\overline{S}$. Введемо такі функціональні простори:

$$\mathrm{L}_2(\Omega_\pm):=\left\{u(x)\;\middle|\;\int\limits_{\Omega_\pm}|u(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

$$\mathrm{H}^1(\Omega_\pm):=\left\{u(x)\;\middle|\;u(x),|\nabla u(x)|\in\mathrm{L}_2(\Omega_\pm)\right\},$$

$$\mathrm{H}^1(\Omega_\pm,\Delta):=\left\{u(x)\;\middle|\;u(x)\in\mathrm{H}^1(\Omega_\pm),\,\Delta u(x)\in\mathrm{L}_2(\Omega_\pm)\right\},$$

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega_\pm)}:=\|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega_\pm)}+\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega_\pm)},$$

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega_\pm,\Delta)}:=\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega_\pm)}+\|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega_\pm)},$$

$$\nabla:=\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k},\quad \Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Розглянемо оператор сліду [1] $\gamma_0^\pm:\mathrm{H}^1(\Omega_\pm)\to\mathrm{H}^{1/2}(\Sigma)$. Нехай також

$$\mathrm{H}^1(\Omega) := \left\{ u(x) \,\middle|\, u(x), |\nabla u(x)| \in \mathrm{L}_2(\Omega) \right\},$$

$$\mathrm{H}^1(\Omega,\Delta) := \left\{ u(x) \,\middle|\, u(x) \in \mathrm{H}^1(\Omega), \Delta u(x) \in \mathrm{L}_2(\Omega) \right\}.$$

Норми в просторах $\mathrm{H}^1(\Omega)$ і $\mathrm{H}^1(\Omega,\Delta)$ задають аналогічно. Визначимо простір $\mathrm{H}^{1/2}(S)$ як звуження функцій із $\mathrm{H}^{1/2}(\Sigma)$ на S. Якщо $\mathrm{C}_0^\infty(S)$ – лінійний простір нескінченно диференційованих на Σ функцій із компактним носієм у S, тобто $\mathrm{supp}(u) \subset S$, то $\mathrm{H}_{00}^{1/2}(S)$ – замикання $\mathrm{C}_0^\infty(S)$ по нормі $\mathrm{H}^{1/2}(\Sigma)$. Нехай $\omega(x)$ – достатньо гладка функція, що обертається в нуль при наближенні до ∂S як $\mathrm{R}(x,\partial S)$. Тоді $\mathrm{H}_{00}^{1/2}(S)$ можна трактувати наступним чином:

$$\mathrm{H}_{00}^{1/2}(S) := \left\{ u(x) \,\middle|\, u(x) \in \mathrm{H}^{1/2}(S), \omega^{-1/2} u \in \mathrm{L}_2(S) \right\}.$$

Введемо також деякі простори функціоналів:

$$\left(\mathrm{H}^{1/2}(S)\right)' := \left\{ f \,\middle|\, f \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Sigma), \mathrm{supp}(f) \in S \right\},$$

$$\mathrm{H}^{-1/2}(\Sigma) := \left(\mathrm{H}^{1/2}(\Sigma)\right)', \quad \left(\mathrm{H}^{1/2}(S)\right)' \subset \left(\mathrm{H}_{00}^{1/2}(S)\right)'.$$

Розглянемо таку задачу: потрібно знайти функцію $u(P)$, визначену в області Ω з класу $\mathrm{H}^1(\Omega,\Delta)$, яка задовольняє умови:

$$\Delta u(P) = 0, \quad P \in \Omega, \tag{1}$$

$$\gamma_0^\pm u = g_\pm(P), \quad P \in S, \tag{2}$$

$$\lim_{|P|\to\infty} u(P) = 0, \quad P \in \Omega, \tag{3}$$

де $g_\pm(P) \in \mathrm{H}^{1/2}(S)$. Зауважимо, що $g_\pm(P)$ – значення шуканої функції на граничній поверхні відповідно з додатньої та від'ємної сторони.

Якщо розв'язок задачі (1)–(3) існує, то його необхідно шукати у вигляді:

$$u(P) := \int_S K(P,M)\tau(M)\mathrm{d}S_M - u_0(P), \quad P \in \Omega, \tag{4}$$

де $u_0(P) := \int_S \dfrac{\partial K(P,M)}{\partial n_M}[g(M)]\mathrm{d}S_M$, $[g(M)] := g_-(M) - g_+(M) \in \mathrm{H}_{00}^{1/2}(S)$, $M \in S$, $K(P,M) := 1/\left(4\pi \mathrm{R}(P,M)\right)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в $\mathbf{R}^3$, а $\tau(M)$ – розв'язок інтегрального рівняння першого роду

$$K\tau := \int_S K(P,M)\tau(M)\mathrm{d}S_M = g_0(P), \quad P \in S, \tag{5}$$

причому $g_0(P) := \frac{1}{2}\big(g_-(M) + g_+(M)\big) + u_0(P)$, $P \in S$. І навпаки, функція $u(P)$, яка задається виразом (4), де $\tau(M) \in \left(\mathrm{H}^{1/2}(S)\right)'$ задовольняє рівняння (5), є розв'язком задачі (1)–(3). В роботі [2] показано, що оператор $K: \left(\mathrm{H}^{1/2}(S)\right)' \to \mathrm{H}^{1/2}(S)$ – ізоморфізм.

Таким чином, за допомогою інтегрального представлення (4) початкова задача у диференціальній постановці зведена до розв'язування інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю в ядрі, яке має єдиний розв'язок для будь-якої функції $g_0(P)$ з $\mathrm{H}^{1/2}(S)$.

Інтегральне рівняння (5) у загальному випадку є двовимірним. Дійсно, нехай у прямокутній системі координат $0XYZ$ поверхня S задана параметричними рівняннями $x = x(\alpha,\beta)$, $y = y(\alpha,\beta)$, $z = z(\alpha,\beta)$ $(-1 \le \alpha,\beta \le 1)$. В (5) перейдемо від поверхневого інтегралу до подвійного. Для цього обчислимо якобіан переходу $\mathrm{J}(\alpha,\beta)$ за формулою $\mathrm{J}(\alpha,\beta) := \left[\mathrm{E}(\alpha,\beta)\,\mathrm{G}(\alpha,\beta) - \mathrm{F}^2(\alpha,\beta)\right]^{1/2}$, де

$$\mathrm{E}(\alpha,\beta) := \left(x'_\alpha\right)^2 + \left(y'_\alpha\right)^2 + \left(z'_\alpha\right)^2, \quad \mathrm{G}(\alpha,\beta) := \left(x'_\beta\right)^2 + \left(y'_\beta\right)^2 + \left(z'_\beta\right)^2,$$

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta) := x'_\alpha x'_\beta + y'_\alpha y'_\beta + z'_\alpha z'_\beta$$

– коефіцієнти першої квадратичної форми. Тоді (5) набуває вигляду:

$$\iint_D \widehat{K}(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta)\,\mathrm{J}(\alpha,\beta)\,\widehat{\tau}(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \widehat{g}(\alpha_0,\beta_0), \tag{6}$$

де $-1 \le \alpha_0,\beta_0 \le 1$, $D := [-1,1] \times [-1,1]$.

Припустимо, що в $\mathbf{R}^3$ міститься сукупність чотирикутних пластин $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, які не мають спільних точок і визначаються своїми вершинами. Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля в області Ω, якщо на безмежно тонких ("без товщини") металевих пластинах S_i задане граничне значення потенціалу. При такому розумінні поверхонь S_i гранична функція не залежить від сторони пластини: $g(P):=g_-(M)=g_+(M)$, $P\in S$. Отже, умова (2) набуває вигляду:

$$\gamma_0 u = g_i(P), \quad P\in S_i.$$

Нехай вершини пластини мають координати: (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,4}$. Відповідні параметричні рівняння можна подати так:

$$\begin{cases} x_i(\alpha,\beta):=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij}\varphi_j(\alpha,\beta), \; \varphi_j(\alpha,\beta):=\left(1+(-1)^p\alpha\right)\left(1+(-1)^q\beta\right), \\ y_i(\alpha,\beta):=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{4} y_{ij}\varphi_j(\alpha,\beta), \quad p:=\left[\dfrac{j}{2}\right]+1, \\ z_i(\alpha,\beta):=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{4} z_{ij}\varphi_j(\alpha,\beta), \quad q:=\left[\dfrac{j-1}{2}\right]+1. \end{cases} \tag{7}$$

Тепер встановимо вигляд рівняння (5). Для цього перейдемо до інтегрування по системі поверхонь S_i та знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми. Зауважимо, що одержане рівняння значно спроститься, якщо одна із сторін прямокутної пластини S_i $(i=\overline{1,m})$ паралельна до будь–якої із осей координат. Враховуючи все сказане вище, одержимо таке інтегральне рівняння:

$$\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\mathrm{E}_j\mathrm{G}_j}\iint_D \frac{\widehat{\tau}_j(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\sqrt{\left(\alpha\sqrt{\mathrm{E}_j}-\dfrac{a_{ij0}}{\sqrt{\mathrm{E}_j}}\right)^2+\left(\beta\sqrt{\mathrm{G}_j}-\dfrac{b_{ij0}}{\sqrt{\mathrm{G}_j}}\right)^2+\widehat{c}_{ij0}}}=\widehat{g}_{i0}. \tag{8}$$

Тут $\widehat{g}_{i0}:=\widehat{g}(\alpha_0,\beta_0)$, E_j, G_j, a_{ij0}, b_{ij0}, $\widehat{c}_{ij0}\ge 0$ – деякі константи, які визначаються з огляду на параметричні рівняння (7), а також залежать від положення точки P з координатами $x_i(\alpha_0,\beta_0)$, $y_i(\alpha_0,\beta_0)$, $z_i(\alpha_0,\beta_0)$ $(-1\le\alpha_0,\beta_0\le 1)$ на поверхні S_i.

В процесі розв'язування (8) методом колокації із апроксимацією шуканої густини за допомогою кусково поліноміальних базисних функції виникає проблема обчислення таких невласних інтегралів:

$$\mathrm{I}(m,n,a,b,x_0,y_0):=\iint_D \frac{x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(ax\text{-}x_0)^2+(by\text{-}y_0)^2+d^2}}, \; m,n=0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

$a,b>0$, $d \ge 0$. Зауважимо, що питання існування інтегралів (9) вимагає додаткового дослідження, але ми на цьому в даній роботі не зупиняємось. З метою уніфікації проблеми виконаємо заміну змінних, яка відповідає переносу центру системи координат у точку (x_0, y_0), тоді

$$\mathrm{I}(m,n,a,b,x_0,y_0) := a^{-(m+1)} b^{-(n+1)} \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} \frac{(u+x_0)^m (v+y_0)^n \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2+v^2+d^2}} =$$

$$= a^{-(m+1)} b^{-(n+1)} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_m^i \mathrm{C}_n^j x_0^{m-i} y_0^{n-j} \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} \frac{u^i v^j \mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2+v^2+d^2}},$$

де $u := ax - x_0$, $v := ay - y_0$, $a_1 := -a - x_0$, $b_1 := -b - y_0$, $a_2 := a - x_0$, $b_2 := b - y_0$ $|m|+|n|>0$, якобіан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{ab}$, а C_k^l – коефіцієнти біному Ньютона. Отже, для обчислення (9) потрібно визначити

$$\mathrm{J}(m,n) := \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} \frac{u^m v^n \mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2+v^2+d^2}} \tag{10}$$

у припущенні, що $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Для (10) одержано формули при таких значеннях параметрів m і n:

$$(m=1 \wedge n=0) \vee (m=0 \wedge n=1), \quad m=1 \wedge n=1,$$

$$(m=2 \wedge n=0) \vee (m=0 \wedge n=2), \quad (m=2 \wedge n=1) \vee (m=1 \wedge n=2),$$

$$(m=3 \wedge n=0) \vee (m=0 \wedge n=3), \quad (m=3 \wedge n=1) \vee (m=1 \wedge n=3).$$

Наведемо для прикладу деякі з цих формул:

$$\mathrm{J}(2,0) = \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} a_i b_j \sqrt{a_i^2 + b_j^2 + d^2} +$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b & k \\ b & a & l \end{smallmatrix}\right)} k \sum_{i=1}^{2} (-1)^i a_i \left(a_i^2 + d^2\right) \ln\left|\frac{b_2 + \sqrt{a_i^2 + b_2^2 + d^2}}{b_1 + \sqrt{a_i^2 + b_1^2 + d^2}}\right| -$$

$$-\frac{d^2}{3} a_{21}^- b_{21}^- \, \mathrm{I}\left(0,0,a_{21}^-, b_{21}^-, a_{21}^+, b_{21}^+\right),$$

де $k := 2$, $l := -1$, $a_{21}^- := (a_2 - a_1)/2$, $a_{21}^+ := -(a_2 + a_1)/2$, $b_{21}^- := (b_2 - b_1)/2$, $b_{21}^+ := -(b_2 + b_1)/2$,

$$\mathrm{J}(3,1) = \frac{1}{15}\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} \left(3a_i^2 - 2b_j^2 - 2d^2\right)\left(a_i^2 + b_j^2 + d^2\right)^{3/2}.$$

Зауважимо, що, в свою чергу, інтеграл $\mathrm{I}\left(0,0,a_{21}^{-},b_{21}^{-},a_{21}^{+},b_{21}^{+}\right)$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{I}\left(0,0,a_{21}^{-},b_{21}^{-},a_{21}^{+},b_{21}^{+}\right)=$$

$$=\frac{1}{ab}\left\{\sum_{\begin{pmatrix} a\,b\,x_0\,y_0 \\ b\,a\,y_0\,x_0\end{pmatrix}}\sum_{i=1}^{2}a_i\left(x_0\right)\ln\left|\frac{b_2\left(y_0\right)+\sqrt{a_i^2\left(x_0\right)+b_2^2\left(y_0\right)+d^2}}{-b_1\left(y_0\right)+\sqrt{a_i^2\left(x_0\right)+b_1^2\left(y_0\right)+d^2}}\right|+\right.$$

$$+2d\sum_{i,j=1}^{2}\left(-1\right)^{i+j}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{d}\left[\left(-1\right)^{j}b_j\left(y_0\right)-\left(-1\right)^{i}a_i\left(x_0\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{a_i^2\left(x_0\right)+b_j^2\left(y_0\right)+d^2}\right]\right)\right\},$$

де $a_i\left(x_0\right):=a+\left(-1\right)^{i}x_0$, $b_j\left(y_0\right):=b-\left(-1\right)^{j}y_0$.

Розглянемо питання наближеного розв'язування інтегрального рівняння (8). Поділимо проміжки зміни параметрів α та β (відносно пластини S_i) відповідно на $N_{\alpha i}$ та $N_{\beta i}$ рівних частин точками:

$$\begin{cases}\alpha_k:=H_{\alpha i}k-1, & H_{\alpha i}:=2/N_{\alpha i}, \quad k=\overline{0,N_{\alpha i}},\\ \beta_l:=H_{\beta i}l-1, & H_{\beta i}:=2/N_{\beta i}, \quad l=\overline{0,N_{\beta i}}.\end{cases}$$

Тобто область інтегрування D ми розбили на елементи $D_{kl}:=\left[\alpha_k,\alpha_{k+1}\right]\times\left[\beta_l,\beta_{l+1}\right]$, $k=\overline{1,N_{\alpha i}}$, $l=\overline{1,N_{\beta i}}$. Виберемо центр кожного елемента D_{kl} за початок локальної системи координат $0\xi\eta$ та виконаємо заміну змінних у відповідних інтегралах рівняння (8)

$$\begin{cases}\alpha(\xi,\eta):=\dfrac{1}{2}H_{\alpha i}(2k-1+\xi)-1,\\ \beta(\xi,\eta):=\dfrac{1}{2}H_{\beta i}(2l-1+\eta)-1,\end{cases}\quad -1\le\xi,\eta\le1.$$

При цьому якобіан $\mathrm{J}(\xi,\eta)=\dfrac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\xi,\eta)}=\dfrac{1}{4}H_{\alpha i}H_{\beta i}$. Для апроксимації шуканої густини $\widehat{\tau}_i(\alpha,\beta)$ в D використаємо її значення у вузлових точках та побудуємо в межах D_{kl} відповідні кусково поліноміальні базисні функції:

$$\widehat{\tau}_i\left(\alpha(\xi,\eta),\beta(\xi,\eta)\right):=\sum_{k=1}^{N_{\alpha i}}\sum_{l=1}^{N_{\beta i}}\sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n}\sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n}\widehat{\tau}_{ief}\psi_{nef}(\xi,\eta),$$

$$\left(\alpha(\xi,\eta),\beta(\xi,\eta)\right)\in D_{kl},$$

де n – порядок використовуваної апроксимації, $\sigma_n(p)$, $p\in\{k,l\}$, – функція зв'язку між нумерацією прямокутних елементів та вузлових точок, а $\widehat{\tau}_{ief}$ – значення шуканої густини у вузлових точках. Так

$$\sigma_n(p):=n(p-1)+p\,\mathrm{s}_n,\quad \mathrm{s}_n:=\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad n=0,\\ 0, & \text{якщо}\quad n=1,2,3,\end{cases}$$

$$\widehat{\tau}_{ief}:=\widehat{\tau}_i\left(\alpha_k-\frac{\sigma_n(k)+n-e+\mathrm{s}_n}{n+2\,\mathrm{s}_n}H_{\alpha i},\beta_l-\frac{\sigma_n(l)+n-f+\mathrm{s}_n}{n+2\,\mathrm{s}_n}H_{\beta i}\right),$$

причому розглядаються лише ті індекси e і f, для яких виконується умова

$$\left(\bigwedge_{q=1}^{n-1}(e\neq nk-q)\right)\vee\left(\bigwedge_{q=1}^{n-1}(f\neq nl-q)\right)=\mathrm{true},\quad n\geq 2.$$

Слід зауважити, що, зокрема, при використанні біквадратичної апроксимації шуканого розв'язку на елементі D_{kl}, функції ψ_{nef} набувають такого конкретного вигляду

$$\psi_{2ef}(\xi,\eta):=\frac{1}{8}\left(1+(-1)^{e+f}\right)\left(1+(-1)^{k+e/2}\xi\right)\times$$
$$\times\left(1+(-1)^{e+f/2}\eta\right)\left((-1)^{k+e/2}\xi+(-1)^{e+f/2}\eta-1\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\left(1-(-1)^{e+f}\right)\left(1+\xi_0\xi+\eta_0\eta\right)\left(1-\xi_0^2\xi^2-\eta_0^2\eta^2\right),$$

$$\xi_0:=\frac{1}{2}\left((-1)^{e_0}-(-1)^{f_0}\right),\quad \eta_0:=\frac{1}{2}\left((-1)^{e_0}+(-1)^{f_0}\right),$$

$$e_0:=\left[\frac{e}{2}\right]+\left[\frac{f}{2}\right]+k+e+1,\quad f_0:=\left[\frac{e}{2}\right]+\left[\frac{f+1}{2}\right]+k+e+1,$$

де індекси e і f змінюються за правилом $e=\overline{2k-2,2k}$, $f=\overline{2l-2,2l}$ при умові, що $(e\neq 2k-1)\vee(f\neq 2l-1)=\mathrm{true}$.

Враховуючи сказане, одержимо дискретний аналог інтегрального рівняння

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N_{\alpha j}}\sum_{l=1}^{N_{\beta j}}\sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n}\sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n}\widehat{\tau}_{jef}J_{ijkl}^{(nef)}(\alpha_0,\beta_0)=\widehat{g}_i(\alpha_0,\beta_0),\qquad(11)$$

$$-1 \le \alpha_0, \beta_0 \le 1, \quad i = \overline{1,m}.$$

Тут

$$J_{ijkl}^{(nef)}(\alpha_0, \beta_0) := \frac{1}{4} H_{\alpha j} H_{\beta j} \sqrt{E_j G_j} \iint_D \frac{\psi_{nef}(\xi, \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta}{\overline{\mathrm{R}}_{ijkl}(\alpha_0, \beta_0, \xi, \eta)},$$

де

$$\overline{\mathrm{R}}_{ijkl}(\alpha_0, \beta_0, \xi, \eta) := \left(\left(\left(\frac{1}{2} H_{\alpha j} \sqrt{E_j} \xi + \left(\frac{1}{2}(2k-1) H_{\alpha j} - 1 \right) \sqrt{E_j} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{a_{ij}(\alpha_0, \beta_0)}{\sqrt{E_j}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} H_{\beta j} \sqrt{G_j} \eta + \left(\frac{1}{2}(2l-1) H_{\beta j} - 1 \right) \sqrt{G_j} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{b_{ij}(\alpha_0, \beta_0)}{\sqrt{G_j}} \right)^2 + \widehat{c}_{ij}(\alpha_0, \beta_0) \right)^{1/2}.$$

Тепер виберемо контрольні значення (α_0, β_0) у вузлових точках:

$$\begin{cases} \alpha_s := h_{\xi i} s - 1 - \frac{1}{2} h_{\xi i} \mathrm{s}_n, \\ \beta_t := h_{\eta i} t - 1 - \frac{1}{2} h_{\eta i} \mathrm{s}_n, \end{cases} \quad \text{де} \quad \begin{cases} h_{\xi i} := 2 / \left(n N_{\alpha i} + N_{\alpha i} \mathrm{s}_n \right), \\ h_{\eta i} := 2 / \left(n N_{\beta i} + N_{\beta i} \mathrm{s}_n \right), \end{cases}$$

причому $s = \overline{\mathrm{s}_n, N_{\alpha i}(n + \mathrm{s}_n)}$, $t = \overline{\mathrm{s}_n, N_{\beta i}(n + \mathrm{s}_n)}$. Зауважимо, що при $n \ge 2$ індекси s і t, для яких виконується умова

$$\left(\left\{ \frac{s}{n + \mathrm{s}_n} \right\} \ne 0 \right) \wedge \left(\left\{ \frac{t}{n + \mathrm{s}_n} \right\} \ne 0 \right) = \mathrm{true},$$

повинні бути пропущені. Тут фігурні дужки означають дробову частину внутрішнього виразу. Вважаючи, що $\widehat{g}_{ist} := \widehat{g}_i(\alpha_s, \beta_t)$, $J_{ijklst}^{(nef)} := J_{ijkl}^{(nef)}(\alpha_s, \beta_t)$, $i, j = \overline{1,m}$, із (11) отримаємо систему рівнянь для визначення функції $\widehat{\tau}_i(\alpha, \beta)$ у точках введеної сітки

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_{\alpha j}} \sum_{l=1}^{N_{\beta j}} \sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n} \sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n} \widehat{\tau}_{jef} J_{ijklst}^{(nef)} = \widehat{g}_{ist}. \tag{12}$$

Запишемо останню у вигляді:

$$\sum_{\nu=1}^{N_A} a_{\mu\nu} \widehat{\tau}_\nu = \widehat{g}_\mu, \quad \mu = \overline{1, N_A}, \tag{13}$$

де N_A – розмірність матриці системи, яка визначається розбиттям поверхонь S_i та порядком апроксимації n:

$$N_A := \sum_{i=1}^{m} \left| (1-s_n)(nN_{\alpha i}+1)(nN_{\beta i}+1) - (n-1)^2 N_{\alpha i} N_{\beta i} \right|.$$

Зв'язок між індексами систем (12) і (13) встановлюється в залежності від вибору конкретного способу наближення $\hat{\tau}_i(\alpha,\beta)$. Зокрема, при $n=2$, матимемо

$$\nu := \sum_{q=1}^{j-1} \left(3N_{\alpha q}N_{\beta q} + 2N_{\alpha q} + 2N_{\beta q} + 1\right) + \left(2N_{\alpha j}+1\right)\left[\frac{f+1}{2}\right] +$$

$$+\left(N_{\alpha j}+1\right)\left[\frac{f}{2}\right] + \left(\left[\frac{f}{2}\right] - \left[\frac{f+1}{2}\right] + 1\right)e + \left(\left[\frac{f+1}{2}\right] - \left[\frac{f}{2}\right]\right)\left[\frac{e}{2}\right] + 1.$$

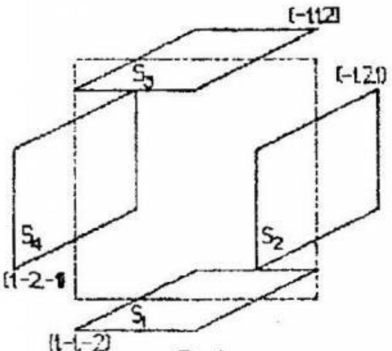

Рис.1.

Замінивши j, e та f відповідно на i, s та t отримаємо подібне співвідношення для μ. Зауважимо, що на індекси e, f та s, t накладаються умови, аналогічні до розглянутих раніше.

Як приклад застосування описаної методики розглядалася задача розрахунку потенціалу електростатичного поля квадрупольної лінзи (див. рис. 1). Однією із особливостей такої електронно оптичної системи (ЕОС) є значний перепад напруги між різними її електродами. Зокрема, граничні значення потенціалу становили: $g_1(P) \equiv -15000$, $g_2(P) \equiv 500$, $g_3(P) \equiv 5000$, $g_4(P) \equiv 500$. Дослідження проводилися у 6561 рівномірно розподілених внутрішніх точках поперечного перерізу ЕОС. При цьому кожна пластина S_i розбивалася на 100 елементів, а невідома густина розподілу зарядів наближалася за допомогою біквадратичних базисних функцій. Результати виконаних обчислень представлені на рис. 2 та 3 у вигляді ліній рівного потенціалу

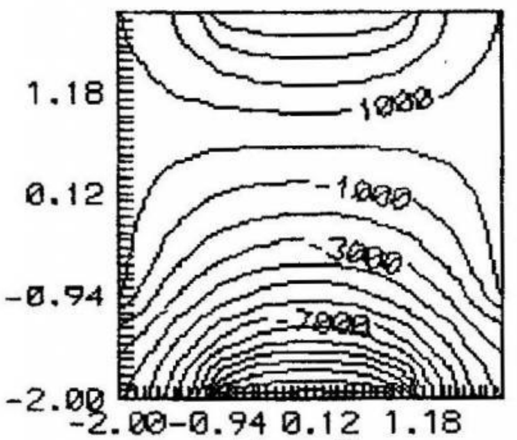

Рис.2.

у вказаній площині. В окремих точках простору розв'язок поставленої задачі характеризується наступними значеннями:

$u(0;-1.5;-1.5)$	$=-4838.25$	$u(0;-1;2)$	$=4177.20$
$u(0;-1;-1)$	$=-4590.55$	$u(0;-0.9;2)$	$=5001.30$
$u(0;-0.5;-0.5)$	$=-3308.59$	$u(0;-2;-0.7)$	$=500.11$
$u(0;0;0)$	$=-1751.23$	$u(0;-2;-0.9)$	$=499.94$
$u(0;0.5;0.5)$	$=-256.57$	$u(0;-2;-1)$	$=-296.67$
$u(0;1;1)$	$=919.64$	$u(0;-1;-2)$	$=-12780.58$
$u(0;1.5;1.5)$	$=1350.41$	$u(0;-0.9;-2)$	$=-15003.16$

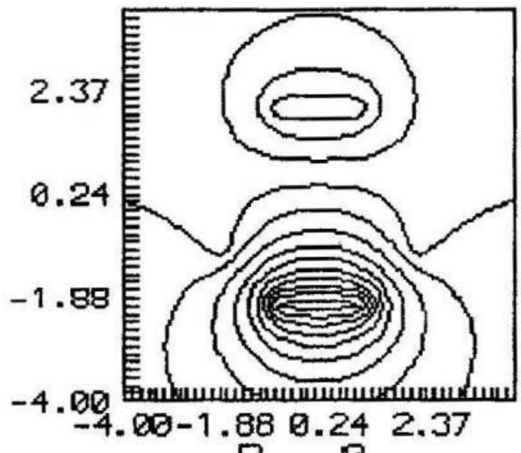

Рис.3

Тут права частина таблиці містить тестові результати, отримані у деяких проміжних точках та на ребрі заданих пластин.

На завершення відзначимо, що застосування кубатурних формул при розв'язуванні інтегральних рівнянь методом колокації призводить до внесення додаткової похибки у загальний наближений розв'язок задачі та до суттєвого сповільнення роботи відповідної програми, навіть на сучасних ЕОМ. Тому описана методика є актуальною і особливо ефективною у випадку складних просторових задач.

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложение.– М.: Мир, 1971.– 371с. 2. Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface. //Математичні студії. 1997. Т.8. № 2. С.79–96.

Стаття надійшла до редколегії 1.09.97