УДК 536.12

В.С.Попович, Г.Ю.Гарматій, К.С.Іванків

Нестаціонарна задача теплопровідності термочутливого циліндра з тонким покриттям

У працях [1,4,8] висвітлено сучасний стан досліджень температурних полів і викликаних ними напружень в термочутливих тілах, тобто тілах, теплофізичні характеристики яких змінюються із зміною температури. При розгляді таких задач значна складність полягає у розв'язанні відповідної нелінійної крайової задачі теплопровідності. Аналіз літератури показує , що у більшій мірі розроблені методи розв'язання таких задач для однорідних термочутливих тіл і вони майже відсутні для тіл кусково-однорідної структури. В роботах [9,10] наведені методики розв'язання стаціонарних задач теплопровідності кусково-однорідних тіл, які використані до розв'язування відповідних задач для порожнистого циліндра скінченої довжини та багатошарової труби. У даній праці пропонується підхід до розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності для кусково-однорідного тіла при наявності конвективного теплообміну на його поверхні, який проілюструємо на прикладі циліндричного тіла з покриттям.

Розглянемо безмежний циліндр радіуса r_1 з тонким покриттям товщиною $r_2 - r_1$. Вважаємо, що теплофізичні характеристики матеріалу циліндра і покриття є функціями температури. У початковий момент часу $\tau = 0$ така система має нульову температуру і поміщається в середовище зі сталою температурою t_c. Між покриттям і середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона, а між циліндром і покриттям існує ідеальний тепловий контакт. Коефіцієнти теплопровідності $\lambda_t^{(i)}(t)$ і об'ємної теплоємності $c_v^{(i)}(t)$ циліндра і покриття представимо у вигляді

$$\chi(t) = \chi_0 \chi^*(\mathrm{T}) \tag{1}$$

де множники з нуликом є сталими і мають відповідні розмірності, а їх співмножники – функції безрозмірної температури $T = t / t_0$, t_0 – довільно вибрана опорна температура, індексом "1" позначаються характеристики циліндра, а "2" – покриття.

Якщо покриття вважати тонкою плоскою стінкою, то знаходження розподілу температури в такому кусково-однорідному тілі у довільний момент часу зводиться до розв'язання нелінійної задачі теплопровідності

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda_{t0}^{(1)}\lambda_t^{*(1)}(\mathrm{T}_1)\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial r}\right]=c_{v0}^{(1)}c_v^{*(1)}(\mathrm{T}_1)\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial \tau}\qquad (0\le r\le r_1) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_{t0}^{(2)}\lambda_t^{*(2)}(\mathrm{T}_2)\frac{\partial \mathrm{T}_2}{\partial r}\right]=c_{v0}^{*(2)}c_v^{*(2)}(\mathrm{T}_2)\frac{\partial \mathrm{T}_2}{\partial \tau}\qquad (\mathrm{r}_1\le r\le r_2), \tag{3}$$

$$\lambda_{t0}^{(1)}\lambda_t^{*(1)}(\mathrm{T}_1)\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial r}=\lambda_{t0}^{(2)}\lambda_t^{*(2)}(\mathrm{T}_2)\frac{\partial \mathrm{T}_2}{\partial r},\qquad \mathrm{T}_1=\mathrm{T}_2\quad \text{п ри}\quad \mathrm{r}=\mathrm{r}_1; \tag{4}$$

$$\lambda_{t0}^{(2)}\lambda_t^{*(2)}(\mathrm{T}_2)\frac{\partial \mathrm{T}_2}{\partial r}+\alpha(\mathrm{T}_2-\mathrm{T}_c)=0,\qquad \text{п ри}\quad \mathrm{r}=\mathrm{r}_2; \tag{5}$$

$$\mathrm{T}_1\big|_{r=0}<\infty, \tag{6}$$

$$\mathrm{T}_1\big|_{\tau=0}=\mathrm{T}_2\big|_{\tau=0}=0, \tag{7}$$

де α – коефіцієнт теплообміну з поверхні $r=r_2$.

Нехай матеріали циліндра і покриття володіють простою нелінійністю, тобто відношення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів циліндра і покриття до їх об'ємних теплоємностей незначно залежать від температури і тому коефіцієнт температуропровідності $a_t=\lambda_t^{(i)}(t)/c_v^{(i)}(t)$ можна вважати сталими величинами, що має місце для багатьох матеріалів [5,7].

Якщо ввести в розгляд змінні Кірхгофа

$$\theta_i=\int_0^{\mathrm{T}_i}\lambda_t^{*(i)}(T)dT \tag{8}$$

і врахувати зроблене допущення про сталість a_i, тоді із задачі (2)-(7) отримуємо наступну задачу спряження на змінні Кірхгофа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\right]=\frac{1}{a_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}\qquad (0\le r\le r_1), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial r^2}=\frac{1}{a_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\qquad (\mathrm{r}_1\le r\le r_2), \tag{10}$$

$$\lambda_{t0}^{(1)}\frac{\partial\theta_1}{\partial r}=\lambda_{t0}^{(2)}\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau},\qquad \mathrm{T}_1(\theta_1)=\mathrm{T}_2(\theta_2)\ \text{п ри}\ \ \mathrm{r}=\mathrm{r}_1, \tag{11}$$

$$\lambda_{t0}^{(2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} + \alpha\left[\mathrm{T}_2(\theta_2) - \mathrm{T}_c\right] = 0 \qquad \text{при} \quad r = r_2, \tag{12}$$

$$\theta_1\big|_{r=0} < \infty, \tag{13}$$

$$\theta_1\big|_{\tau=0} = \theta_2\big|_{\tau=0} = 0. \tag{14}$$

Введення змінних Кірхгофа частково лінеаризувало вихідну задачу і перегрупувало нелінійності, які зосередилися у виразах температур $\mathrm{T}_i(\theta_i)$ на поверхні контакту циліндра і покриття $r = r_1$ та зовнішній поверхні покриття $r = r_2$. Остаточну лінеаризацію задачі здійснимо шляхом заміни [8]

$$\mathrm{T}_i(\theta_i) = (1 + \omega_i)\theta_i, \tag{15}$$

де ω_i – деякі, поки що невідомі, параметри. Введемо безрозмірні координату $\rho = r/r_1$, час $Fo = \dfrac{a_1 \tau}{r_1^2}$ і позначимо

$$\theta_1^* = \frac{1+\omega_1}{1+\omega_2}\theta_1, \quad K_\lambda^* = \frac{1+\omega_2}{1+\omega_1}K_\lambda, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}}, K_a = \frac{a_1}{a_2},$$

$$Bi^* = (1+\omega_2)\frac{r_1}{r_2}Bi, Bi = \frac{\alpha r_2}{\lambda_{t0}^{(2)}}, \quad \rho_2 = r_2/r_1, \quad \mathrm{T}_c^* = \frac{\mathrm{T}_c}{1+\omega_2},$$

тоді задача (9)-(14) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \theta_1^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta_1^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \theta_1^*}{\partial Fo} \qquad (0 \le \rho \le 1), \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \rho^2} = K_a \frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} \qquad (1 \le \rho \le \rho_2), \tag{17}$$

$$\frac{\partial \theta_1^*}{\partial \rho} = K_\lambda^* \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho}, \qquad \theta_1^* = \theta_2 \qquad \text{при} \quad \rho = 1, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} + Bi^*(\theta_2 - T_c^*) = 0 \qquad \text{при} \quad \rho = \rho_2, \tag{19}$$

$$\theta_1^*\big|_{\rho=0} < \infty \tag{20}$$

$$\theta_1^*\big|_{Fo=0} = \theta_2^*\big|_{Fo=0} = 0. \tag{21}$$

Розв'язок задачі (16)-(21), знайдений з допомогою інтегрального перетворення Лапласа за безрозмірним часом Fo [2,3], має вигляд

$$\theta_1^* = T_c^*[1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \rho) e^{-\mu_n^2 Fo}], \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \theta_2^* = T_c^*\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n [J_0(\mu_n)\cos(\mu_n \sqrt{K_a}(\rho - 1)) - \\ - K_\varepsilon J_1(\mu_n)\sin(\mu_n \sqrt{K_a}(\rho - 1))] e^{-\mu_n^2 Fo}, \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$A_n = \frac{2Bi^* K\varepsilon (Bi^* tg\, \mu^*{}_n + \mu^*{}_n)}{\mu_n J_0(\mu_n)\sin \mu^*{}_n \psi(\mu_n)}, \qquad \mu^*{}_n = \mu_n \sqrt{K_a}(\rho_2 - 1),$$

$$K_\varepsilon = \frac{K^*{}_\lambda}{\sqrt{K_a}},$$

$$\begin{aligned} \psi(\mu_n) = (K_\varepsilon^2 \mu^{*2} + Bi^{*2}) ctg \mu_n^* + \frac{2K_\varepsilon \sqrt{K_a}(\rho_2 - 1)}{\sin 2\mu_n^*}(Bi^{*2} + \mu_n^{*2}) + \\ + [2\sqrt{K_a}(\rho_2 - 1)K_\varepsilon Bi^* + \mu_n^{*2} + K_\varepsilon^2 Bi^{*2}] tg \mu_n^* + \frac{K_\varepsilon \mu^{*2}_n}{\mu_n} + \\ + 2(K_\varepsilon^2 - 1)\mu^*{}_n Bi^* - \frac{K_\varepsilon Bi^{*2}}{\mu_n}; \end{aligned}$$

$J_n(\mu)$ – функції Бесселя першого роду[11], а μ_n – корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} J_0(\mu)(Bi^* \cos \mu^* - \sqrt{K_a}\rho_2 \mu \sin \mu^*) - \\ - K_\varepsilon J_1(\mu)(Bi^* \sin \mu^* + \sqrt{K_a}\rho_2 \mu \cos \mu^*) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Знайдені розв'язки θ_i є функціями координати ρ, часу Fo і двох параметрів ω_i. Вони задовольняють рівняння (9), (10), першу умову (11) та умови (13), (14) при довільних значеннях ω_i. Скористаємось вільністю величин ω_i підберемо їх таким чином, щоб із заданою точністю виконувалась друга умова (11) та умова (12). Практично обчислення температури у довільних точці і момент часу проводимо за такою схемою:

1) розв'язавши рівняння (8) для конкретно заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури, знаходимо вирази $T_i(\theta_i)$;

2) задаємо деякі початкові значення параметрів ω_i (переважно приймаємо їх рівними нулеві) і обчислюємо корені характеристичного рівняння (24);

3) за прийнятими значеннями ω_i та знайденими коренями обчислюємо значення θ_i і перевіряємо виконання другої умови (11) та умови (12);

4) за нев'язкою виконання цих умов проводимо уточнення значень ω_i і продовжуємо обчислення до досягнення заданої точності.

Проводився числовий аналіз температурного поля в циліндрі, виготовленому з алюмінієвого сплаву із стальним покриттям. Опорна температура приймалася рівною температурі зовнішнього середовища $t_0 = t_c = 373^0$ К, а коефіцієнти теплопровідності матеріалів циліндра і покриття як функції безрозмірної температури $T = t/t_0$, бралися у вигляді [12]

$$\lambda_t^{(1)}(T) = \lambda_{to}^{(1)}(1 + k_{11}T + k_{21}T^2), \tag{25}$$

$$\lambda_t^{(2)}(T) = \lambda_{to}^{(2)}(1 + k_{12}T), \tag{26}$$

де

$$\lambda_{t0}^{(1)} = 0{,}247\frac{\text{к вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}, \text{k}_{11} = -0{,}184, \text{k}_{21} = 0{,}069, \lambda_{t0}^{(2)} = 0{,}0469\frac{\text{к вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}, \text{k}_{12} = -0{,}204$$

Значення коефіцієнтів температуропровідності матеріалів циліндра і покриття приймалися рівними середнім значенням для вказаного діапазону температур, внаслідок чого відношення $K_a = a_1/a_2 \approx 8{,}046$.

Оскільки коефіцієнт теплопровідності матеріалу циліндра – квадратична функція температури (25), у відповідності до (8), температура в циліндрі обчислювалася як єдиний дійсний корінь рівняння

$$\frac{k_{11}}{2}T_1^{\,2} + \frac{k_{21}}{3}T_1^{\,3} + T_1 - \theta_1 = 0, \tag{27}$$

який знаходився за формулою Кардана [6]. В той же час, коефіцієнт теплопровідності матеріалу покриття – лінійна функція температури (26) і, згідно з (8), температура в покритті, як розв'язок відповідного квадратного рівняння, визначалася за формулою

$$T_2 = k_{12}^{-1}\left(\sqrt{1+2k_{12}\theta_2}-1\right). \tag{28}$$

Знайдено розподіл температури вздовж радіуса системи циліндр-покриття, для якої $\rho_2 = 1.02$ при різних значеннях критерія Bi в момент часу $Fo = 1$. Отримали неперервну зміну температури в межах циліндра і покриття, та рівність температур на лінії контакту. Як і слід було чекати, температура в системі із ростом Bi зростає. Зауважимо, що при $Fo \neq 1$ для задоволення нелінійних другої умови (11) та умови (12) з точністю 10^{-10} достатньо було взяти 10 коренів характеристичного рівняння (24).

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с. 2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.-М.: Физматгиз, 1960. -208 с. 3. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш.шк., 1965. – 466 с. 4. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук.думка, 1992. – 280 с. 5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487с. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с. 7. Недосека А.Я. Основы расчета сварных конструкций. – К.: Вища школа, 1988. – 263 с. 8. Попович В.С., Гарматій Г.Ю. Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні.-Львів, 1993,– 66 с. – (Препр. АН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача; № 13-93). 9. Попович В.С., Махоркін І.М. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл //Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 36-44. 10. Попович В.С., Федай Б.М. Осесиметрична задача термопружності багатошарової термочутливої труби //Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1966. – Т. 39, № 1. – С. 97-102. 11. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовица. Н.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с. 12. Sugano Y. On a strees function method of a thermoelastic problem expressed in cylindrical coordinates in a multiply-connected region exhibiting temperature-dependent matertal properties //Ingenieur - Archiv, – 1984. – P. 301-308.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.97