

В.С.Попович, К.С.Іванків, Г.Ю.Гарматій

Осесиметрична квазістатична задача термопружності термочутливого циліндра з тонким покриттям

У праці [2] запропоновано методику розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для кусково-однорідного термочутливого тіла при наявності конвективного теплообміну на його поверхні. З її допомогою знайдено нестационарне температурне поле у безмежному циліндрі радіуса r_1 з тонким покриттям товщиною $r_2 - r_1$. Вважається, що така система має нульову початкову температуру, а її нагрів здійснюється шляхом конвективного теплообміну з середовищем сталої температури t_c . Визначимо напружено-деформований стан системи циліндр-покриття, викликаний даним температурним полем, у припущенні, що зовнішня її поверхня вільна від навантаження.

Якщо знехтувати незначною залежністю коефіцієнтів Пуассона матеріалів циліндра і покриття від температури [1], а залежності від температури модулів Юнга $E_i(t)$ і температурних коефіцієнтів лінійного розширення $\alpha_i^{(i)}(t)$ представити у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, тоді розв'язок відповідної осесиметричної задачі термопружності у циліндричній системі координат r, φ, z зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho^{(i)} - \sigma_r^{(i)}}{\rho} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

при граничних умовах

$$\sigma_\rho^{(1)}|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(2)}|_{\rho=1}, \quad \bar{u}_1|_{\rho=1} = \bar{u}_2|_{\rho=1}, \quad \bar{u}_1|_{\rho=0} = 0, \quad \sigma_\rho^{(2)}|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad (2)$$

де компоненти тензора напружень обчислюються за формулами:

$$\sigma_\rho^{(i)} = K_i E_i^*(T) \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} + \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \frac{\bar{u}_i}{\rho} - \Phi_i^* \right],$$

$$\sigma_T^{(i)} = K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}_i}{\rho} - \Phi_i^* \right], \quad (3)$$

$$\sigma_\zeta^{(i)} = K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} - \frac{\bar{u}_i}{\rho} \right) - \Phi_i^* \right].$$

Тут для зручності запису введені наступні безрозмірні величини та позначення

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{r_1 \alpha_{i0}^{(i)} t_0}, \quad \sigma_\rho^{(i)} = \frac{\sigma_r^{(i)}}{E}, \quad \sigma_T^{(i)} = \frac{\sigma_\varphi^{(i)}}{E}, \quad \sigma_\zeta^{(i)} = \frac{\sigma_z^{(i)}}{E}$$

$$E = E_0^{(i)} \alpha_{i0}^{(i)} t_0, \quad K_E^{(i)} = \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}}, \quad \Phi_i^* = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} K_\alpha^{(i)} \int_0^{T_i} \alpha_i^{*(i)}(T) dT,$$

$$K_\alpha^{(i)} = \frac{\alpha_{i0}^{(i)}}{\alpha_{i0}^{(1)}}, \quad K_i = \frac{K_E^{(i)}(1-\nu_i)}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)},$$

де ν_i – коефіцієнти Пуасона, u_i – радіальні переміщення, $T = \frac{t}{t_0}$ –

безрозмірна температура, $\rho = \frac{r}{r_1}$, $\rho_2 = \frac{r_2}{r_1}$, t_0 – довільно вибрана опорна температура.

Після підстановки виразів напружень в рівняння рівноваги (1) бачимо, що переміщення $\bar{u}_i$ в циліндрі і покритті повинні задовольняти рівняння

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{\lambda}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{u}_i) \right] + \frac{d \ln E_i^*(T)}{d\rho} \left(\frac{d \bar{u}_i}{d\rho} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{\bar{u}_i}{\rho} - \Phi_i^* \right) = \frac{d \Phi_i^*}{d\rho} \quad (4)$$

($i = 1, 2$).

Розв'язок крайової задачі (4), (2) побудуємо методом збурень [3], який ґрунтується на малості деякого параметра ε і у нашому випадку визначається з рівності

$$\frac{d \ln E_i^*(T)}{d\rho} = \varepsilon \psi_i(T), \quad (5)$$

де $\psi_i(T)$ – функції безрозмірної температури.

Представимо переміщення $\bar{u}_i$ у вигляді рядів за зростаючими степенями параметра ε

$$\bar{u}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_{i,k}, \quad (6)$$

і підставимо їх у рівняння (4). Тоді після порівняння виразів при однакових степенях ε , отримаємо рекурентну послідовність крайових за-

дач для визначення $\bar{u}_{i,k}$:

для основної задачі

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{u}_{i,0}) \right] = \frac{d\Phi_i^*}{d\rho} \quad (i=1,2), \quad (7)$$

$$\sigma_{\rho,0}^{(1)} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho,0}^{(2)} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,0} \Big|_{\rho=1} = \bar{u}_{2,0} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,0} \Big|_{\rho=0} = 0, \sigma_{\rho,0}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho,0}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{d\bar{u}_{i,0}}{d\rho} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{\bar{u}_{i,0}}{\rho} - \Phi_i^* \right], \\ \sigma_{r,0}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{d\bar{u}_{i,0}}{d\rho} + \frac{\bar{u}_{i,0}}{\rho} - \Phi_i^* \right], \\ \sigma_{\zeta,0}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(\frac{d\bar{u}_{i,0}}{d\rho} + \frac{\bar{u}_{i,0}}{\rho} \right) - \Phi_i^* \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

для k -ої задачі ($k \geq 1$)

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{u}_{i,k}) \right] = - \frac{\psi_i(T)}{K_i E_i^*(t)} \sigma_{\rho,k-1}^{(i)} \quad (i=1,2), \quad (10)$$

$$\sigma_{\rho,k}^{(1)} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho,k}^{(2)} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,k} \Big|_{\rho=1} = \bar{u}_{2,k} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,k} \Big|_{\rho=0} = 0, \sigma_{\rho,k}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho,k}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{du_{i,k}}{d\rho} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{u_{i,k}}{\rho} \right], \\
\sigma_{T,k}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{du_{i,k}}{d\rho} + \frac{u_{i,k}}{\rho} \right], \\
\sigma_{\zeta,k}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left[\frac{du_{i,k}}{d\rho} + \frac{u_{i,k}}{\rho} \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

Повний розв'язок задачі термопружності отримаємо у вигляді (6) при $\varepsilon=1$.

Після інтегрування рівняння (7) з врахуванням умов (8) розв'язок основної задачі знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned}
u_{i,0} &= C_{1,0}^{(i)} \rho + \frac{C_{2,0}^{(i)} + H_i}{\rho}, \\
\sigma_{\rho,0}^{(i)} &= \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[\frac{2\nu_i-1}{\rho^2} H_i + C_{1,0}^{(i)} + \frac{(1-2\nu_2)C_{2,0}^{(2)}}{\rho^2} \delta_{i2} \right], \\
\sigma_{T,0}^{(i)} &= \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left\{ (2\nu_i-1) \left[\Phi_i^* - \frac{H_i + C_{2,0}^{(2)} \delta_{i2}}{\rho^2} \right] + C_{1,0}^{(i)} \right\}, \\
\sigma_{\zeta,0}^{(i)} &= \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[2\nu_i C_{1,0}^{(i)} + (2\nu_i-1) \Phi_i^* \right] \quad (i=1,2),
\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
C_{2,0}^{(2)} &= \frac{C_1 + C_2}{C_3}, \\
C_1 &= \frac{K_1 E_1^*(1)}{1-\nu_1} \left[2(\nu_1+1)H_1(1) - \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} H_2(\rho_2) \right], \\
C_2 &= \frac{K_2 E_2^*(1)}{1-\nu_2} \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} H_2(\rho_2), \\
C_3 &= (2\nu_2-1) \left[\frac{K_1 E_1^*(1)}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{2\nu_2-1} \right) + \frac{K_2 E_2^*(1)}{1-\nu_2} \left(1 - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$C_{1,0}^{(2)} = \frac{1-2\nu_2}{\rho_2^2} [H_2(\rho_2) + C_{2,0}^{(2)}], C_{1,0}^{(1)} = C_{1,0}^2 + C_{2,0}^2 - H_1(1), C_{2,0}^{(1)} = 0,$$

$$H_i = \int_0^{\rho} \Phi_i^* \rho d\rho, \quad E_i^*(1) = E_i^*(T) \Big|_{\rho=1}, \quad H_i(\rho_i) = H_i \Big|_{\rho=\rho_i},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Інтегруючи рівняння (10) при граничних умовах (11), знаходимо перше наближення задачі термопружності, а саме:

$$u_{i,1} = d_{1,1}^{(i)} \rho + \frac{d_{2,1}^{(i)} - F^{(i)}(\rho)}{\rho},$$

$$\sigma_{\rho,1}^{(i)} = \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[\frac{1-2\nu_i}{\rho^2} (F^{(i)}(\rho) - d_{2,1}^{(i)} \delta_{i2}) - (1-\nu_i) G^{(i)}(\rho) + d_{1,1}^{(i)} \right],$$

$$\sigma_{r,1}^{(i)} = \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[\frac{2\nu_i-1}{\rho^2} (F^{(i)}(\rho) - d_{2,1}^{(i)} \delta_{i2}) - \nu_i G^{(i)}(\rho) + d_{1,1}^{(i)} \right],$$

$$\sigma_{\zeta,1}^{(i)} = \frac{K_i E_i^*(T) \nu_i}{1-\nu_i} [2d_{1,1}^{(i)} - G^{(i)}(\rho)] \quad (i=1,2)$$

де

$$d_{2,1}^{(2)} = b^{-1} \left\{ \frac{K_2 E_2^*(1)}{1-\nu_2} \left[\frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} F^{(2)}(\rho_2) + (1-\nu_2) G^{(2)}(\rho_2) \right] - \right. \\ \left. - \frac{K_1 E_1^*(1)}{1-\nu_1} \left[2(1-\nu_1) F^{(1)}(1) - (1-\nu_1) G^{(1)}(1) + \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} F^{(2)}(\rho_2) - (\nu_2-1) G^{(2)}(\rho_2) \right] \right\},$$

$$b = \frac{K_1 E_1(1)}{1-\nu_1} \left(1 + \frac{1-2\nu_2}{\rho_2^2} \right) + \frac{K_2 E_2(1)}{1-\nu_2} (1-2\nu_2)(1-\rho_2^{-2}),$$

$$d_{1,1}^{(2)} = \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} [F^{(2)}(\rho_2) - d_{2,1}^{(2)}] + (1-\nu_2) G^{(2)}(\rho_2), \quad d_{2,1}^{(1)} = 0,$$

$$d_{1,1}^{(1)} = d_{1,1}^{(2)} + d_{2,1}^{(2)} + F^{(1)}(1), \quad F^{(i)}(\rho) = \int_{\rho_{i-1}}^{\rho} \rho G^{(i)}(\rho) d\rho,$$

$$G^{(i)}(\rho) = \frac{1}{K_i} \int \frac{\psi_i(T) \sigma_{\rho,0}^{(i)}}{E_i^*(T)} d\rho \quad (\rho=0, \rho_1=1),$$

$$F^{(i)}(\rho_i) = F^i(\rho) \Big|_{\rho=\rho_i}, G^{(i)}(\rho_i) = G^i(\rho) \Big|_{\rho=\rho_i}.$$

Нехай циліндр із алюмінієвого сплаву має стальне покриття. Залежності термодинамічних характеристик від безрозмірної температури $T = t/t_0$ для алюмінієвого сплаву мають вигляд [4]

$$E_1(T) = 0,724 \cdot 10^{-2} - 0,156 \cdot 10^{-1} T - 0,684 \cdot 10^{-4} T^2 \text{ (GPa)},$$

$$\alpha_1(T) = 0,228 \cdot 10^{-4} + 0,183 \cdot 10^{-7} T \text{ (1/K)},$$

$$\nu_1 = 0,34.$$

Аналогічні залежності для сталі

$$E_2(T) = 0,216 \cdot 10^3 - 0,245 \cdot 10^{-3} T^2 \text{ (GPa)},$$

$$\alpha_2(T) = 0,119 \cdot 10^{-4} + 0,832 \cdot 10^{-8} T \text{ (1/K)},$$

$$\nu_2 = 0,3.$$

Таким чином

$$E_0^{(1)} = 0,724 \cdot 10^2, E_0^{(2)} = 0,216 \cdot 10^3,$$

$$\alpha_{t0}^{(1)} = 0,228 \cdot 10^{-4}, \alpha_{t0}^{(2)} = 0,119 \cdot 10^{-4}.$$

Для обчислення першого наближення переміщень та напружень виникає необхідність обчислення інтегралів $F^{(i)}(\rho)$ та $G^{(i)}(\rho)$, де підінтегральні вирази є функціями нульового наближення. Так як температура і напруження у нульовому наближенні на заданому інтервалі є монотонними функціями, для зручності обчислення згаданих інтегралів, представляємо їх у вигляді многочленів

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^n a_k \rho^k,$$

де коефіцієнти a_k знаходимо методом найменших квадратів. Необхідна кількість членів ряду n визначалася точністю апроксимації заданих функцій. Після такого представлення і деяких перетворень підінтегральних виразів, обчислення інтегралів $G^{(i)}(\rho)$ проводилося за квадратурними формулами Гауса. Аналогічно, з заданою точністю, апроксимувалися отримані значення інтегралів $G^{(i)}(\rho)$ і обчислювалися інтеграли $F^{(i)}(\rho)$.

Графіки розподілу безрозмірних температури, радіального переміщення і напружень у першому наближенні для різних значень критерія Bi у момент часу $Fo=1$ показані на рисунках 1 -5.

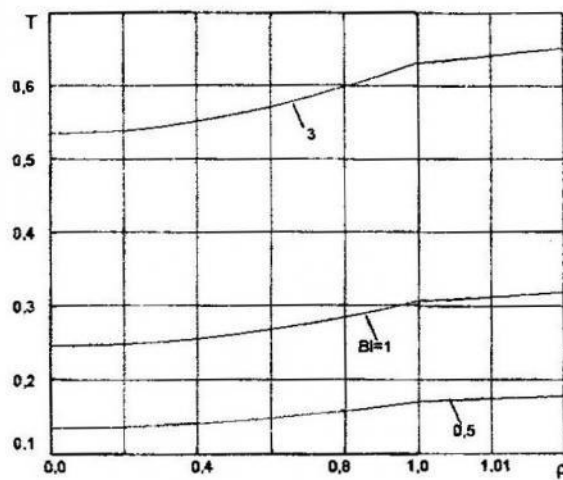


Рис. 1

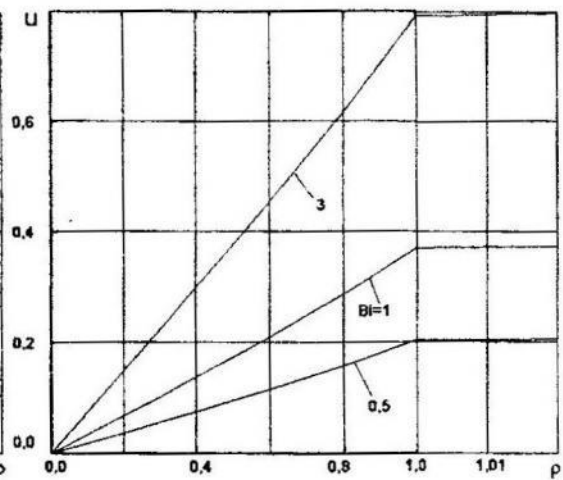


Рис. 2

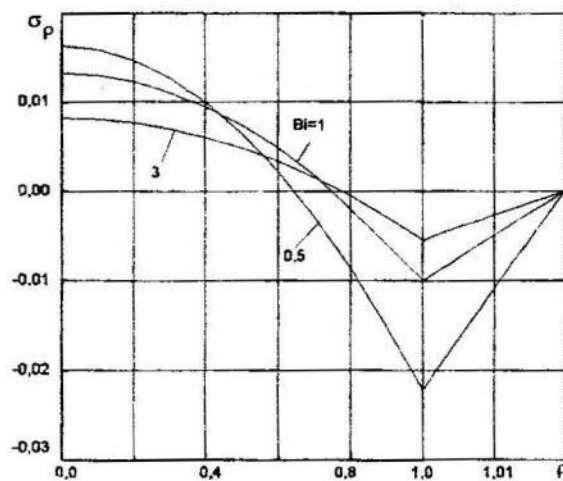


Рис. 3

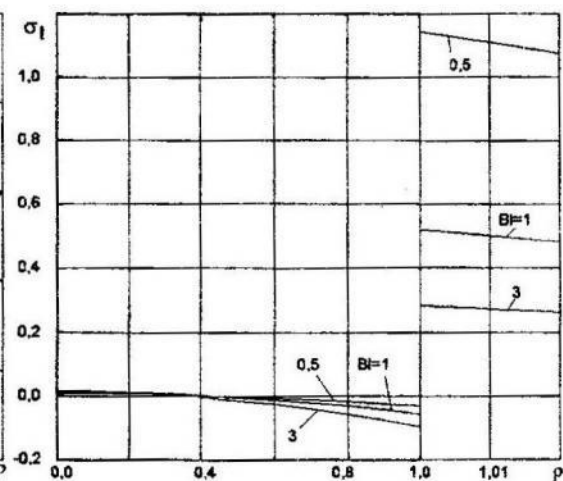


Рис. 4

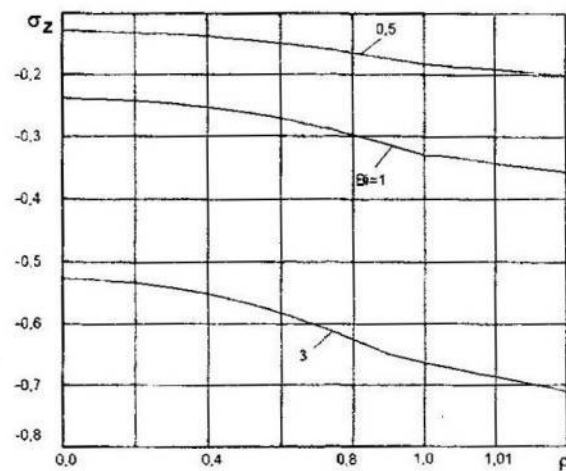


Рис. 5

Обчислення показали, що основний внесок у розв'язок задачі термопружності вносить нульове наближення. Наприклад, для вибраного часу, максимальний внесок першого наближення у напруження σ_p не перевищує 4%, а у напруження σ_T – 7.5%.

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел.-М.:Изд-во Моск. ун-та, 1976, – 376с. 2. Попович В.С., Гарматій Г.Ю., Іванків К.С. Нестационарна задача теплопровідності термочутливого циліндра з тонким покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1997. Вип. 45. – с. 83-88. 3. Nowinski J. Transient Thermoelastic problem for an infinite medium with a Spherical cavity exhibiting temperature dependent properties//J.Appl.Mech.-1962.-29,№2,-p.197-205. 4. Sugano Y. On a stress function method of a thermoelastic problem expressed in cylindrical coordinates in a multiply-connected region exhibiting temperature-dependent material properties //Ingenieur - Archiv, – 1984,54.-p.301-308.

Стаття надійшла до редколегії 30.12.97.

УДК 518.5:518.62:681.335

Костенко С.Б., Попов Б.О.

Знаходження рівномірного наближення неперервної функції сплайном із заданою похибкою

При розв'язанні задач математичного моделювання для обчислення неперервної функції $f(x)$ на фіксованому проміжку $[a, b]$ часто використовують наближення сплайнами [1,2]. Для цього розбивають проміжок $[a, b]$ множиною точок $Z = \{z_i\}_{i=0}^r$, $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$ на систему підінтервалів $[z_{i-1}, z_i]$, $i = 1, r$, на кожному з яких будуються вирази найкращого чебишовського наближення. Множину точок Z називають вузлами сплайну.

Якщо необхідно досягти найменшу похибку наближення при заданій кількості ланок, то здійснюють вибір вузлів сплайну з умови рівномірності наближення (похибки наближення на кожному з підінтервалів є однаковими)[3].

У випадку існування аналітичного виразу ядра наближення $\eta(f(x), F(A, x))$ [4] функції $f(x)$ за допомогою найкращого чебишовського наближення $F(A, x) = F(a_0, a_1, \dots, a_m; x)$ формула похибки