Обчислення показали, що основний внесок у розв'язок задачі термопружності вносить нульове наближення. Наприклад, для вибраного часу, максимальний внесок першого наближення у напруження σ_ρ не перевищує 4%, а у напруження σ_T – 7.5%.

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородних тел.-М.:Изд-во Моск. ун-та ,1976, – 376с. 2. Попович В.С., Герматій Г.Ю., Іванків К.С. Нестаціонарна задача теплопровідності термочутливого циліндра з тонким покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1997. Вип. 45. – с. 83-88. 3. Nowinski J. Transient Thermoelastie problem for an infinite medium with a Sphetical caviti exhibiting temperature deperdent properties//J.Appl.Mech.-1962.-29,№2,-p.197-205. 4. Sugano Y. On a strees function method of a thermoelastic problem expressed in cylindrical coordinates in a multiply-connected region exhibiting temperature-dependent matertal properties //Ingenieur - Archiv, – 1984,54.-p.301-308.

Стаття надійшла до редколегії 30.12.97.

УДК 518.5:518.62:681.335

Костенко С.Б., Попов Б.О.

Знаходження рівномірного наближення неперервної функції сплайном із заданою похибкою

При розв'язанні задач математичного моделювання для обчислення неперервної функції $f(x)$ на фіксованому проміжку $[a,b]$ часто використовують наближення сплайнами [1,2]. Для цього розбивають проміжок $[a,b]$ множиною точок $Z=\{z_i\}_{i=0}^r$, $a=z_0<z_1<...<z_r=b$ на систему підінтервалів $[z_{i-1},z_i]$, $i=\overline{1,r}$, на кожному з яких будуються вирази найкращого чебишовського наближення. Множину точок Z називають вузлами сплайну.

Якщо необхідно досягти найменшу похибку наближення при заданій кількості ланок, то здійснюють вибір вузлів сплайну з умови рівномірності наближення (похибки наближення на кожному з підінтервалів є однаковими)[3].

У випадку існування аналітичного виразу ядра наближення $\eta(f(x),F(A,x))$ [4] функції $f(x)$ за допомогою найкращого чебишовського наближення $F(A,x)=F(a_0,a_1,..a_m;x)$ формула похибки рівномірного наближення сплайном з вагою $\omega(x)>0$ при заданій кількості ланок r, $r\to\infty$ на проміжку $[a,b]$ має вигляд [4]

$$\mu=\frac{2}{(4r)^{m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b\left|\frac{\eta\ (f,F)}{\omega(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{(b-a)}{r}\right)\right]. \qquad (1)$$

Підставивши значення $b=z_i$, $r=i$, $i=\overline{1,r}$ і знехтувавши виразом у квадратних дужках, отримаємо рівняння для визначення границь ланок

$$\int_a^{z_i}\left|\eta\ (f,F)/\omega(x)\right|^{\frac{1}{m+1}}dx=4i\left(\frac{\varepsilon(m+1)!}{2}\right)^{1/(m+1)}. \qquad (2)$$

Тут границі ланок визначаються з умови асимптотично рівномірного наближення із заданою похибкою μ, тобто похибка наближення на кожній ланці буде близькою до заданої, а границі ланок обчислюються наближено. Для визначення з довільною точністю границь ланок сплайну, що рівномірно наближає функцію $f(x)$ із заданою похибкою наближення μ пропонуються нові методи.

Нехай $F(A,x,u,v)=F(a_0,a_1,...,a_m;x,u,v)$ вираз найкращого чебишовського наближення на проміжку $[u,v]\in[a,b]$. Максимальне значення похибки наближення є функцією границь ланки

$$\mu(u,v)=\max_{[u,v]}\left|\frac{f(x)-F(A,x,u,v)}{\omega(x)}\right|. \qquad (3)$$

Якщо $f(x)\in C[a,b]$ і наближаюча функція $F(A,x,u,v)$ – неперервна за аргументами A та x, то функція похибки $\mu(u,v)$ є неперервною відносно своїх аргументів [4], неспадна по v і незростаюча по u. Підставивши $u=z_0$, де $z_0=a$, і прирівнявши $\mu(z_0,v)=\mu^*$, де μ^* – задана похибка рівномірного наближення сплайном, отримаємо рівняння для пошуку першого вузла z_1 сплайна на проміжку $[z_0,b]$. i -тий вузел сплайну визначається з рівняння

$$\mu(z_{i-1},v)=\mu^*,\quad i=\overline{1,r},\quad v\in[z_{i-1},b]. \qquad (4)$$

Відшукання граничних точок припиняється, коли $\mu(z_{i-1},v)\le\mu^*$.

Для розв'язання рівняння (4) можна скористатися методом поділу проміжку наближення, оскільки він вимагає неперервність функції $\mu(z_{i-1}, v)$ відносно v і наявність кореня на заданому проміжку. Позначимо $y_1 = z_{i-1}$, $y_2 = b$. Обчислимо $w = (y_2 - y_1)/2$. Знайдемо найкраще чебишовське наближення $F(A, x, z_{i-1}, w)$ і визначимо максимальне значення похибки $\widetilde{\mu}$. Якщо $\widetilde{\mu} < \mu^*$, очевидно, значення кореня z_i міститься поза проміжком $[z_{i-1}, w]$, тому здійснюємо переприсвоєння $y_1 = w$, а в іншому випадку $y_2 = w$ і знайдемо центральну точку новоутвореного проміжку . І т.д.

Обчислення коренів триває доти, поки довжина проміжку $[y_1, y_2]$ є меншою за наперед задану величину точності знаходження розв'язку Δ, тобто $|y_2 - y_1| < \Delta$ або виконується $|\widetilde{\mu} - \mu^*|/\mu^* < \delta_\mu$, де δ_μ – відносна помилка визначення похибки наближення.

Очевидно, що даний метод відшукання границь ланок дає можливість знаходити їх значення з довільною точністю Δ. Якщо процес обчислення припиниться через виконання умови $|y_2 - y_1| < \Delta$, то можна наперед визначити кількість k кроків обчислення. Ця кількість рівна

$$k = \left[\log_2((b - z_i)/\Delta)\right]. \tag{5}$$

Виходячи з виразу (1) для похибки можна побудувати ітераційний алгоритм для знаходження вузлів рівномірного наближення, що, як правило, збігається за меншу кількість кроків.

Нехай $z_1, .. z_{i-1}$ – $i-1$ перших вузлів сплайну. Постає завдання знаходження вузлів z_i за умови, що похибка найкращого чебишовського наближення $F(A, x)$ на кожній ланці рівна μ. Розклавши в ряд Тейлора підінтегральну функцію у формулі (1) в околі точки z_{i-1}, отримаємо

$$\mu = \frac{(z_i - z_{i-1})^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left|\varphi(z_{i-1})\right|\left[1 + O((z_i - z_{i-1})/2)\right], \tag{6}$$

де

$$\varphi(x) = \left|\eta\ (f, F)/\omega(x)\right|^{\frac{1}{m+1}}. \tag{7}$$

Виберемо деяке близьке до вузла z_i значення z^*_i, тоді похибку наближення можна подати

$$\mu^* = \frac{(z^*_i - z_{i-1})^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}|\varphi(z_{i-1})|\left[1 + O((z_i^* - z_{i-1})/2)\right]. \tag{8}$$

Розглянемо відношення рівностей (7) та (8), знехтувавши виразами у квадратних дужках

$$\frac{\mu}{\mu^*} = \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{z_i^* - z_{i-1}}\right)^{m+1}. \tag{9}$$

Виразивши значення z_i, отримаємо

$$z_i = z_{i-1} + \left(\mu / \mu^*\right)^{\frac{1}{m+1}}\left(z^*_i - z_{i-1}\right). \tag{10}$$

Побудуємо ітераційний процес

$$z_i^{(n)} = z_{i-1} + \left(\mu / \mu_{n-1}\right)^{\frac{1}{m+1}}\left(z_i^{(n-1)} - z_{i-1}\right), \tag{11}$$

де μ – задана похибка наближення, μ_{n-1} – похибка найкращого чебишовського наближення на проміжку $[z_{i-1}, z_i^{(n-1)}]$. Умови збіжності процесу (11) встановлює теорема.

Теорема. *Якщо* $f(x) \in C^{m+2}[a,b]$, $\omega(x) \neq 0$ *при* $x \in [a,b]$, $F(A,x) = F(a_0, a_1, \ldots, a_m, x)$, $F(A,x) \in C^{m+2}[a,b]$. *– вираз найкращого чебишовського наближення, то числова послідовність* $\{z_i^{(n)}\}$, *що задається ітераційною формулою (11), де* μ_{n-1} *– похибка найкращого чебишовського наближення функції* $f(x)$ *виразом* $F(A,x)$ *на проміжку* $[z_{i-1}, z_i^{(n-1)}]$, *збігається до значення* i *-того вузла* z_i *сплайну, що рівномірно наближає функцію* $f(x)$ *з похибкою* μ *на проміжку* $[a,b]$.

В основі доведення теореми лежить дослідження поведінки виразу (11) за перелічених умов.

Приклад. Визначимо границі ланок при рівномірному абсолютному наближенні функції Бесселя $J_0(x)$ сплайном з ланками виду $V_3(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6$ на проміжку [0,13] із заданою похибкою наближення $\varepsilon = 10^{-5}$ використовуючи алгоритми поділу проміжку наближення навпіл і методом послідовних наближень за допомогою ітераційної формули (11) ($\Delta = 10^{-8}$; $\mu_\varepsilon < 10^{-6}$).

Встановимо кількість кроків обчислення k_1, k_2 кожного із методів, що виконуються при обчисленні границь ланок.

У таблиці 1 подані номер i ланки, її права границя – i -тий вузел сплайну z_i, значення кількості кроків обчислення.

Різке зростання кількості кроків k_2 обчислення з використанням ітераційної формули (11) вузлів ланок сплайна, що містять нулі ядра наближення $\eta(f,F)$ [5]: $c_1=0$, $c_1=7.587$, $c_1=11.074$, свідчить про те, що ефективність ітераційного процесу залежить від знакосталості функції ядра.

Таблиця 1.

i	z_i	k_1	k_2	k_3
1	1.94829	30	396	44
2	2.79061	30	9	9
3	3.46485	29	7	7
4	4.06056	29	6	6
5	4.61406	29	5	5
6	5.14634	29	4	4
7	5.67353	29	4	4
8	6.21278	29	5	5
9	6.79163	29	7	7
10	7.50371	29	11	11
11	8.28991	29	15	15
12	8.90016	28	6	6
13	9.47971	28	4	4
14	10.07366	28	6	6
15	10.75060	28	9	9
16	11.69570	27	38	32
17	12.33524	26	6	6

Так і повинно бути, бо інакше не буде виконуватися умова теореми 2.4, ітераційна формула (11) не має місце, вираз (10), що використовується при всановленні цієї формули не слідує із виразу (9).

Метод половинного поділу є стабільним на всій розглядуваній області, але його використання вимагає значних затрат часу. Тому для знаходження границь ланок при побудові сплайн-наближень функцій, ядро яких не перетворюється в нуль на проміжку наближення, доцільно користуватися ітераційною формулою (11).

Найкращі результати дає поєднання розглядуваних методів. У випадку, коли нулі ядра існують, вибираючи початкові наближення $z_i^{(0)}$ для ітераційної формули (11), необхідно перевірити, чи попадає така точка у проміжок $[z_{i-1}, z_i^{(0)}]$. Якщо попадає, то визначення вузла сплайну z_i відбувається за допомогою метода половинного поділу проміжка наближення, а якщо не попадає – то використовуючи ітераційні формули.

Якщо вираз для ядра наближення невідомий, то при визначенні вузлів сплайну слід користуватися ітераційною формулою (11) доти, поки кількість виконаних кроків не перебільшує величини $k/2$, де k – обчислюється згідно (5). Потім необхідно перейти до використання методу половинного поділу. Такий метод реалізований і у таблиці 1 вказана кількість k_3 його кроків.

1. De Mori R., Cardin R. A new design approach to binary logarithm computation// Signal Processing. – 1987. – **13**, N 2. – P. 177-195. 2. Grintzali F., Popakonstantinei G. A fast piecewise linear approximation algorithm// Signal Processing. – 1983. – **5**, N3. – P. 221-227. 3. Lawson C.L. Characteristic properties of the segmented rational minimax approximation problem// Numer. Math. – 1964. **-6**, N4. – P.293-301. 4. Попов Б.О. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка. – 1989. – 272 с. 5. Попов Б.О. Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ.-Киев: Наук. думка. – 1985. – 600 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.97

УДК 518.5:518.62:681.335

Б.О.Попов, О.І.Лаушник

Наближення показникових функцій за допомогою спеціального виразу

З метою прискорення обчислення математичних функцій на ЕОМ або за допомогою спеціалізованих пристроїв пропонуються усе нові способи обчислення таких функцій [3,4]. Особливо корисне швидке обчислення найбільш поширених елементарних функцій. При цьому важливо дослідити властивості таких способів і провести їх порівняння із відомими. Далі таке дослідження поводиться для показникової функції.

При найкращому чебишовському наближенні показникової функції c^x $(c>0)$ за допомогою раціонального многочлена

$$R_{k,l}(x)=P_k(x)/Q_l(x), \tag{1}$$

де $P_k(x)$ та $Q_l(x)$ многочлени степеня k та l відповідно, мінімум максимальної похибки при сталому $m=k+l$ досягається для $k=l$