Якщо вираз для ядра наближення невідомий, то при визначенні вузлів сплайну слід користуватися ітераційною формулою (11) доти, поки кількість виконаних кроків не перебільшує величини $k/2$, де k – обчислюється згідно (5). Потім необхідно перейти до використання методу половинного поділу. Такий метод реалізований і у таблиці 1 вказана кількість k_3 його кроків.

1. De Mori R., Cardin R. A new design approach to binary logarithm computation// Signal Processing. – 1987. – 13, N 2. – P. 177-195. 2. Grintzali F., Popakonstantinei G. A fast piecewise linear approximation algorithm// Signal Processing. – 1983. – 5, N3. – P. 221-227. 3. Lawson C.L. Characteristic properties of the segmented rational minimax approximation problem// Numer. Math. – 1964. -6, N4. – P.293-301. 4. Попов Б.О. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка. – 1989. – 272 с. 5. Попов Б.О. Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ.-Киев: Наук. думка. – 1985. – 600 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.97

УДК 518.5:518.62:681.335

Б.О.Попов, О.І.Лаушник

Наближення показникових функцій за допомогою спеціального виразу

З метою прискорення обчислення математичних функцій на ЕОМ або за допомогою спеціалізованих пристроїв пропонуються усе нові способи обчислення таких функцій [3,4]. Особливо корисне швидке обчислення найбільш поширених елементарних функцій. При цьому важливо дослідити властивості таких способів і провести їх порівняння із відомими. Далі таке дослідження поводиться для показникової функції.

При найкращому чебишовському наближенні показникової функції c^x $(c > 0)$ за допомогою раціонального многочлена

$$R_{k,l}(x) = P_k(x)/Q_l(x), \tag{1}$$

де $P_k(x)$ та $Q_l(x)$ многочлени степеня k та l відповідно, мінімум максимальної похибки при сталому $m = k + l$ досягається для $k = l$

або $k = l + 1$ [2]. Для функції c^x справедливо $c^{-x} = 1/c^x$. Не важко бачити, що раціональний многочлен $R(x)$ матиме властивість $R(-x) = 1/R(x)$ тоді і лише тоді, коли його можна представити у вигляді

$$R(x) = T_{N,M}(x) = \frac{\alpha_N\left(x^2\right) + x\beta_M\left(x^2\right)}{\alpha_N\left(x^2\right) - x\beta_M\left(x^2\right)}, \tag{2}$$

де $\alpha_N(x)$ та $\beta_M(x)$ многочлени степеня відповідно N та M;

$$\alpha_N\left(x^2\right) = \sum_{i=o}^{N} a_i x^{2i}, \beta_M\left(x^2\right) = \sum_{i=o}^{M} b_i x^{2i}.$$

Відносна похибка $\delta(x)$ наближення функції c^x за допомогою виразу (2) $\delta(x) = 1 - R(x)c^{-x}$ має очевидну властивість

$$\delta(-x) = -\delta(x)/(1 - \delta(x))$$

Звідси слідує, що для малих $\delta(x)$

$$\delta(-x) \approx -\delta(x). \tag{3}$$

Нехай вираз (2) – найкраще відносне чебишовське наближення функції c^x на проміжку $[0,b]$. Оскільки цей вираз має $N + M + 2$ параметри, то на цьому проміжку буде $N + M + 3$ точки альтернансу $\{u_i\}_0^{N+M+2}$ $(0 < u_0 < u_1 <\ldots< u_{N+M+2} = b)$, у яких змінюються знаки екстремумів функції $\delta(x)$:

$$\delta(u_i) = -\delta(u_{i+1}),\ i = \overline{0,N + M + 1}. \tag{4}$$

Із виразів (3) та (4) маємо на проміжку $[-b,b]$:

$$\delta(-t_i) \approx -\delta(t_i),\ i = \overline{0,2(N + M + 2) + 1}, \tag{5}$$

де

$$t_i = \begin{cases} -u_{N+M+2-i} & \text{при } i = \overline{0, N + M + 2} \\ u_{i-N-M-3} & \text{при } i = \overline{N + M + 3, 2(N + M + 2) + 1} \end{cases}$$

Тобто, якщо $M = N$ або $M = N - 1$, то вираз (2) близький до найкращого відносного чебишовського наближення функції c^x на проміжку $[-b,b]$ раціональним многочленом (1), для якого

$k = l = N + M + 1$. В останньому випадку максимальна похибка наближення виражається формулою [2]

$$\mu\left(c^x, R_{k,k}\right) = \frac{(k!)^2(\ln c)^{2k+1} b^{2k+1}}{2^{2k}(2k)!(2k+1)!}\left[1 + O\left(b^2\right)\right] \tag{6}$$

Виходячи із виразу (6) та властивості (5), бачимо, що максимальна похибка найкращого відносного чебишовського наближення функції c^x на проміжку $[0,b]$ за допомогою раціонального многочлена (2) має вигляд

$$\mu\left(c^x, T_{N,M}\right) = \frac{(N+M+1)!^2(b\ln c)^{2(N+M)+3}}{2^{2N+2M+2}(2N+2M+2)!(2N+2M+3)!}\left[1 + O\left(b^2\right)\right] \tag{7}$$

Для знаходження параметрів $\{a_i\}_{i=0}^{N}$ та $\{b_i\}_{i=0}^{M}$ найкращого чебишовського наближення функції $y = c^x$ на проміжку $[0,b]$ за допомогою виразу (2) необхідно послідовно розв'язувати систему рівнянь чебишовської інтерполяції [1]

$$1 - R(u_i)c^{-u_i} = (-1)^i \mu, \quad i = \overline{0, N+M+1},$$

яка може бути перетворена до вигляду

$$\sum_{j=0}^{N} a_i\left[1 - \left(1 - (-1)^i \mu\right)c^{u_i}\right]u_i^{2j} + \sum_{j=0}^{M} b_i\left[1 + \left(1 - (-1)^i \mu\right)c^{u_i}\right]u_i^{2j+1} = 0,$$

$$i = \overline{0, N+M+1} \tag{8}$$

Прийнявши $b_M = 1$ і вважаючи величину похибки μ відомою із виразу (7) бачимо, що система (8) є системою $N + M + 2$ рівнянь із $N + M + 1$ невідомими параметрами. Зайве рівняння можна використати для перевірки. Параметри знаходяться за одним з алгоритмів Ремеза [1].

Пропонований алгоритм значно простіший за відомі, бо не передбачає розв'язання нелінійних рівнянь. Перевіримо його точність. Для цього для різних b, N та M визначимо похибку μ за формулою (7) (верхнє число у таблиці) і фактичне найбільше значення відносної похибки при наближенні функції $y = e^x$ на проміжку $[-b,b]$ за допомогою виразу (2), параметри якого знайдені за описаним алгоритмом (нижнє число).

M,N	$b=1$	$b=1/2$	$b=1/4$	$b=1/16$	$b=1/32$
0,0	$2.083\cdot10^{-2}$ $2.068\cdot10^{-2}$	$2.604\cdot10^{-3}$ $2.602\cdot10^{-3}$	$3.255\cdot10^{-4}$ $3.255\cdot10^{-4}$	$5.086\cdot10^{-6}$ $5.086\cdot10^{-6}$	$6.358\cdot10^{-7}$ $6.358\cdot10^{-7}$
0,1	$8.68\cdot10^{-5}$ $8.68\cdot10^{-5}$	$2.713\cdot10^{-6}$ $2.713\cdot10^{-6}$	$8.477\cdot10^{-8}$ $8.477\cdot10^{-8}$	$8.278\cdot10^{-11}$ $8.278\cdot10^{-11}$	$2.587\cdot10^{-12}$ $2.587\cdot10^{-12}$
1,1	$1.55\cdot10^{-7}$ $1.55\cdot10^{-7}$	$1.211\cdot10^{-9}$ $1.211\cdot10^{-9}$	$9.461\cdot10^{-12}$ $9.461\cdot10^{-12}$	$5.775\cdot10^{-16}$ $5.775\cdot10^{-16}$	$4.511\cdot10^{-18}$ $4.511\cdot10^{-18}$
1,2	$1.538\cdot10^{-10}$ $1.538\cdot10^{-10}$	$3.004\cdot10^{-13}$ $3.004\cdot10^{-13}$	$5.866\cdot10^{-16}$ $5.866\cdot10^{-16}$	$2.238\cdot10^{-21}$ $2.238\cdot10^{-21}$	$4.371\cdot10^{-24}$ $4.371\cdot10^{-24}$
2,2	$9.708\cdot10^{-14}$ $9.708\cdot10^{-14}$	$4.74\cdot10^{-17}$ $4.74\cdot10^{-17}$	$2.315\cdot10^{-20}$ $2.315\cdot10^{-20}$	$5.519\cdot10^{-27}$ $5.519\cdot10^{-27}$	$2.695\cdot10^{-30}$ $2.695\cdot10^{-30}$

Дані таблиці підтверджують працездатність пропонованого алгоритму. В найпростіших випадках алгоритм може бути додатково спрощений. Наведемо приклади для $c=e$.

Приклад 1. $N=M=0$, $R(x)=(A+x)/(A-x), \mu=b^3/48$. Із системи рівнянь (8) слідує, що $A=b\left(1+\mu+e^{-b}\right)/\left(1+\mu-e^{-b}\right)$. Екстремальне значення похибки досягається в точці $u_0=\sqrt{A(A-2)}$.

Приклад 2. $N=1, M=0, R(x)=\left(A+x^2+Bx\right)/\left(A+x^2-Bx\right)$, $\mu=b^5/11520$. Позначимо $\gamma(x)=\left(1+(1-\mu)e^x\right)/\left(1-(1-\mu)e^x\right)$. Тоді точка альтернансу $c=u_0$ знаходиться з трансцендентного рівняння $\left(A+c^2\right)\left(A+c^2-2B\right)-Bc^2(B-4)=0$, де $A=-b^2-Bb\gamma(b)$, $B=\left(c^2-b^2\right)/\left(b\gamma(b)-c\gamma(c)\right)$.

Відомо, що при рівномірному відносному наближенні показникової функції за допомогою найкращих чебишовських раціональних многочленів проміжок наближення розбивається на рівні частини [2]. Нехай проміжок $[0,b]$ розбито на r рівних частин точками $z_i=ib/r$, $i=\overline{0,r}$. Позначимо $u_i=z_{i-1}+b/2r$, $y=x-u_i$, $i=\overline{1,r}$. Тоді для змінної y маємо $|y|\le b/2r$. Оскільки $c^x=c^{u_i}c^y$, то на кожному проміжку $\left[z_{i-1},z_i\right]$, $i=\overline{1,r}$ функцію e^x можна наблизити виразом $T_{N,M}^{(i)}(x)=e^{u_i}T_{N,M}\left(x-u_i\right)$ з однаковою відносною похибкою

$$\mu = \frac{\left(N+M+1\right)!^2\, b^{2(N+M)+3}}{2^{4N+4M+5}\left(2N+2M+2\right)!\left(2N+2M+3\right)!\,r^{2N+2M+3}}\left[1+O\left(\frac{b^2}{4r^2}\right)\right]$$

Якщо при цьому $x\in\left(0,b\right)$, то номер проміжку $i=\left[xr/b\right]$.

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.:Наука. 1972. 368с. 2. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К.:Наук.думка. 1989. 272с. 3. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. К.:Наук.думка. 1984. 600с. 4. Moshier S.L.B. Methods and programs for mathematical functions. N.Y.: John Wiley. 1989. 418p.

Стаття надійшла до редколегії 4.12.97

УДК 517.7:534.111

А.Ф.Барвінський, Х.Т.Дрогомирецька, І.М.Дудзяний

Асимптотичні розв'язки узагальненої задачі Вітта у першому наближенні

Розглянемо крайову задачу, що описується загальним нелінійним автономним хвильовим рівнянням

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^p - a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^q = -2\delta\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

і крайовими умовами

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = -2\varepsilon\Delta\,(1-u^2)\,\frac{\partial u}{\partial t},\\ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+q} + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^p\right]_{x=l} = -2\varepsilon\beta\frac{\partial u}{\partial t},\end{gathered} \tag{2}$$

де ε - малий параметр (ε>0), δ, Δ, β - сталі (Δ>0, $\beta\neq$0, 1-$\varepsilon\Delta$>0); p, q, m+1, n+1 - числа вигляду $(2k_1+1)/(2k_2+1)$, а $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$.

У випадку m=0, p=q=1 задача (1), (2) співпадає з задачею А. Вітта [2], що описує встановлення автоколивань у деякій системі з розподіленими параметрами, а тому назвемо її узагальненою задачею