$$\mu = \frac{(N+M+1)!^2\, b^{2(N+M)+3}}{2^{4N+4M+5}(2N+2M+2)!(2N+2M+3)!\,r^{2N+2M+3}}\left[1+O\left(\frac{b^2}{4r^2}\right)\right]$$

Якщо при цьому $x \in (0,b)$, то номер проміжку $i = [xr/b]$.

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.:Наука. 1972. 368с. 2. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К.:Наук.думка. 1989. 272с. 3. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. К.:Наук.думка. 1984. 600с. 4. Moshier S.L.B. Methods and programs for mathematical functions. N.Y.: John Wiley. 1989. 418p.

Стаття надійшла до редколегії 4.12.97

УДК 517.7:534.111

А.Ф.Барвінський, Х.Т.Дрогомирецька, І.М.Дудзяний

Асимптотичні розв'язки узагальненої задачі Вітта у першому наближенні

Розглянемо крайову задачу, що описується загальним нелінійним автономним хвильовим рівнянням

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^p - a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^q = -2\delta\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

і крайовими умовами

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = -2\varepsilon\Delta\,(1-u^2)\,\frac{\partial u}{\partial t},\\ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+q} + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^p\right]_{x=l} = -2\varepsilon\beta\frac{\partial u}{\partial t},\end{gathered} \tag{2}$$

де ε - малий параметр ($\varepsilon>0$), δ, Δ, β - сталі ($\Delta>0$, $\beta\neq0$, $1-\varepsilon\Delta>0$); p, q, $m+1$, $n+1$ - числа вигляду $(2k_1+1)/(2k_2+1)$, а $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$.

У випадку $m=0$, $p=q=1$ задача (1), (2) співпадає з задачею А. Вітта [2], що описує встановлення автоколивань у деякій системі з розподіленими параметрами, а тому назвемо її узагальненою задачею

Вітта. Її асимптотичний розв'язок при $m=n=0$, $p=q=1$ побудований у [3].

За асимптотичним методом Крилова-Боголюбова-Митропольського [1], розв'язок задачі (1);(2), що близький до першої форми динамічної рівноваги, подамо у вигляді

$$u(x,t)=a\,X(x)\cdot T(\varphi)+\varepsilon u_1(x,a,\varphi)+\varepsilon^2 u_2(x,a,\varphi)\ldots \tag{3}$$

де $u_i(x,a,\varphi)$ -невідомі функції ($i=1,2,\ldots$); $a\,X(x)\cdot T(\varphi)$ -розв'язок відповідної незбуреної ($\varepsilon=0$) задачі, що виражається через *Ateb*-функції [4]

$$aX(x)\cdot T(\varphi)=a\cdot ca\left(\frac{q}{n+q},\frac{m+p}{q},v(a)x\right)\cdot sa\left(\frac{n+q}{p},\frac{p}{m+p},\varphi\right),$$

$$v(a)=\left(\frac{\lambda(a)(n+2q)^q(m+p+q)^{n+q}}{(2q)^{n+2q}}\,a^{m+p-n-q}\right)^{\frac{1}{n+2q}},$$

а $\lambda(a)$ - найменший додатний дійсний корінь рівняння

$$\left(sa\left(\frac{q}{n+q},\frac{m+p}{q},v(a)l\right)\right)^{q+n}=-\alpha\lambda\beta\left(\frac{m+p+q}{2qv(a)}\right)^{q+n}\left(ca\left(\frac{m+p}{q},\frac{q}{n+q},v(a)l\right)\right)^{m+p}.$$

Величини a і φ, що входять у розклад (3), задаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a)+\ldots,\ \frac{d\varphi}{dt}=w(a)+\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)+\ldots,$$

де $w(a)=\left(\alpha\,\dfrac{\lambda(a)(m+2p)^{p}(m+p+q)^{m+p}}{(2p)^{m+2p}}\right)^{\frac{1}{m+2p}}$,

$A_1(a),\ A_2(a),\ldots,B_1(a),B_2(a),\ldots$ - невідомі функції.

Знайдемо перше наближення асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2). Для визначення $A_1(a)$, $B_1(a)$ застосовуємо метод енергетичного балансу [3]. Отримаємо

$$A_1(a)=\frac{\overline{\Phi}(a)}{a^{m+p-1}w^{m+2p-2}(a)Q\left(Mmw(a)+N\left(2pw(a)+pa\dfrac{dw}{da}\right)\right)},$$

$B_1(a)=0$, де $Q,\ M,\ N$ - сталі, що обчислюються згідно формул

$$M=\left(\frac{2p}{n+p+q}\right)^{m-1}\left(\frac{-4p^2}{(n+p+q)(m+2p)}\right)^{p+1}\cdot 2\,\mathrm{B}\left(\frac{p(n+q+2)}{n+p+q},1\right),$$

$$N=\left(\frac{2p}{n+p+q}\right)^{m+1}\left(\frac{-4p^2}{(n+p+q)(m+2p)}\right)^{p-1}\cdot 2\,\mathrm{B}\left(\frac{(p-1)(n+q)+p}{n+p+q},\frac{3(m+p)}{m+2p}\right),$$

$Q=\int\limits_0^l X^{m+p}(x)\,dx$, $\mathrm{B}(.,.)$ -*Beta*-функція,

$$\overline{\Phi}(a)=\frac{4apw}{n+p+q}B_1Q_2-\frac{4\delta apw}{n+p+q}\left(B_2-a^2B_3\right)\left[\frac{n+q}{\beta}\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+q-1}_{x=l}Q_1+\right.$$

$$\left.+\alpha nQ\right]+\frac{4\delta pmw^2}{n+p+q}\left(\frac{2apw}{n+p+q}\right)^{m-1}\left(\frac{-4ap^2w}{(n+p+q)(m+2p)}\right)^{p}\left[-\frac{4a^2pw}{n+p+q}B_3-\right.$$

$$\left.-\frac{2pw}{m+2p}\left(B_4-a^2B_7\right)\right]Q_3+$$

$$+\left[-\frac{8a^2p^2w^2}{(n+p+q)^2}B_6+\frac{32a^2p^2w^2}{(n+p+q)(m+2p)}B_2-\frac{2pw}{m+2p}\left(\frac{2mw}{m+2p}B_4+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{2w(n+q)}{n+p+q}B_2-\frac{2mwa^2}{m+2p}B_5-\frac{2wa^2(n+q)}{n+p+q}B_3\right)\right]Q_4,$$

де $B_1=2\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{n+p+q},\frac{2m+3p}{m+2p}\right)$, $B_2=2\,\mathrm{B}\left(\frac{p(n+q)}{n+p+q},\frac{2m+3p}{m+2p}\right)$,

$B_3=2\,\mathrm{B}\left(\frac{p(n+q+2)}{n+p+q},\frac{2m+3p}{m+2p}\right)$, $B_4=2\,\mathrm{B}\left(\frac{p+(n+q)(p+1)}{n+p+q},\frac{m+p}{m+2p}\right)$,

$B_5=2\,\mathrm{B}\left(\frac{(n+q)(p+1)+3p}{n+p+q},\frac{m+p}{m+2p}\right)$,

$B_6=2\,\mathrm{B}\left(\frac{(n+q)(p-1)+p}{n+p+q},\frac{3m+5p}{m+2p}\right)$, $B_7=2\,\mathrm{B}\left(\frac{n+q+4}{n+p+q},\frac{2m+3p}{m+2p}\right)$,

$Q_1=\int\limits_0^l X(x)dx$, $Q_2=\int\limits_0^l X^2(x)dx$, $Q_3=\int\limits_0^l\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\frac{d^2X}{dx^2}X(x)\,dx$,

$Q_4=\int\limits_0^l X^{m+p}(x)(x-l)dx$.

Отже, перше наближення асимптотичного розв'язку крайової задачі (1),(2) запишеться у вигляді

$$u_{(1)}(x,t) = a \cdot ca\left(\frac{q}{n+q}, \frac{m+p}{q}, \nu(a)\,x\right) \cdot sa\left(\frac{n+q}{p}, \frac{p}{m+p}, \varphi\right),$$

а амплітуда a і фаза φ задаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = w(a)\,.$$

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.:Наука. 1974. 504с. 2. Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы. //ЖТФ. 1934. 4. Вып.1. С.144-157. 3. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.К.: Вища школа. 1976. 589с. 4. Сеник П.М. Про *Ateb*-функції. //ДАН УРСР. Сер.А. 1968. №1. С.23-26.

Стаття надійшла до редколегії 24.09.97

УДК 517.7:534.111

Х.Т.Дрогомирецька

Про інтегрування спеціальних *Ateb*-функцій

Спеціальні *Ateb*-функції $[2,3]$ є оберненням неповної *Beta*-функції. *Ateb*-синус $sa(\overline{n}, \overline{m}, w)$ та *Ateb*-косинус $ca(\overline{m}, \overline{n}, w)$ ($\overline{m} = \dfrac{2\nu_1^{*}+1}{2\nu_2^{*}+1}, \overline{n} = \dfrac{2\nu_1^{**}+1}{2\nu_2^{**}+1}$ $\left(\nu_1^{*}, \nu_1^{**}, \nu_2^{*}, \nu_2^{**} = 0,1,2,\ldots\right)$) є $2\Pi(\overline{m},\overline{n})$-періодичними функціями, де

$$\Pi(\overline{m},\overline{n}) = \Pi = \mathrm{B}\left(\frac{1}{\overline{m}+1}, \frac{1}{\overline{n}+1}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{\overline{n}}{\overline{n}+1}}(1-t)^{-\frac{\overline{m}}{\overline{m}+1}}, \tag{1}$$

що пов'язані між собою тотожністю

$$[ca(\overline{m},\overline{n},w)]^{\overline{m}+1} + [sa(\overline{n},\overline{m},w)]^{\overline{n}+1} = 1 \tag{2}$$

та диференціюються згідно правил

$$\frac{dsa(\overline{n},\overline{m},w)}{dw} = \frac{2}{\overline{n}+1}[ca(\overline{m},n,w)]^{\overline{m}},$$

$$\frac{dca(\overline{m},\overline{n},w)}{dw} = -\frac{2}{\overline{m}+1}[sa(\overline{n},\overline{m},w)]^{n}. \tag{3}$$