$$u_{(1)}(x,t) = a \cdot ca\left(\frac{q}{n+q}, \frac{m+p}{q}, \nu(a)\,x\right) \cdot sa\left(\frac{n+q}{p}, \frac{p}{m+p}, \varphi\right),$$

а амплітуда a і фаза φ задаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \;\; \frac{d\varphi}{dt} = w(a)\,.$$

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.:Наука. 1974. 504с. 2. Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы. //ЖТФ. 1934. 4. Вып.1. С.144-157. 3. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.К.: Вища школа. 1976. 589с. 4. Сеник П.М. Про *Ateb*-функції. //ДАН УРСР. Сер.А. 1968. №1. С.23-26.

Стаття надійшла до редколегії 24.09.97

УДК 517.7:534.111

Х.Т.Дрогомирецька

Про інтегрування спеціальних *Ateb*-функцій

Спеціальні *Ateb*-функції $[2,3]$ є оберненням неповної *Beta*-функції. *Ateb*-синус $sa(\bar{n}, \bar{m}, w)$ та *Ateb*-косинус $ca(\bar{m}, \bar{n}, w)$ ($\bar{m} = \dfrac{2\nu_1^* + 1}{2\nu_2^* + 1}, \bar{n} = \dfrac{2\nu_1^{**} + 1}{2\nu_2^{**} + 1}$ $\left(\nu_1^*, \nu_1^{**}, \nu_2^*, \nu_2^{**} = 0, 1, 2, \ldots\right)$) є $2\Pi(\bar{m},\bar{n})$-періодичними функціями, де

$$\Pi(\bar{m},\bar{n}) = \Pi = \mathrm{B}\left(\frac{1}{\bar{m}+1}, \frac{1}{\bar{n}+1}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}} (1-t)^{-\frac{\bar{m}}{\bar{m}+1}}, \tag{1}$$

що пов'язані між собою тотожністю

$$[ca(\bar{m},\bar{n},w)]^{\bar{m}+1} + [sa(\bar{n},\bar{m},w)]^{\bar{n}+1} = 1 \tag{2}$$

та диференціюються згідно правил

$$\frac{dsa(\bar{n},\bar{m},w)}{dw} = \frac{2}{\bar{n}+1}[ca(\bar{m},n,w)]^{\bar{m}},$$

$$\frac{dca(\bar{m},\bar{n},w)}{dw} = -\frac{2}{\bar{m}+1}[sa(\bar{n},\bar{m},w)]^{n}. \tag{3}$$

Частковим випадком спеціальних *Ateb*-функцій ($\overline{m}=\overline{n}=1$) є звичайні тригонометричні функції $\sin w, \cos w$.

Спеціальні *Ateb* -функції є інтегральними, адже вони є обернеными до функцій, що виражаються через інтеграли від простих елементарних функцій. Ця обставина робить проблематичним процес інтегрування в квадратурах виразів, що містять спеціальні *Ateb*-функції.

Зупинимося на процесі знаходження означеного інтеграла на проміжку [0; 2П] від добутку степенів *Ateb* -функцій. **Теорема:**

$$\int_0^{2\Pi}(sa(\overline{n},\overline{m},w))^s(ca(\overline{m},\overline{n},w))^l\,dw = \\ =\frac{1}{2}(1+(-1)^s+(-1)^l+(-1)^{l+s})B\left(\frac{s+1}{\overline{n}+1},\frac{l+1}{\overline{m}+1}\right), \tag{4}$$

де s, l є числами виду $\dfrac{p}{q}$ $\left(p\in Z,\quad q=2q_1+1,\quad q_1\in N\right)$.

Доведення. Розіб'ємо інтеграл (4) на суму чотирьох інтегралів

$$\int_a^b(sa(\overline{n},\overline{m},w))^s(ca(\overline{m},\overline{n},w))^l\,dw = \\ =\sum_{k=1}^{4}\int_{\frac{\Pi}{2}(k-1)}^{\frac{\Pi}{2}k}(sa(\overline{n},\overline{m},w))^s(ca(\overline{m},\overline{n},w))^l\,dw. \tag{5}$$

Для знаходження кожного з них визначимо з тотожності (2)

$$ca(\overline{m},\overline{n},w)=\begin{cases}\left(1-(sa(\overline{n},\overline{m},w))^{\overline{n}+1}\right)^{\frac{1}{\overline{m}+1}}, & k=1,4\\ -\left(1-(sa(\overline{n},\overline{m},w))^{\overline{n}+1}\right)^{\frac{1}{\overline{m}+1}}, & k=2,3\end{cases} \tag{6}$$

та, згідно (3),

$$(ca(\overline{m},\overline{n},w))^{\overline{m}}\,dw=\frac{\overline{n}+1}{2}d(sa(\overline{n},\overline{m},w)). \tag{7}$$

Знайдемо перший з інтегралів (5) ($k=1$):

$$J_1=\int_0^{\frac{\Pi}{2}}(sa(\overline{n},\overline{m},w))^s(ca(\overline{m},\overline{n},w))^l\,dw = \\ =\frac{\overline{n}+1}{2}\int_0^{\frac{\Pi}{2}}(sa(\overline{n},\overline{m},w))^s(1-(sa(\overline{n},\overline{m},w))^{\overline{n}+1)})^{\frac{l-\overline{m}}{\overline{m}+1}}\,dsa(\overline{n},\overline{m},w).$$

Проводячи заміну $u=(sa(\bar{n},\bar{m},w))^{\bar{n}+1}$,

$$d\,sa(\bar{n},\bar{m},w)=\begin{cases}\dfrac{1}{\bar{n}+1}u^{-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}, & k=1,2\\ -\dfrac{1}{\bar{n}+1}u^{-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}, & k=3,4.\end{cases} \tag{8}$$

дістанемо

$$J_1=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{s-\bar{n}}{\bar{n}+1}}(1-u)^{\frac{l-\bar{m}}{\bar{m}+1}}du=\frac{1}{2}B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1},\frac{l+1}{\bar{m}+1}\right). \tag{9}$$

Аналогічно, враховуючи (6), (8), матимемо

$$J_2=\frac{(-1)^l}{2}B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1},\frac{l+1}{\bar{m}+1}\right), \tag{10}$$

$$J_3=\frac{(-1)^{l+s}}{2}B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1},\frac{l+1}{\bar{m}+1}\right), \tag{11}$$

$$J_4=\frac{(-1)^s}{2}B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1},\frac{l+1}{\bar{m}+1}\right) \tag{12}$$

Підсумовуючи (9)-(12), дістанемо формулу(4). **Теорему доведено**.

Слід відмітити, що аналогічно можна знайти інтеграл від добутку степенів *Ateb*-функцій на довільному проміжку $(a,\ b)$, який буде виражатись через неповну *Beta*-функцію.

При $\bar{m}=\bar{n}=1$ отримаємо відому $[1]$ формулу інтегрування добутку степенів тригонометричних функцій

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin w)^s(\cos w)^l dw=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{s+1}{2},\frac{l+1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l+2}{2}\right)}.$$

1. Бронштейн И.Н., Семедяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.:Наука. 1981. 523 с. 2. Сеник П.М. Обернення неповної *Beta*-функції. //УМЖ. 1969. 21. .№3. С. 325-333. 3. Сеник П.М. Про *Ateb*-функції. //ДАН УРСР. Сер.А. 1968. №1. С. 23-26.

Стаття надійшла до редколегії 1.10.97