

ISSN 0201-758X.

ISSN 0320-6572.

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

46



1997

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

**Львівський державний університет
імені Івана Франка**

**ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 46

**ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Львів
Видавництво «Світ»
1997

У Віснику вміщені статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язання рівнянь математичної фізики і задач оптимізації та програмного забезпечення ПЕОМ.

Для наукових працівників, викладачів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. Г.А.Шинкаренко (відп. ред.), канд. фіз.-мат. наук, доц. Ю.М.Щербина (відп. секр.), канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Я.Бартіш, д-р фіз.-мат. наук, проф. М.М.Войтович, д-р фіз.-мат. наук, проф. Я.Г.Савула, д-р фіз.-мат. наук, проф. Г.Г.Цегелик.

Відповідальний за випуск доц. Ю.М.Щербина.

Адреса редколегії:
290000 Львів, вул Університетська, 1
Університет, кафедра теорії оптимальних процесів
Тел: 79-47-91

Я. Г. Савула, О. Г. Шинкаренко

Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема

Вступ. Останнім часом багато уваги приділяється розробці ефективних чисельних схем для побудови наближених розв'язків задач міграції домішок з домінуючою конвекцією [1-7]. У такому випадку розв'язки задач можуть мати внутрішні та приміжеві шари – дуже вузькі області, де самі розв'язки та їх градієнти різко змінюються. Внаслідок цього, чисельні розв'язки, побудовані за схемою Гальоркіна, де параметр дискретизації занадто великий, щоб врахувати всі ці шари, можуть сильно осцилювати у всій області визначення. Щоб досягнути задовільної апроксимації, потрібно використовувати значення параметру дискретизації співрозмірні відношенню між дифузією та конвекцією. У багатьох випадках такий підхід приводить до величезної кількості степенів свободи і, таким чином, до неможливості ефективного відшукування чисельного розв'язку.

Тому багатьма авторами запропоновано різні протипотокові схеми методу скінченних елементів (МСЕ) (див. напр. [4, 5]), які базуються на додаванні до вихідної чисельної схеми певної кількості штучної дифузії в напрямку потоку. Найбільшого поширення набули протипотокова схема методу Петрова – Гальоркіна та підхід що базується на понятті функцій-бульбашок. Останні дослідження [3] свідчать, що ці підходи є еквівалентними.

Дана праця демонструє відшукування наближених розв'язків варіаційних задач міграції домішок за допомогою протипотокової схеми МСЕ з використанням функцій-бульбашок. Описується математичне підґрунтя протипотокової схеми, а також наводяться результати розв'язування класичних тестових прикладів.

Варіаційна задача міграції домішок. Для простоти розглянемо стаціонарну задачу поширення пасивної домішки в нестисливому суцільному середовищі, яке займає двовимірну область $\Omega \subset R^2$ з ліпшіцевою границею Γ та зовнішньою нормаллю до неї $\nu = \{\nu_i\}_{i=1}^2$. Нехай рух частинок цього середовища описується відомим вектором швидкостей $w = \{w_i\}_{i=1}^2$. Тоді процес міграції домішки буде описува-

тись наступною крайовою задачею:

$$\begin{cases} L\phi = \mathbf{w} \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) + \sigma \phi = f & \text{в } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{на } \Gamma_\phi, \quad \Gamma_\phi \supset \{x \in \Gamma \mid \mathbf{w} \cdot \nu < 0\}, \\ -(\mu \nabla \phi) \cdot \nu = \alpha(\phi - \phi_c) & \text{на } \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\phi \end{cases} \quad (1)$$

Тут $\phi = \phi(\mathbf{x})$ – шукана концентрація домішки, $\mu = \{\mu_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^p$ – симетрична додатно визначена матриця коефіцієнтів дифузії, $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ – коефіцієнт біохімічного розпаду, $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ – коефіцієнт обміну з навколишнім середовищем, $f = f(\mathbf{x})$, $\phi_c = \phi_c(\mathbf{x})$ – інтенсивності джерел домішки в області Ω та на межі Γ відповідно. Більш загальна постановка задачі про перенесення та дифузію домішок приведена в [1, 2].

Ввівши функціональні простори

$$H = L^2(\Omega), W = H(\text{div}; \Omega), V = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \psi(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\phi\},$$

сформулюємо відповідну (1) варіаційну задачу міграції субстанції [1,2]

$$\begin{cases} \text{задано } \phi_c \in H, \quad \mathbf{w} \in W, \quad l \in V' \\ \text{знайти } \phi \in V \text{ таку, що} \\ b(\mathbf{w}; \phi, \psi) + a(\phi, \psi) = \langle l, \psi \rangle \quad \forall \psi \in V. \end{cases} \quad (2)$$

Тут

$$\begin{aligned} b(\mathbf{w}; \phi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_i \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \phi \psi \mathbf{w} \cdot \nu d\gamma, \\ a(\phi, \psi) &= \int_{\Omega} \left(\mu_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sigma \phi \psi \right) dx + \int_{\Gamma_q} \alpha \phi \psi d\gamma, \\ \langle l, \psi \rangle &= \int_{\Omega} f \psi dx + \int_{\Gamma_q} \alpha \phi_c \psi d\gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Як характеристику впливу конвекції та дифузії на процес розповсюдження домішки введемо число Пекле $Pe = \text{diam}(\Omega) \|\mathbf{w}\| / \|\mu\|$. При домінуючій конвекції ($Pe \rightarrow \infty$) еліптичне рівняння (1) вироджується в рівняння першого порядку гіперболічного типу.

Задачу (2) будемо розв'язувати за допомогою МСЕ з використанням лінійних апроксимацій на трикутниках. Нехай $T_h = \{\Omega_e\}_e$ – деяке розбиття області Ω на трикутні скінченні елементи, де $h = \max_e \text{diam}(\Omega_e)$; тоді простір апроксимацій V_L буде мати вигляд

$$V_L = \{ \psi \in H^1(\Omega) \mid \psi(x) = 0, x \in \Gamma_\phi, \psi - \text{лінійна на } \forall \Omega_e \}.$$

Протипотокова схема МСЕ. Ефект стабілізації за рахунок модифікації вихідної білінійної форми задачі (2) може бути отриманий за допомогою розширення простору апроксимацій наступним чином. Для кожного елемента Ω_e визначимо простір функцій-бульбашок:

$B_e = H_0^1(\Omega_e)$ та простір $V_B = \bigoplus_e B_e$. Будемо шукати розв'язок задачі (2) у просторі $V_h = V_L \oplus V_B$.

Таким чином, довільний елемент $\psi_h \in V_h$ може бути поданий у вигляді

$$\psi_h = \psi_L + \psi_B \in V_L \oplus V_B, \text{ а } \psi_B = \sum_e \psi_{B,e}, \psi_{B,e} \in B_e.$$

Тоді варіаційну задачу (2) можна записати наступним чином на просторі V_h

$$\begin{cases} \text{знайти } \phi_h = \phi_L + \phi_B \in V_h \text{ таку, що} \\ b(\mathbf{w}; \phi_L + \phi_B, \psi_L) + a(\phi_L + \phi_B, \psi_L) = \langle l, \psi_L \rangle \quad \forall \psi_L \in V_L, \\ b(\mathbf{w}; \phi_L + \phi_{B,e}, \psi_{B,e})_e + a(\phi_L + \phi_{B,e}, \psi_{B,e})_e = \\ = \langle l, \psi_{B,e} \rangle_e \quad \forall \psi_{B,e} \in V_{B,e}. \end{cases} \quad (4)$$

Тут індекс $(\cdot)_e$ означає, що всі інтеграли білінійних форм та функціоналу з (3) розглядається на скінченному елементі Ω_e .

Перше рівняння задачі (4) можна переписати у вигляді

$$b(\mathbf{w}; \phi_L, \psi_L) + a(\phi_L, \psi_L) + \sum_e [b(\mathbf{w}; \phi_{B,e}, \psi_L) + a(\phi_{B,e}, \psi_L)]_e = \langle l, \psi_L \rangle \quad (5)$$

Нехай L_e^* – лінійний оператор, спряжений до L на Ω_e (з нульовими крайовими умовами на $\partial\Omega_e$). Тоді, враховуючи, що

$$b(\mathbf{w}; u, v)_e + a(u, v)_e = (Lu, v)_e = (u, L_e^* v)_e, \quad (6)$$

отримаємо

$$\sum_e [b(\mathbf{w}; \phi_{B,e}, \psi_L) + a(\phi_{B,e}, \psi_L)]_e = \sum_e (\phi_{B,e}, L_e^* \psi_L)_e.$$

Тепер використаємо друге рівняння задачі (4), щоб виразити $\phi_{B,e}$ через ϕ_L . Враховуючи білінійність форм $a(\cdot, \cdot)$ та $b(\cdot, \cdot)$, можемо записати

$$\begin{aligned} b(\mathbf{w}; \phi_{B,e}, \psi_{B,e})_e + a(\phi_{B,e}, \psi_{B,e})_e = \\ = -[b(\mathbf{w}; \phi_L, \psi_{B,e}) + a(\phi_L, \psi_{B,e}) - \langle l, \psi_{B,e} \rangle]_e \end{aligned}$$

або ж

$$\begin{cases} L\phi_{B,e} = -[L\phi_L - f] & \text{в } \Omega_e, \\ \phi_{B,e} = 0 & \text{на } \partial\Omega_e. \end{cases} \quad (7)$$

Для кожного ϕ_L задача (7) має єдиний розв'язок $\phi_{B,e} \in B_e$, який можна знайти як

$$\phi_{B,e} = M_e(L\phi_L - f), \quad (8)$$

де M_e – обмежений оператор з $V'(\Omega_e) \mapsto B_e$. Підставляючи (8) в (5) і враховуючи співвідношення (6), отримаємо:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{w}; \phi_L, \psi_L) + a(\phi_L, \psi_L) + \\ + \sum_e (M_e(L\phi_L - f), L_e^* \psi_L) = \langle l, \psi_L \rangle \quad \forall \psi_L \in V_L. \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що коефіцієнти рівняння є кусково постійними на Ω_e , а V_L – простір кусково лінійних функцій, отримаємо остаточний вигляд протипотокової модифікації вихідної варіаційної задачі (2) при $\sigma = 0$:

$$\begin{cases} \text{знайти } \phi_L \in V_L \text{ таку, що} \\ b(\mathbf{w}; \phi_L, \psi_L) + a(\phi_L, \psi_L) + \\ + \sum_e \tau_e \int_{\Omega_e} (\mathbf{w} \cdot \nabla \phi_L - f)(\mathbf{w} \cdot \nabla \psi_L) dx = \langle l, \psi_L \rangle \quad \forall \psi_L \in V_L \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{тут } \tau_e = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} M_e(-1) dx.$$

Враховуючи (8), бачимо, що $M_e(-1) = b_e(x)$, де b_e – розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} Lb_e = 1 & \text{в } \Omega_e, \\ b_e = 0 & \text{на } \partial\Omega_e. \end{cases} \quad (10)$$

При $\|\mathbf{w}\|_{\Omega_e} h_e \gg \|\mu\|_{\Omega_e}$ розв'язок задачі (10) буде мати вигляд піраміди з однією (або двома) майже вертикальними гранями. Решта граней буде мати нахил $1/\|\mathbf{w}\|_{\Omega_e}$ у напрямку $\mathbf{w}|_{\Omega_e}$. Тому, якщо прийняти за $\hat{h}_e$ найдовший відрізок Ω_e паралельний $\mathbf{w}|_{\Omega_e}$, отримаємо

$$\int_{\Omega_e} b_e dx \approx \text{об'єм піраміди} = \frac{|\Omega_e|}{3} \frac{\hat{h}_e}{\|\mathbf{w}\|_{\Omega_e}} \Rightarrow \tau_e \approx \frac{\hat{h}_e}{3 \|\mathbf{w}\|_{\Omega_e}}.$$

Більш детальний опис підходу до стабілізації чисельних розв'язків задач міграції, який базується на використанні функцій-бульбашок приведений у працях [3, 4].

Чисельні приклади (задача Сміта і Хаттона). Цей класичний тест [7] характеризується досить складним полем швидкостей та різкими градієнтами шуканої концентрації домішки. Поле швидкостей задається аналітично у вигляді

$$\mathbf{w}(x, y) = 2y(1-x^2)\mathbf{i} - 2x(1-y^2)\mathbf{j}$$

в області $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$. Джерела субстанції всередині області відсутні, на границі Γ задаються наступні крайові умови

$$\phi(x, 0) = 1 + \tanh((2x+1)\alpha), \quad y = 0, \quad -1 \leq x \leq 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\phi(x, y) = 1 - \tanh \alpha \quad \text{на решті границі.}$$

Тут параметр α набуває значення 10. Ми розглянемо два випадки: $\mu_{ij} = \text{const} = \mu = 10^{-1}$ та $\mu = 10^{-6}$ (див. рис. 1, 2 відповідно).

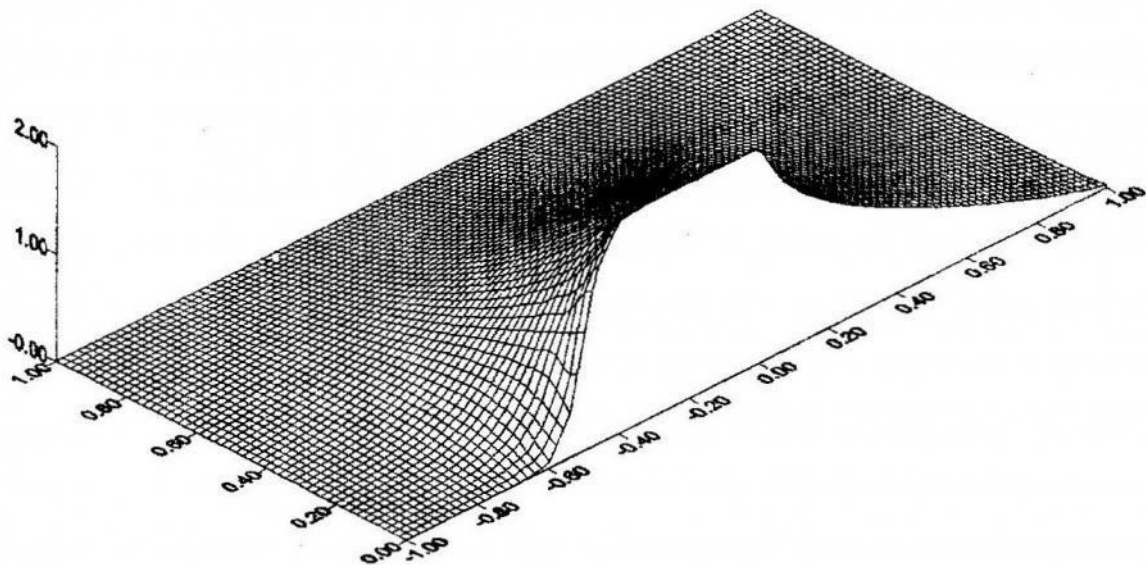


Рис. 1.

У першому випадку домінує дифузія. Конвекція практично не має впливу на розподіл концентрації домішки в області. У другому випадку домінує конвективне перенесення, дифузія практично відсутня.

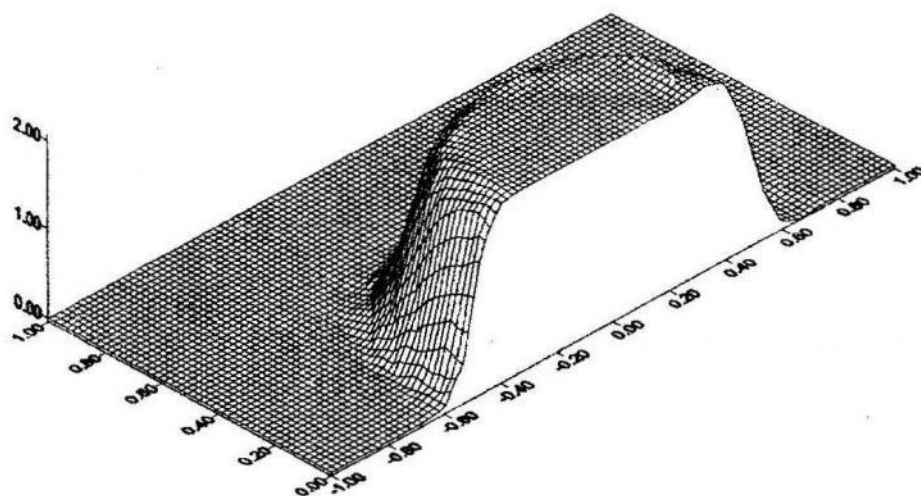


Рис. 2.

Яскраво видно різкі зміни значень концентрації в області внутрішнього шару, так як не відбувається вигладжування розв'язку внаслідок дифузії. Результати обчислень погоджуються з результатами праці [7].

Чисельні приклади (чиста конвекція). У цьому прикладі покладемо $\mu_{ij} = 0$ і будемо розв'язувати однорідне гіперболічне рівняння першого порядку в області $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$. Вектор швидкостей має вигляд

$$\mathbf{w} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \theta = \pi/6.$$

Крайові умови ставимо лише на частині межі $\Gamma = \{(x, y) | x = -1, y \in (-1, 1)\} \cup \{(x, y) | y = -1, x \in (-1, 1)\}$ наступним чином:

$$\begin{cases} \phi = 0, y = -1, & x \in (-1, 1), \\ \phi = 0, x = -1, & y \in (-1, -\sin \theta), \\ \phi = 1, x = -1, & y \in [-\sin \theta, 1) \end{cases}$$

Отже, на границі розв'язок терпить розрив зі стрибком, рівним 1. На рис. 3 зображено результати обчислень на спеціальній сітці, де границі елементів розміщені вздовж лінії розриву (її напрямок задає вектор швидкостей).

Можна спостерігати незначне вигладжування розв'язку всередині області, не зважаючи на відсутність фізичної дифузії. Це відбувається через присутність штучної дифузії чисельної схеми. Результати проведених обчислень добре погоджуються з результатами праці [6].

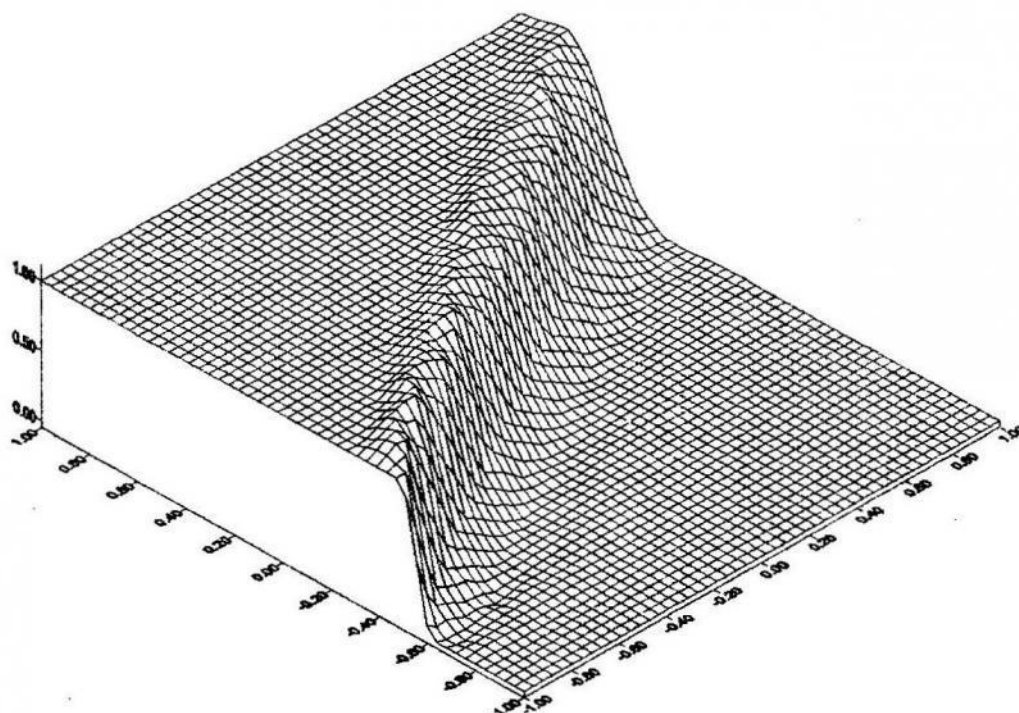


Рис. 3

Таким чином, вищенаведені приклади свідчать про те, що описана вище протипотокова схема МСЕ може ефективно застосовуватись як для розв'язування задач міграції домішок з великими числами Пекле, так і задач, які описують чисту конвекцію.

1.Зубов В.М.,Терлецька С.Ю.,Шинкаренко Г.А. Розв'язуваність та апроксимація узагальнених розв'язків початково-крайових задач міграції атмосферних домішок //Вісн. Львів. ун-ту сер. мех.-мат. вип. 41, (1995) с.62-70. 2. Шинкаренко Г.А., Шинкаренко О.Г. Чисельне дослідження варіаційних задач міграції пасивних домішок //Вісн. Львів. ун-ту сер. мех.-мат. вип. 44, (1996) с.37-45. 3. Brezzi F., et. al. $b = \int g$. //Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 145 (1997), pp. 329-339. 4. Brezzi F., et. al. Pseudo Residual-Free Bubbles and Stabilized Methods //Comput. Meth. Appl. Sciences, 1996, pp.3-8. 5. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulation for Convective Dominated Flows with a Particular emphasis on the Incompressible Navier – Stokes Equations //Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 32 (1982), pp. 199-259. 6. Huang Y.-H. Higher-Order Exponential Difference Schemes for the Computations of the Steady Convection-Diffusion Equations //J. Comput. Physics, 129 (1996) pp. 134-159. 7. Paillere H. et. al. Multidimensional Upwind Residual Distribution Schemes for Convection-Diffusion Equation //Int. J. Numer. Meth. Fluids, 23 (1996), p. 923-936.

Стаття надійшла до редакції 22.10.97

Копитко М.Ф., Савула Я.Г.

Алгоритмічний підхід до дослідження задач пружного деформування оболонок

При чисельному дослідженні задач механіки деформування просторових тіл, один з характерних вимірів яких є значно менший від інших, у тривимірній постановці виникають значні труднощі. Підхід, який пов'язаний з використанням різних теорій оболонок, є обмежений геометричними формами середовищ та прийнятими гіпотезами стосовно шуканих функцій.

У зв'язку з цим у даній роботі пропонується підхід до дослідження задач механіки деформування оболонкових тіл, який має такі характерні особливості:

- використовуються тривимірні рівняння теорії пружності в криволінійній системі координат;
- розв'язки відповідної задачі будуються напіваналітичним методом скінченних елементів шляхом використання подання шуканих функцій за однією змінною у вигляді сум за поліномами Лежандра.

Використання напіваналітичного методу скінченних елементів має давню історію [2,3,4,6], але, в основному, він застосовувався при розв'язуванні неосесиметричних задач для тіл обертання, оболонок нульової гаусової кривини і в ролі базисних функцій вибирались тригонометричні функції. В останні роки опубліковано роботи І.Бабушки, наприклад [8], в яких запропонована і розвивається h -р версія методу скінченних елементів. Відмінність запропонованого авторами підходу від попереднього полягає в поданні шуканих функцій у вигляді ряду за поліномами Лежандра не в локальних вузлах скінченного елемента, а в кожному вузлі скінченноелементної сітки.

Розглянемо задачу деформування просторових тіл, геометрію яких можна описати в криволінійній системі координат, побудованій таким способом. Нехай

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega \quad (1)$$

векторне рівняння деякої поверхні в просторі, віднесеної до ліній головних кривин. У кожній точці поверхні введемо ортогональний трієдр

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{A_1} \bar{r}_{\alpha_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{A_2} \bar{r}_{\alpha_2}, \quad \bar{e}_n = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2, \quad (2)$$

де $\bar{r}_{\alpha_1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1}$, $\bar{r}_{\alpha_2} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2}$; $A_1 = \sqrt{\bar{r}_{\alpha_1} \bar{r}_{\alpha_1}}$, $A_2 = \sqrt{\bar{r}_{\alpha_2} \bar{r}_{\alpha_2}}$ – коефіцієнти

Ляме поверхні (1).

Радіус-вектор довільної точки тіла подамо у вигляді

$$\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2) \alpha_3, \quad (3)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \quad h^-(\alpha_1, \alpha_2) \leq \alpha_3 \leq h^+(\alpha_1, \alpha_2),$$

де $\bar{n}$ – нормаль до поверхні (1).

Введемо вектори, елементи яких складаються з переміщень довільної точки тіла та компонентів тензора деформації Коші і тензора напружень :

$$\begin{aligned} u &= [u_1, u_2, u_3]^T, \\ \varepsilon &= [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}]^T, \\ \sigma &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Зв'язок між вектором переміщень u і вектором деформацій ε у вибраній нами ортогональній системі координат запишеться у вигляді

$$\varepsilon = D_A u, \quad (5)$$

де

$$D_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 0 & \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \\ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ 0 & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} & 0 & \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

У формулі (6) через H_i позначені коефіцієнти Ляме, які для введеної системи координат мають вигляд

$$H_1 = A_1(1 + k_1 \alpha_3), \quad H_2 = A_2(1 + k_2 \alpha_3), \quad H_3 = 1, \quad (7)$$

де $k_1(\alpha_1, \alpha_2), k_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – головні кривизни поверхні (1).

Подано фізичний закон, який зв'язує напруження з деформаціями співвідношенням

$$\sigma = C \varepsilon. \quad (8)$$

У даній роботі він вибирається для матеріалу з однією площинною симетрією. У цьому випадку матриця C у формулі (8) складається з 13 незалежних компонентів.

Розглянемо задачі статичної лінійної теорії пружності, які в варіаційній постановці зводяться до мінімізації функціоналу Лагранжа

$$F(u) = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma^T \varepsilon dV - \iint_{S_i} \sigma_n u dS - \iint_{S^+} \sigma_n u dS - \iint_{S^-} \sigma_n u dS, \quad (9)$$

на множині функцій $u \in W_2^{(1)}(u)$, які задовільняють головні граничні умови

$$u = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S_i. \quad (10)$$

У формулі (9) V -область, яку займає тіло, S_i – бокова поверхня, $S^\pm$ – лицьові поверхні, $\sigma_n = [\sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \sigma_{3n}]$ – вектор заданих поверхневих навантажень.

Замінюючи в формулі (9) інтегрування за об'ємом, інтегруванням по поверхні і записуючи інтеграл по поверхні через інтеграл по області, отримаємо новий вигляд функціоналу

$$\begin{aligned} F(u) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_{h^-(\alpha_1, \alpha_2)}^{h^+(\alpha_1, \alpha_2)} \sigma^T \varepsilon A_1 A_2 (1 + k_1 \alpha_3) (1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3 \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - \int_{S_i} \int_{h^-(\alpha_1, \alpha_2)}^{h^+(\alpha_1, \alpha_2)} \sigma_2^0(\alpha_1, \alpha_2^{const}, \alpha_3) u A_1 (1 + k_1 \alpha_3) d\alpha_3 d\alpha_1 - \\ & - \int_{S_2} \int_{h^-(\alpha_1, \alpha_2)}^{h^+(\alpha_1, \alpha_2)} \sigma_1^0(\alpha_1^{const}, \alpha_2, \alpha_3) u A_2 (1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3 d\alpha_2 - \\ & - \iint_{\Omega} [\sigma_3^+ u (1 + k_1 h^+) (1 + k_2 h^+) - \sigma_3^- u (1 + k_1 h^-) (1 + k_2 h^-)] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\sigma_1^0 = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}]_{\alpha_1 = \alpha_1^{const}}$, $\sigma_2^0 = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}]_{\alpha_2 = \alpha_2^{const}}$,
 $\sigma_3^+ = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}]_{\alpha_3 = h^+(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\sigma_3^- = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}]_{\alpha_3 = h^-(\alpha_1, \alpha_2)}$,
 вектори заданих поверхневих напружень, g_1 – крива на боковій поверхні, яка збігається з лінією α_2^{const} , g_2 – крива на боковій поверхні, яка збігається з лінією α_1^{const} .

Використовуючи формули (5) і (8), в функціоналі (11) в першому інтегралі підінтегральний вираз можна переписати відносно вектора переміщень u

$$\sigma^T \varepsilon = \varepsilon^T C^T \varepsilon = u^T D_A^T \varepsilon^T D_A u \quad (12)$$

Таким чином, розв'язування задачі зводиться до відшукування вектора переміщень u , який мінімізує функціонал (11) і задовільняє умови (10).

Пропонується для знаходження розв'язку задачі (11), (10) застосовувати чисельно-аналітичний підхід, який полягає в поданні шуканого розв'язку за координатою α_3 у вигляді скінченної суми за поліномами Лежандра, а в області Ω використовувати схему методу скінченних елементів, раніше запропоновану авторами [5]

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^{M_i} u_i^m(\alpha_1, \alpha_2) P_m(\alpha_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

де $P_m(\alpha_3)$ – поліноми Лежандра, $u_i^m(\alpha_1, \alpha_2)$ – невідомі функції, для апроксимації яких використовуються скінченноелементні апроксимації.

Запропонована вище методика реалізована у вигляді комплексу програм на мові Сі. Її ефективність була досліджена на прикладі розв'язування ряду тестових задач теорії пружності.

Задача 1.

Розглядається задача про плоский напружений стан прямокутної пластини (див. рис. 1) під дією рівномірного навантаження $\sigma_3^+ = [0, 0, 0]_{\alpha_3 = h^+(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\sigma_3^- = [0, 0, 1]_{\alpha_3 = h^-(\alpha_1, \alpha_2)}$, аналітичний розв'язок якої приведено в роботі [7].

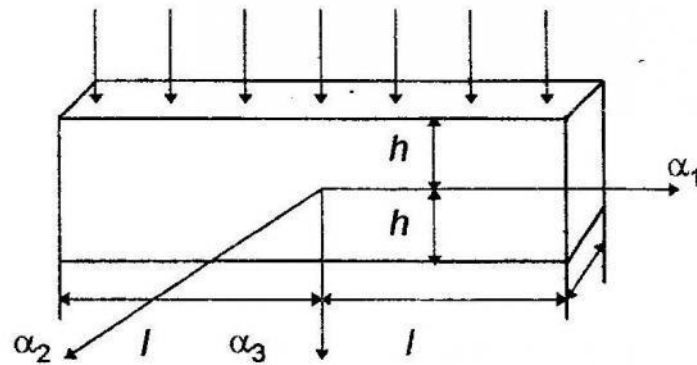


Рис. 1. Плоский напряженный стан пластины.

Для чотирьох скінченних елементів вздовж кординати α_1 і різного значення кількості членів розкладу M_i в формулі (13) вздовж координати α_3 в табл. 1 приведені значення переміщень u_3 при $\alpha_1 = 0$.

Табл. 1. Значення переміщень u_3 в центрі пластины

α_3	$M_1 = 1,$ $M_3 = 0$	$M_1 = 1,$ $M_3 = 2$	$M_1 = 2,$ $M_3 = 3$	$M_1 = 3,$ $M_3 = 4$	анал. розв.
-h	178.75	191.58	192.02	203.61	205.5
0	178.75	184.04	184.04	194.03	196.5
h	178.75	166.76	166.31	177.9	180.5

В табл. 2 приведені значення напружень σ_{11}, σ_{33} в точці $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = -h$.

Табл. 2. Напруження на навантаженій поверхні пластины

	$M_1 = 1,$ $M_3 = 0$	$M_1 = 1,$ $M_3 = 2$	$M_1 = 2,$ $M_3 = 3$	$M_1 = 3,$ $M_3 = 4$	анал. розв.
σ_{11}	-3.03	-3.03	-3.04	-3.04	-3.20
σ_{33}	-0.909	-1.02	-1.02	-1.00	-1.00

Як видно з приведених в табл.1,2 результатів для співвідношення $h/l = 1/2$ при збільшенні членів розкладу в формулі (13) запропонована методика дозволяє отримувати хороші результати як для переміщень так і для напружень.

Задача 2.

На прикладі задачі про папружено-деформований стан нескінченної в напрямі координати α_2 пластини, шарнірно опертої при $\alpha_1 = -l/2, \alpha_1 = l/2$ і навантаженої рівномірним тиском на краї $\alpha_3 = h/2$, досліджувалися питання використання запропонованого підходу до розв'язування задач для тіл з малою відносною товщиною. Ця задача має аналітичний розв'язок в рамках теорії пластин типу Тимошенка. В табл. 3 приведені значення прогину в центрі пластини і папруження σ_{11} в точці $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = h/2$ для значення $M_1 = 1, M_3 = 2$ і чотирьох скінченних елементів вздовж ширини пластини для різних відношень h (розмір вздовж координати α_3) до l (розмір вздовж α_1).

Табл. 3.Значення прогину пластини і напругень для різних відносних товщин

h/l	0.1	0.01	0.001	0.0002
u_3	145.0	$1.4 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^8$	$1.75 \cdot 10^{10}$
w – анал.розв.	146.09	$1.42 \cdot 10^5$	$1.42 \cdot 10^8$	$1.78 \cdot 10^{10}$
σ_{11}	75.6	7400	$7.38 \cdot 10^5$	$1.84 \cdot 10^7$
σ_{11}^{anal}	75.0	7500	$7.5 \cdot 10^5$	$1.88 \cdot 10^7$

Задача 3

Розглянемо задачу про згин квадратної шарнірно опертої плити ($-a \leq \alpha_1 \leq a, -a \leq \alpha_2 \leq a, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2$) під дією синусоїдального навантаження $\sigma_{33} = q_0 \sin(\pi/2a)\alpha_1 \sin(\pi/2a)\alpha_2$. Для такої задачі існує тривимірний розв'язок Б.Ф. Власова [1] .

Для товстої плити ($a/h=2$) в табл. 4 приведені значення переміщення u_3 і напругення в центрі плити ($\alpha_1 = \alpha_2 = a/2$) для різних значень членів розкладу в формулі (13) і 2×2 квадратичних елементів на четвертині плити.

Результати, приведені в табл.4, демонструють можливість дослідження за допомогою даної методики ефекту обтиску лише збільшенням порядку поліномів у формулі (13) без побудови спеціальної теорії оболонок.

Табл. 4. Переміщення і напруження в товстій плиті

$u_3 E / q_0 h$					
α_3 / h	розв'язок [1]	$M_1 = M_2 = 1$ $M_3 = 0$	$M_1 = M_2 = 1$ $M_3 = 2$	$M_i = 3$	$M_i = 4$
-0.5	1.215	0.8909	1.089	1.206	1.217
0.	0.967	0.8909	0.8961	0.9709	0.9648
0.5	0.772	0.8909	0.6910	0.7632	0.7684
σ_{11} / q_0					
-0.5	-1.205	-0.912	-0.962	-1.33	-1.25
0.	-0.022	0.	0.043	0.01	0.097
0.5	0.832	0.912	0.842	0.964	0.872

Як видно із приведених вище результатів дослідження задач 1-3, запропонована методика дозволяє розв'язувати широкий діапазон задач теорії пружності, задаючи певну кількість членів розкладу в формулі (13) і не використовуючи при цьому спеціальних математичних моделей, наприклад, таких як рівняння плоского напруженого стану, згину пластин і згину товстих плит.

1. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестн. Моск. ун-та: Механика и математика. – 1957. – № 2. – С. 25-34. 2. Гуляр А.И., Майборода Е.А., Сахаров А.С. Эффективность полуаналитического метода конечных элементов при расчете призматических тел переменного сечения // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1987. – Вып. 52. – С. 64-67. 3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с. 4. Копытко М.Ф., Савула Я.Г. Об одном возможном расширении класса оболочек нулевой гауссовой кривизны // Проблемы машиностроения. – 1982. – № 17. – С. 61-65. 5. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с резными поверхностями. – Львов: Вища школа, 1989. – 172 с. 6. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Методы исследования термо-вязкопластического деформирования трехмерных элементов конструкций (Обзор) // Прикладная механика. – 1993. – 29, № 9. – С.3-19. 7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с. 8. Babuška I., Likang L. The problem of plate modeling: Theoretical and computational results // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1992. – № 100. – P. 249-273.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.97

п'єзоелектрики та визначення білінійних форм і лінійних функціоналів, що входять у рівняння задачі (1.1), наведено в праці [1], звідки і запозичено вжиті нами позначення. В цій же статті встановлено достатні (і цілком вживані для практики) умови коректності варіаційної задачі (1.1).

Відзначимо, що білінійна форма $e(p, v)$ описує механізм перетворення механічної енергії в електричну і навпаки (прямий і зворотній п'єзоэффект).

2. Проекційно-сіткова схема. Нехай $\{V_h\}$ та $\{Q_h\}$ – послідовності скінченновимірних підпросторів з V та Q відповідно, причому $\dim V_h = N \rightarrow \infty$, $\dim Q_h = K \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

Для побудови проекційно-сіткової схеми розв'язування задачі (1.1) зафіксуємо базиси $\{v_i\}_{i=1}^N$ та $\{q_n\}_{n=1}^K$ просторів $\{V_h\}$ та $\{Q_h\}$ відповідно і виберемо крок інтегрування в часі $\Delta t = \text{const} > 0$. Тоді для відшукування наближених розв'язків задачі (1.1) скористаємось рекурентною схемою :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t, \gamma = \text{const} > 0, \\ \text{та вектор } (u^j, v^j, p^j) \in R^N \times R^N \times R^K; \\ \text{знайти вектор } (u^{j+1}, v^{j+1}, p^{j+1}) \in R^N \times R^N \times R^K \text{ такий, що} \\ \left[\begin{array}{cc} M + \Delta t \gamma (A + \frac{1}{2} \Delta t C) & -\frac{1}{2} \Delta t E \\ \frac{1}{2} \Delta t E & \Theta + \gamma \Delta t Z \end{array} \right] \begin{bmatrix} v^{j+\frac{1}{2}} \\ p^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} L^j \\ R^j \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{ccc} M + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t A & -\frac{1}{2} \Delta t C & 0 \\ 0 & 0 & \Theta + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t Z \end{array} \right] \begin{bmatrix} v^j \\ u^j \\ p^j \end{bmatrix} \\ v^{j+1} = 2v^{j+\frac{1}{2}} - v^j, \quad u^{j+1} = u^j + \Delta t \gamma v^{j+\frac{1}{2}}, \\ p^{j+1} = 2p^{j+\frac{1}{2}} - p^j, \quad j = 0, 1, \dots, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

складові якої обчислюються згідно правил

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \left\{ m(v_i, v_j) \right\}_{i,j=1}^N, \quad A = \left\{ a(v_i, v_j) \right\}_{i,j=1}^N, \quad C = \left\{ c(v_i, v_j) \right\}_{i,j=1}^N, \\ E = \left\{ e(q_n, v_j) \right\}_{n,j=1}^{KN}, \quad Z = \left\{ z(q_n, q_m) \right\}_{n,m=1}^K, \quad \Theta = \left\{ \Theta(q_n, q_m) \right\}_{n,m=1}^K, \\ L^j = \left\{ \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}, v_i) \rangle \right\}_{i=1}^N, \quad R^j = \left\{ \langle r(t_{j+\frac{1}{2}}, q_n) \rangle \right\}_{n=1}^K. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Схема (2.1) дозволяє знаходити наближені розв'язки $(u_{h\Delta t}, p_{h\Delta t})$ задачі (1.1) у вигляді

$$\begin{cases} u_{h\Delta t}(x, t) = \sum_{i=1}^N \left\{ [1 - \xi^2(t)] u_i^j + \xi^2(t) u_i^{j+1} + \right. \\ \quad \left. + \Delta t [1 - \xi(t)] \xi(t) v_i^j \right\} v_i(x) \\ p_{h\Delta t}(x, t) = \sum_{n=1}^K \left\{ [1 - \xi(t)] p_n^j + \xi(t) p_n^{j+1} \right\} q_n(x) \\ \xi(t) = \frac{1}{\Delta t} (t - t_j) \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Детальний аналіз проекційно-сіткової схеми (2.1) стосовно умов її стійкості та збіжності з побудовою відповідних апіорних оцінок в енергетичних нормах виконано в працях [2,3].

3. Ударне навантаження на п'єзокерамічний стержень. Розглянемо задачу про розподіл в часі електричних і механічних полів в п'єзоелементі з осью поляризації, виготовленого з п'єзокераміки PZT-4, при короткочасному механічному навантаженні. Один кінець стержня жорстко закріплений і заземлений ($u(t, 0) = 0$, $p(t, 0) = 0$), а до іншого прикладається навантаження, яке викликає напруження

$$\hat{\sigma}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/8 T \\ 0, & 1/8 T < t \leq T \end{cases} \quad \text{при } x = L, \quad (3.1)$$

де T – час, протягом якого досліджуються електромеханічні процеси, вибирається таким чином, щоб при переході до безрозмірних змінних значення густини було рівне 1, тобто $T = \sqrt{\rho L^2 / c}$.

При такій постановці обчислювального експерименту білінійні форми і лінійні функціонали в варіаційній задачі (1.1) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} m(u, v) &= \int_0^L \rho u v \, dx; & c(u, v) &= \int_0^L c \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx; \\ a(u, v) &= \int_0^L a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx; & z(p, q) &= \int_0^L z \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} \, dx; \\ e(q, v) &= - \int_0^L e \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx; & \varepsilon(p, q) &= \int_0^L \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} \, dx; \\ \langle l_i, v \rangle &= \int_0^L \rho f v_i \, dx + \hat{\sigma}_i(t) v(L); & \langle r_i, q \rangle &= - \hat{J}_i(t) q(L); \end{aligned} \quad (3.2)$$

тут ρ – густина маси, c – модуль пружності, z – модуль провідності, a – модуль внутрішньої в'язкості, e – модуль п'єзоефекту, ε – модуль діелектричної проникливості.

Крім того, враховуючи, що вплив внутрішньої в'язкості і провідності матеріалу на досліджувані процеси незначний, відповідні білінійні форми $a(\cdot, \cdot)$ і $z(\cdot, \cdot)$ вибирались рівними нулю.

Розв'язуючи задачу за допомогою проекційно-сіткової схеми (2.1), і користуючись кусково-квадратичними апроксимаціями для дискретизації по просторовій змінній, отримаємо значення шуканих величин в дискретні моменти часу t_j .

Таким чином можна відслідкувати, як поширюються хвилі поздовжніх зміщень, швидкості деформацій і напружень вздовж стержня при короткочасному механічному навантаженні (на рис 3.1-3.4 графіки отримані при $N = K = 200$, $\Delta t = 1/800$ і $\gamma = 1/2$ в момент часу $t = 0.30625 T$).

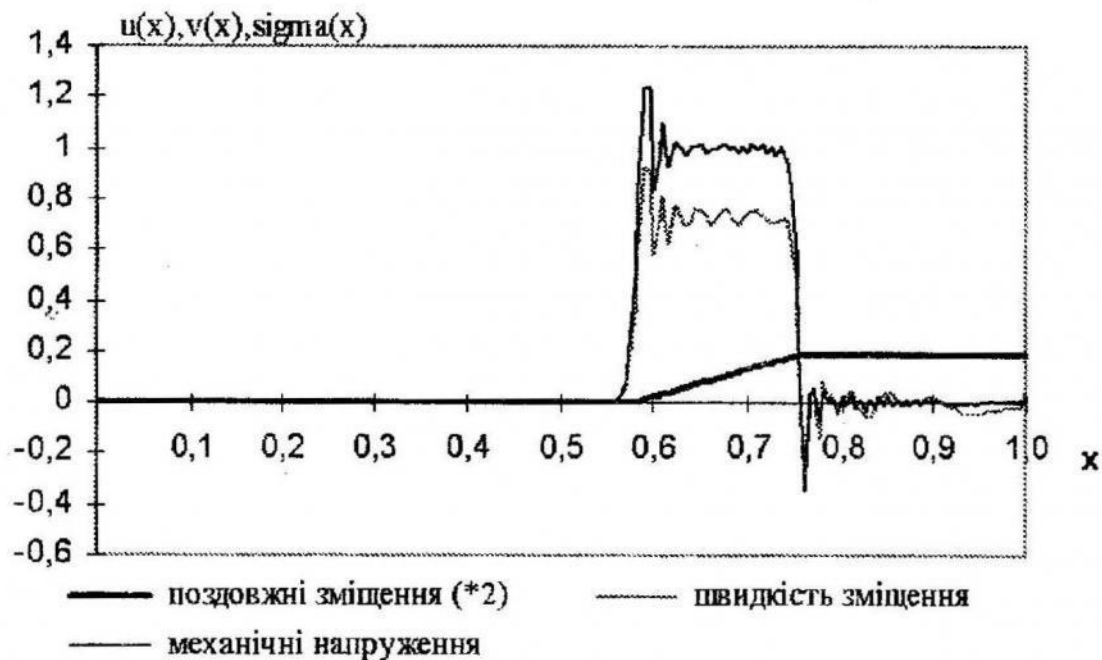


Рис. 3.1

Відзначимо характерну особливість поширення збурень в п'єзоматеріалі – механічні напруження відмінні від нуля лише в тій частині області, де відбувається приріст зміщень. За заднім фронтом хвилі напруження знову стає практично рівним нулю. На рис. 3.1 добре помітно, що в зонах нерегулярності шуканого розв'язку (в околі переднього і заднього фронтів хвилі збурень) проекційно-сіткова схема

породжує нефізичну осциляцію наближених характеристик, похибка якої може досягати 30% основного збурення.

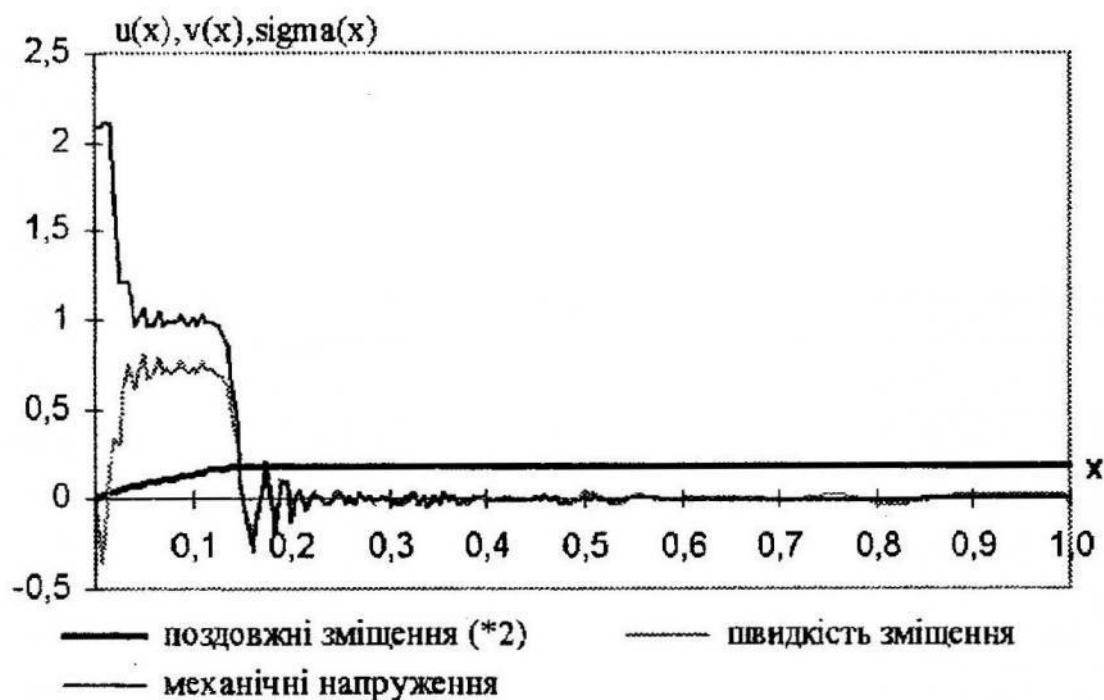


Рис. 3.2.

При підході хвилі збурень до заземленого торця спостерігається різке зростання механічних напружень біля цього краю (рис. 3.2 графіки в момент часу $t = 0.75 T$), що пояснюється незмінністю її фази – пряма і відбита хвиля напружень на границі з жорстким закріпленням не змінює свого знаку. Амплітуда напруження при цьому зростає вдвічі, а швидкість поширення деформацій починає змінювати знак, що в кінцевому рахунку приводить до гальмування точок стержня в околі закріплення.

Введені в рівняннях задачі (1.1) білінійні форми дозволяють обчислювати значення кінетичної, потенціальної енергій і дисипацію енергії у п'єзоелектрику за наступними формулами

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t)|^2 &= \frac{1}{2} m(u'(t), u'(t)), \\
 \|\varphi(t)\|^2 &= \frac{1}{2} \{c(u(t), u(t)) + \varepsilon(p(t), p(t))\}, \\
 \|\varphi(t)\|^2 &= a(u'(t), u'(t)) + z(p(t), p(t)),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

а також побудувати рівняння балансу енергії взаємодії фізико-механічних полів у п'єзоелектрику

$$\frac{d}{dt} \left\{ \|\varphi(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \right\} + \|\varphi(t)\|^2 =$$

$$= \langle l(t), u'(t) \rangle + \langle r(t), p(t) \rangle, \quad \forall t \in (0, T]. \quad (3.4)$$

Перевіряючи виконання енергетичного рівняння можна, оцінити точність отриманих результатів.

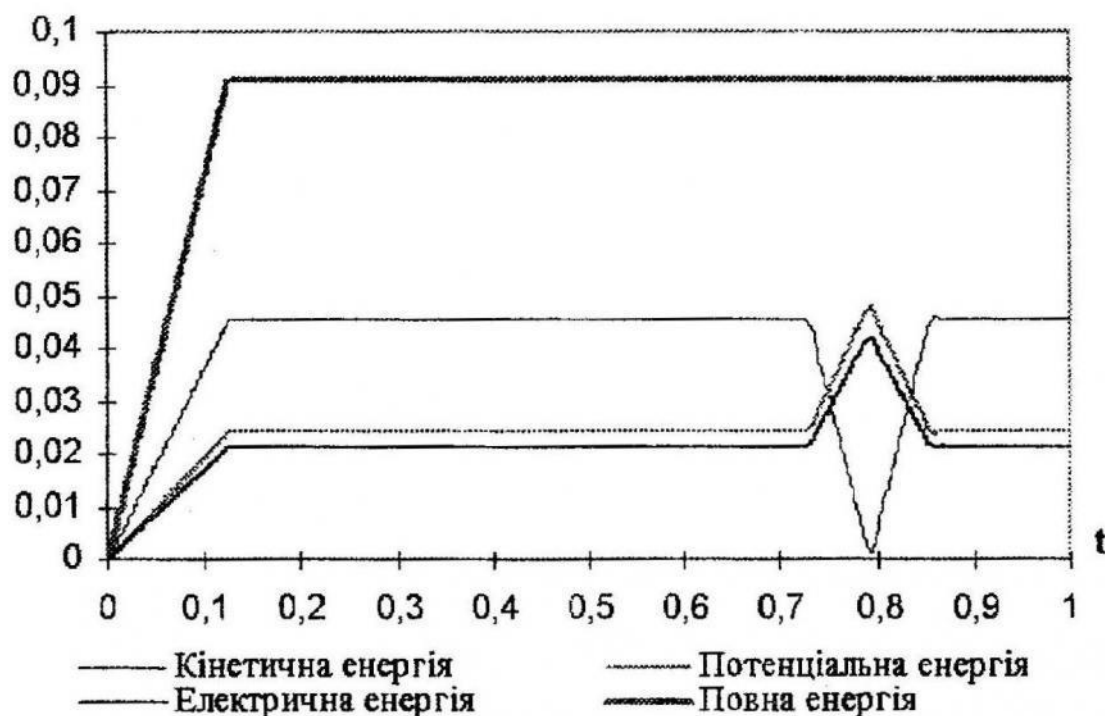
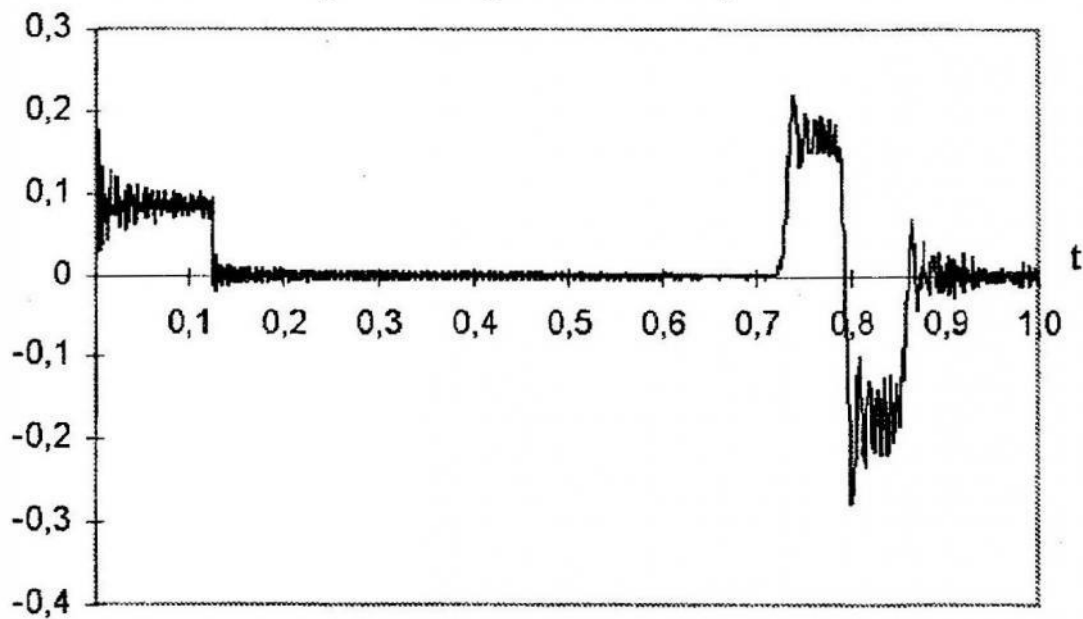


Рис. 3.3

Добре погодження інтегральних характеристик наближених розв'язків можна побачити на рис. 3.3 для всіх моментів часу $t \geq 1/8 T$. Оскільки інтенсивність дисипації енергії рівна нулю – слід очікувати, що втрат енергії в системі немає – це підтверджується незмінністю повної енергії після того, як зникло навантаження.

Зауважимо, що функція $k = k(t) = e(p(t), u'(t))$ встановлює значення динамічного коефіцієнта електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) полів в п'єзоелектрику який виділяє кількість енергії яка, в даний момент може перетворитись з механічної в електричну, і навпаки. Порівнюючи графіки енергій (рис. 3.3) та КЕМЗ (рис. 3.4), можна спостерігати, що при підході хвилі деформацій до заземленого краю КЕМЗ приймає додатні значення, тобто внаслідок зв'язності електричного і механічного полів кінетична енергія перетворюється в електричну та потенціальну. І навпаки, після того як хвиля відбилась – КЕМЗ

стає від'ємним, тобто спостерігається зворотній процес перетворення потенціальної і електричної енергій в кінетичну.



— Коефіцієнт електромеханічного зв'язку

Рис. 3.4

4. Вплив коефіцієнта рекурентної схеми на поведінку розв'язків. Ще однією особливістю процесу перетворення енергій є те, що швидкість такого перетворення при взаємодії хвилі деформацій з жорстко заземленим краєм приблизно в два рази більша ніж в ті моменти часу коли система навантажується ззовні.

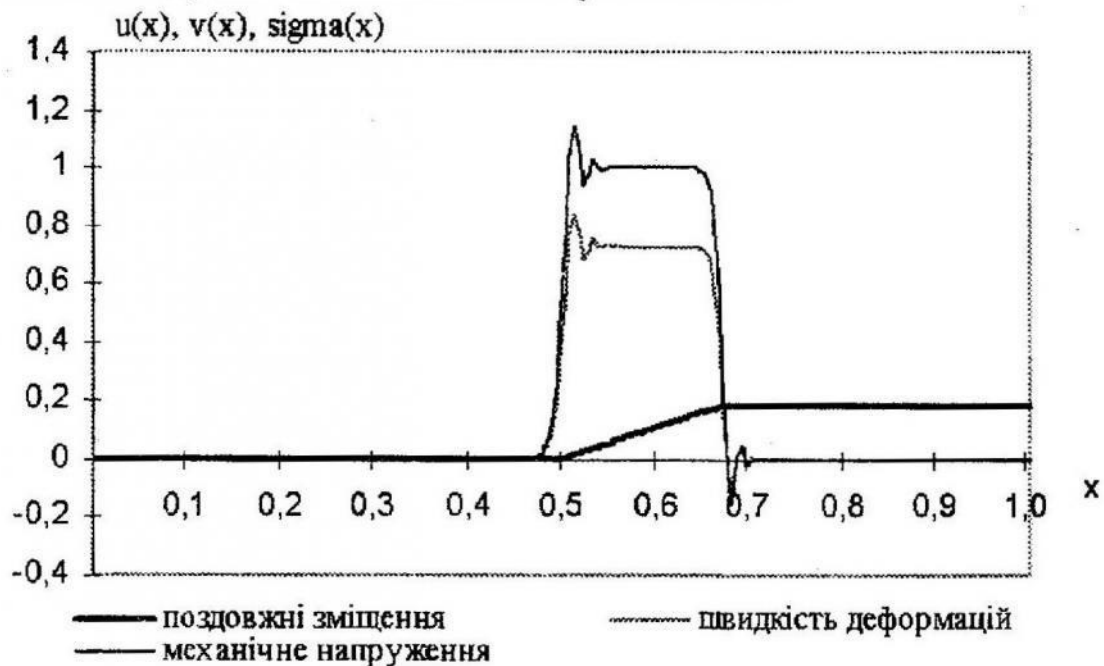


Рис. 4.1

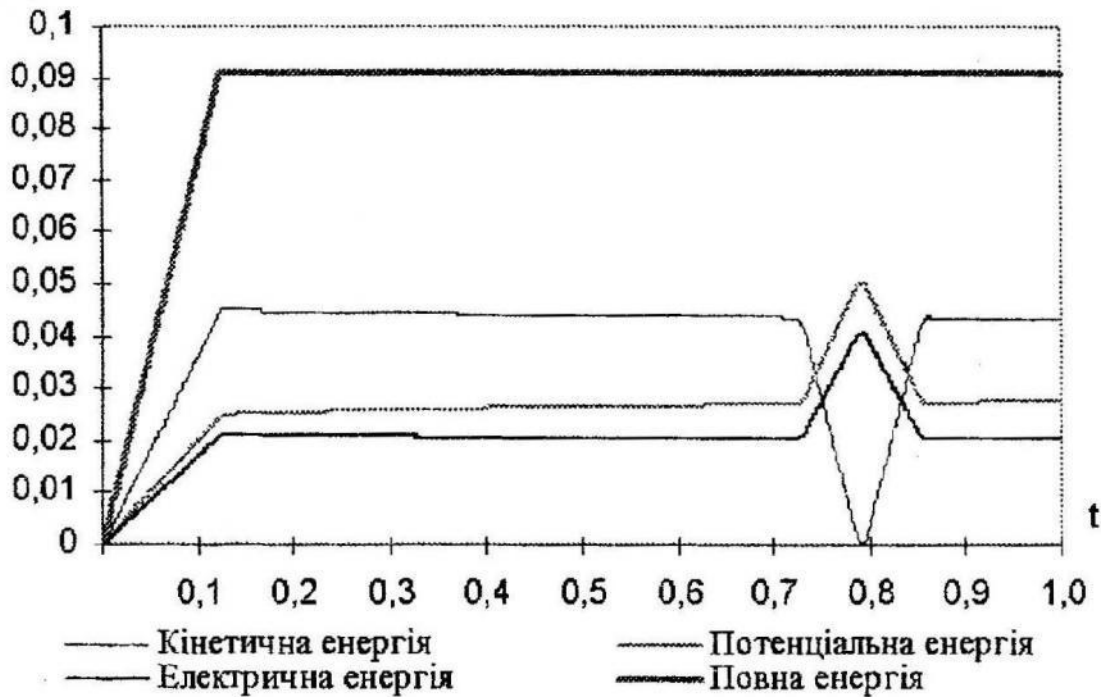


Рис. 4.2

Введений в (2.1) коефіцієнт рекурентної схеми γ , дає можливість обчислювати наближені розв'язки з більшою точністю. В праці [8] показано, що розв'язки задачі допускають фізичну інтерпретацію лише при $1/2 \leq \gamma \leq 1$. Як видно з рис. 4.1 (результати отримані при $N = K = 200$, $\Delta t = 1/800$, $\gamma = 0.55$) – із збільшенням коефіцієнта γ графіки механічного напруження і швидкості деформацій згладжуються.

Вплив цього коефіцієнта добре видно і на графіку енергій (рис. 4.2. При $\gamma > 1/2$ в обчислювальній схемі з'являється ще один доданок – дисипативний член, який врівноважує зміни в енергетичних характеристиках і приводить до того, що повна енергія зберігає своє постійне значення, незважаючи на зміни величин своїх складових.

1. Шинкаренко Г.А. Постановка та розв'язуваність початково-крайових задач електроупругості // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип.33 – с.10-16. 2. Шинкаренко Г.А. Апроксимація варіаційних задач електроупругості. Напівдискретизація Гальоркіна // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. – с.50-56. 3. Шинкаренко Г.А. Апроксимація варіаційних задач електроупругості. Однокрокова схема інтегрування в часі // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.1991. Вип. 35. – с.56-62. 4. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьроэлектричества. I. Постановка задач и анализ устано-

вившихся вынужденных колебаний. П. Дифференциальные уравнения. Т.29, 1993, N7 – с.1252-1260. 5. Шинкаренко Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. //Дискретизация и разрешимость нестационарных задач// Дифференциальные уравнения. Т.30, 1994,N2. – с.317-325. 6. Болкисев А.М., Шульга Н.А. Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наукова думка, 1990. – 227с. 7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Т.5 – Киев: Наукова думка, 1989. – с.87-92. 8. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 157с.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.97

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач, Я.В.Кондратюк

Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 3. Аналіз впливу в'язкості середовищ

В працях [1,2,3] проаналізовані (з погляду застосування проєкційно-сіткових методів) математичні моделі процесу нестационарної акустичної взаємодії пружного тіла та стисливої рідини для випадків ідеальних середовищ та середовищ з втратами енергії (дисипацією). В даній праці, на прикладі задачі про акустичну взаємодію пружного поршня з рідиною, що заповнює абсолютно жорстку камеру, проаналізовано вплив врахування в'язкості середовищ на характер чисельних розв'язків.

Математична модель акустичної взаємодії пружного тіла та стисливої рідини з врахуванням дисипації формулюється наступним чином [2,4].

1. Постановка задачі взаємодії

Нехай пружне тіло (відповідно, рідина) займає область Ω_S (відп., Ω_F) точок $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору R^3 з межею Γ_S (відп., Γ_F). Контакт тіла та рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_C = \Gamma_S \cap \Gamma_F$. Позначимо через $\nu^S = (\nu_1^S, \nu_2^S, \nu_3^S)$ (відп., ν^F) одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_S (відп., Γ_F), та t – час, $0 \leq t \leq T$.

Рух пружного тіла описується вектором переміщень $u^S = (u^S_1, u^S_2, u^S_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_S (u^S_i)'' - \sigma_{ij,j}^S = f_i^S \quad \text{в} \quad \Omega_S \times (0, T]; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^S(u^S) = a_{ijkl}^S \varepsilon_{km}(u^S) + c_{ijkl}^S \varepsilon_{km}((u^S)'), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}(u^S) = (u_{i,j}^S + u_{j,i}^S) / 2, \quad (3)$$

де ρ_S – густина, $\{a_{ijkl}^S\}$ і $\{c_{ijkl}^S\}$ – модулі пружності та в'язкості, $f^S = (f^S_1, f^S_2, f^S_3)$ – відома інтенсивність розподілених джерел звуку в тілі. Тут та надалі маємо на увазі підсумовування від 1 до 3 за індексами, що повторюються, а також

$$(\circ)' = \frac{\partial}{\partial t}(\circ), \quad (\circ)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\circ).$$

Рух рідини описується вектором переміщень $u^F = (u^F_1, u^F_2, u^F_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho_F (u^F_i)'' - \sigma_{ij,j}^F = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_F \times (0, T], \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^F(u^F) = [\rho_F c^2 u_{k,k}^F + (\lambda + \eta - 2\mu/3)(u_{m,m}^F)'] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}((u^F)'), \quad (5)$$

де ρ_F – густина, c – швидкість звуку, μ та η – відповідно коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості[4], $\lambda = \kappa (1/C_V - 1/C_P)$, де κ – коефіцієнт теплопровідності, C_V та C_P – питомі теплоємності рідини при сталих об'ємі й тиску відповідно. Рівняння (5) отримані з акустичного наближення рівняння нерозривності та рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\frac{1}{\rho_F c^2} p' + v_{k,k}^F = 0; \quad (*)$$

$$\begin{cases} \rho_F (v_i^F)' - \sigma_{ij,j}^F = 0, \\ \sigma_{ij}^F = [-p + (\lambda + \eta - 2\mu/3)v_{k,k}^F] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(v^F) \end{cases} \quad (**)$$

шляхом виключення тиску p з рівнянь (**) за допомогою рівняння (*).

Надалі позначатимемо індексами U – нерухомі (жорсткі), а P – вільні (або з заданим тиском) частини меж Γ_S та Γ_F , так що

$$\Gamma_S = \Gamma_{SU} \cup \Gamma_{SP} \cup \Gamma_C \quad \text{та} \quad \Gamma_F = \Gamma_{FU} \cup \Gamma_{FP} \cup \Gamma_C,$$

причому Γ_{SU} , Γ_{FU} та Γ_C – непорожні множини точок. Розглядаємо граничні умови, що відповідають цим поверхням:

$$u_i^S = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{SU}, \quad \sigma_{ij}^S v_j^S = \sigma_i^S \quad \text{на} \quad \Gamma_{SP}; \quad (6)$$

$$u_i^F = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{FU}, \quad \sigma_{ij}^F v_j^F = \sigma_i^F \quad \text{на} \quad \Gamma_{FP}; \quad (7)$$

$$u_i^S = u_i^F \text{ на } \Gamma_C, \quad (\sigma_{ij}^S - \sigma_{ij}^F) \nu_j^S = 0 \text{ на } \Gamma_C; \quad (8)$$

Для визначеності розв'язку до задачі (1)–(8) додаємо необхідні початкові умови.

Таким чином сформульована задача є математичною моделлю акустичної взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною для середовищ з дисипацією в термінах переміщень тіла та рідини.

2. Узагальнення задачі взаємодії

Нехай $\Omega = \Omega_S \cup \Omega_F$. Оскільки співвідношення (5) можуть бути отримані як частковий випадок співвідношень (2) відповідним підбором коефіцієнтів $\{a_{ijkn}^S\}$ і $\{c_{ijkn}^S\}$, а умови контакту (8) є природними для суцільного середовища, то рух середовища описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$ так, що

$$u = \begin{cases} u^S, & x \in \Omega_S; \\ u^F, & x \in \Omega_F. \end{cases}$$

Аналогічним чином введемо ρ – густину, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – інтенсивність розподілених джерел звуку в середовищі, яке заповнює область Ω , $\{a_{ijkn}\}$ і $\{c_{ijkn}\}$ – модулі пружності та в'язкості, які в області Ω_F приймають значення

$$c_{ijkn}^F = \begin{cases} 2\mu, & i \neq j, i = k, j = m; \\ \lambda + \eta + 4\mu/3, & i = j, k = i, m = j; \\ \lambda + \eta - 2\mu/3, & i = j, k = m, i \neq k; \\ 0; \end{cases}$$

$$a_{ijkn}^F = \begin{cases} \rho c^2, & i = j = k = m; \\ 0. \end{cases}$$

У цьому випадку задача взаємодії може бути узагальнена наступним чином.

Нехай пружне тіло та рідина займають область Ω точок $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору R^3 з межею Γ . Позначимо через $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ . Рух середовища описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2, u_3)$, що задовольняє рівняння:

$$\rho u'' - \sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (9)$$

$$\sigma_{ij,j}(u) = a_{ijkn} \varepsilon_{kn}(u) + c_{ijkn} \varepsilon_{kn}(u'), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (11)$$

Як і раніше позначатимемо індексами U – нерухомі (жорсткі), а P – вільні (або з заданим тиском) частини межі Γ так, що $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_P$, причому Γ_U – непорожня множина точок. Цим поверхням відповідають граничні умови:

$$u_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_U, \quad \sigma_{ij}v_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{на} \quad \Gamma_P. \quad (12)$$

Для визначеності розв'язку до (9)-(12) додаємо початкові умови:

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (13)$$

Таким чином, задача (9)-(13) є узагальненою математичною моделлю акустичної взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною для середовищ з дисипацією в термінах переміщень.

3. Методика чисельного дослідження задачі взаємодії

Для побудови чисельної моделі процесу взаємодії пружного тіла зі стисливою рідиною застосовується методика, детально описана в працях [1,2,5]: формулюється варіаційна (слабка) постановка задачі

Введемо простори

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^n \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_U\}, \quad H = L^2(\Omega)^n$$

Варіаційна постановка задачі має вигляд:

$$\begin{cases} \text{Задано } l \in L^2(0, T; V'), \quad u^0 \in V, \quad u^1 \in H. \\ \text{Знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ таку, що} \\ m(u''(t), v) + c(u'(t), v) + a(u(t), v) = \langle l, v \rangle, \\ a(u(0) - u^0, v) = 0, \quad m(u'(0) - u^1, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (14)$$

тут введено такі позначення :

$$\begin{cases} m(u, v) = \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx, \\ c(u, v) = \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \\ a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \\ \langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f_i v_i d\gamma + \int_{\Gamma_P} \sigma_i v_i d\gamma \end{cases} \quad (15)$$

Дискретизація варіаційної задачі за просторовими змінними базується на методі Гальоркіна з використанням скінченноелементних апроксимацій, а для інтегрування за часом застосовується однокрокова рекурентна схема, яка з використанням матричних позначень допускає таке алгебраїчне зображення [5]:

Задано $\Delta t, \beta, \gamma = \text{const} > 0; \{U^j\}, \{V^j\} \subset R^N$.

Знайти $\{U^{j+1}\}, \{V^{j+1}\} \subset R^N$ такі що

$$\begin{cases} \{M + \Delta t \gamma C + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta A\} V^{j+1/2} = \Delta t \{L_{j+1/2} - A U^j\} + \\ \quad + \{M + \frac{1}{2} \Delta t (\beta - 2\gamma^2) A\} V^j; \\ U^{j+1} = U^j + \Delta t V^{j+1/2}, \quad V^{j+1} = 2V^{j+1/2} - V^j, \quad j = 0, 1, \dots, K. \end{cases} \quad (16)$$

Побудова (16) передбачає, що процедура Гальоркіна використовує базис $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ підпростору $V_h \subset V, \dim V_h = N$, а інтегрування за часом виконується з кроком $\Delta t, \Delta t K = T$. Тоді наближений розв'язок задачі (14) визначається формулою

$$u_h(x, t_m) = \sum_{k=1}^N U_k^m \varphi_k(x).$$

Коректність варіаційної задачі та збіжність чисельного розв'язку показані в працях [2, 5].

Описана вище методика чисельного дослідження задачі акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною реалізована у вигляді програми, створеної в середовищі візуального програмування Borland Delphi 3.0. Передбачена можливість розв'язування задач взаємодії як для ідеальних середовищ, так і для середовищ з дисипацією.

4. Нестационарна взаємодія пружного поршня з рідиною, що заповнює абсолютно жорстку камеру.

Розглянемо задачу про імпульсне навантаження пружного поршня товщини H , що взаємодіє з рідиною, яка заповнює абсолютно жорстку камеру довжини L (рис.1). Припустимо, що пружний поршень ковзає по жорсткій поверхні камери без тертя та сила, що діє на поршень, розподілена по його поверхні рівномірно.

Аналітичний та чисельні розв'язки даної задачі для випадку ідеальних середовищ досліджувались в працях [3, 7].

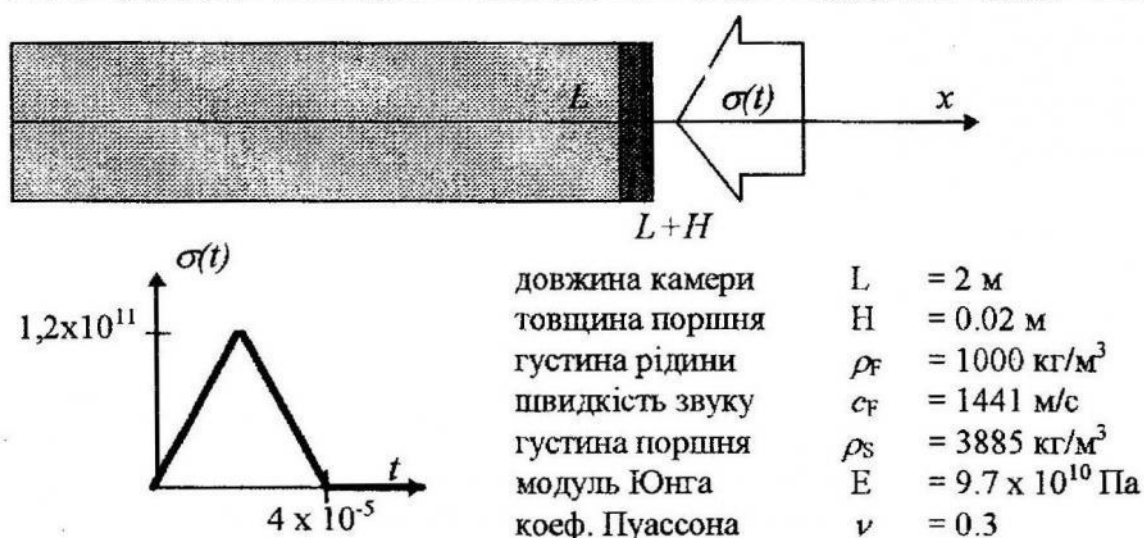


Рис. 1.

На рис.2,3 представлені результати аналізу впливу в'язкості.

Графік залежності акустичного тиску $p(x,t)$ на поршні ($x=L$) від часу t
(1 - $k=0$, 2 - $k=1.0E-07$)

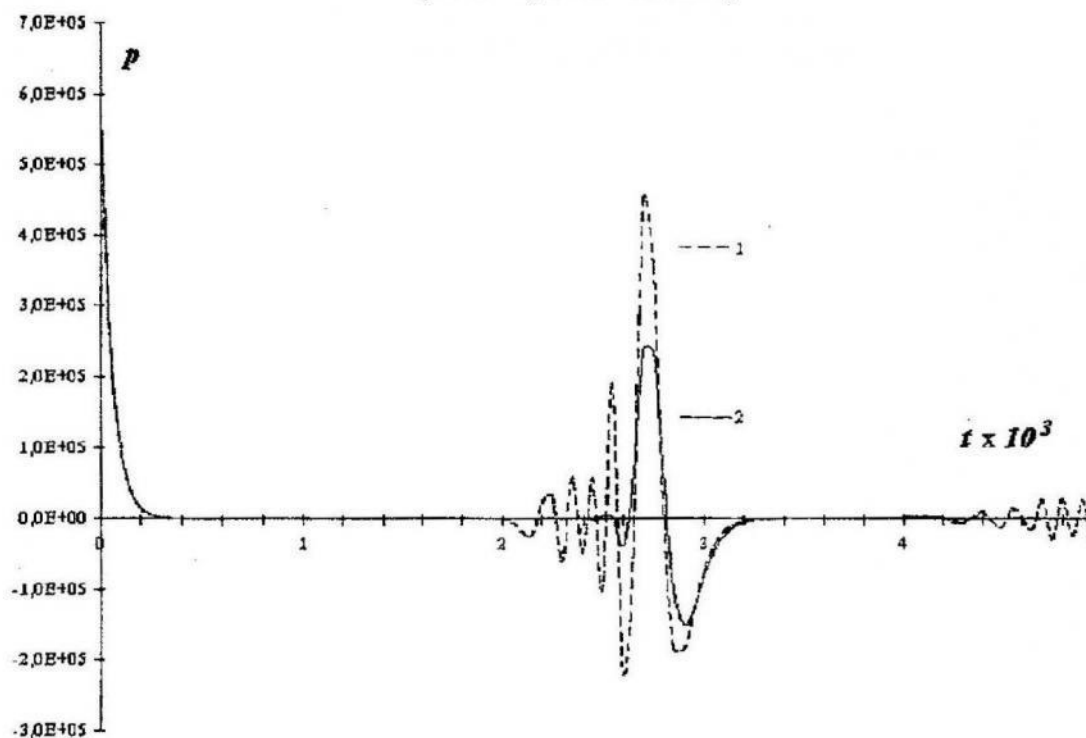


Рис. 2

Криві 1 на обох рисунках відповідають розв'язкам для ідеальних середовищ. Криві 2 – середовищам з дисипацією. Модулі в'язкості для тіла та рідини вибирались як відповідні модулі пружності, домножені на коефіцієнт $k = 10^{-7}$. З рис.2 добре видно, що

введення в'язкості в математичну модель дозволяє позбутись паразитичних осциляцій в чисельному розв'язку.

Криві 3 та 4 на рис.3 відповідають повним енергіям пружного поршня та рідини відповідно, а їх поведінка в часі ілюструє баланс енергій в гідропружній системі.

Розрахунки проводились при різних параметрах дискретизації за просторовими та часовою змінними. Апостеріорно отримані порядки збіжності чисельних схем добре узгоджуються з апіорними оцінками.

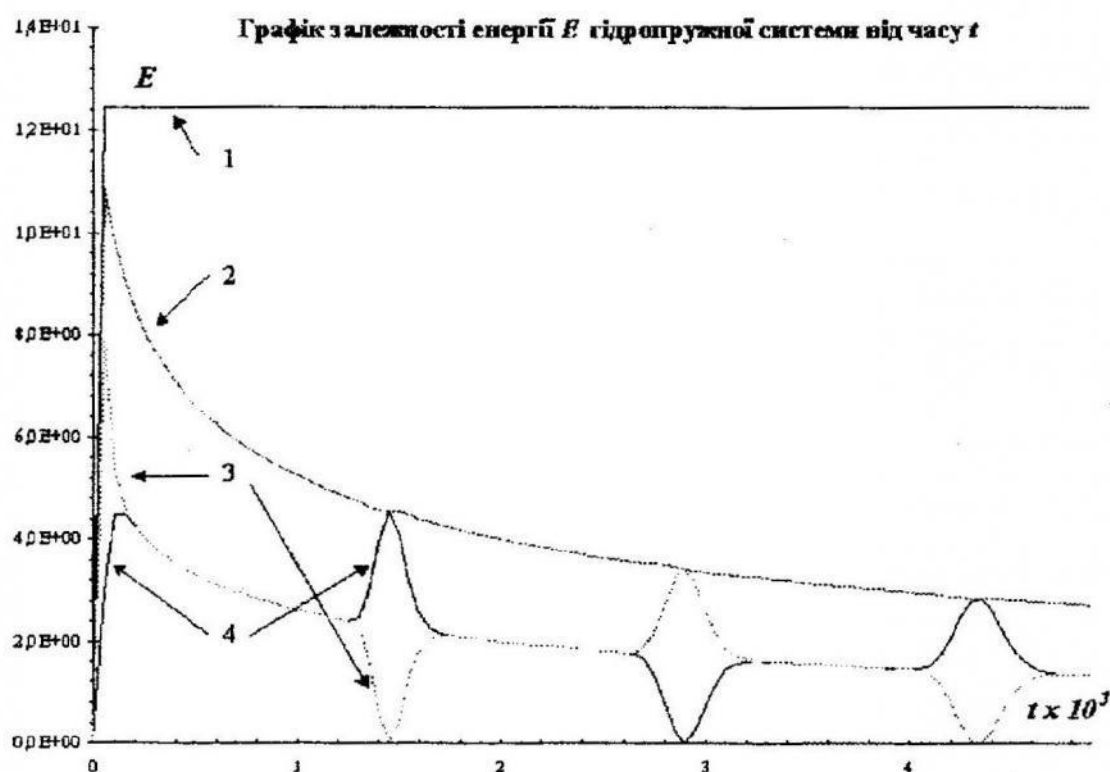


Рис. 3.

1. Горлач В.М., Шинкаренко Г.А. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. І. Ідеальні середовища // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.76-82.
2. Горлач В.М. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 2. Середовища з дисипацією // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип. 39. С.82-88.
3. Горлач В.М. Численное моделирование акустических колебаний упругого тела с жидкостью: Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук, Львов, 1990. – 18с.
4. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.:Наука, 1984. – 400 с.
5. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ: УМК

ВО, 1991. – 87с. 6. Горлач В.М., Кондратюк Я.В. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною для середовищ з дисипацією // Modelling and investigation of system stability: thesis of Int.Conf. – Kiev – 1997. – P.41. 7. Geradin M., Robert G., Huck A. Eigenvalue analysis and transient response of fluid-structure interaction problems // Eng.Computational. – 1984. – Vol.1, №2. – P.151-160.

Стаття надійшла до редколегії 30.12.97

УДК 539.3

Муха І.С.

Уточнена теорія термопружних оболонок з урахуванням залежності пружних констант матеріалу від температури

В класичних математичних моделях теорії оболонок вважають, що зміна температури неістотно впливає на значення пружних констант E та G . Але експериментальні дослідження показують, що при високій температурі значення цих констант суттєво змінюються. Тому знехтувавши цією залежністю, можна отримати неадекватну модель термопружного деформування тонкостінного тіла. В даній праці зроблена спроба побудувати уточнену модель оболонок, яка враховує вищезгадану залежність.

Нехай початково трансверсально-ізотропне однорідне тонкостінне деформівне тіло займає в просторі об'єм V , обмежений поверхнею S . Припустимо, що тіло віднесене до триортogonalної системи криволінійних координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, і в цій системі

$$V = \left\{ \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \vec{n}(\alpha_1, \alpha_2) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2} \right\}$$

де h – товщина тіла, $\vec{n}(\alpha_1, \alpha_2)$ – нормаль до поверхні $\Omega = \left\{ \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega \right\}$. Нехай система координат α_1, α_2 є ортогональною та спряженою, і K_1, K_2 – головні кривини поверхні Ω .

Будемо виходити з теорії незв'язного термопружного деформування тіла. Припустимо, що в тонкостінному тілі реалізується узагальнений плоский напружений стан, тобто $\sigma_{33} = 0$. Крім цього, нехай

пружні константи тіла є лінійними функціями приросту температури T , тобто модуль Юнга $E = E_1 - E_2 T$ і модуль зсуву в напрямі нормалі до площини ізотропії $G = G_1 - G_2 T$. При таких припущеннях густина енергії пружної деформації тонкостінного тіла може бути записана в вигляді

$$\Phi(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E_1 - E_2 T}{1 - \nu^2} \left[(\varepsilon_{11} - \alpha T)^2 + (\varepsilon_{22} - \alpha T)^2 + 2\nu (\varepsilon_{11} - \alpha T)(\varepsilon_{22} - \alpha T) + \frac{1 - \nu}{2} \varepsilon_{12}^2 \right] + (G_1 - G_2 T)(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \right\},$$

де α – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу;

$$\varepsilon_{ij} = \nabla_i U_j + \nabla_j U_i \text{ при } i \neq j.$$

Прийmemo кінематичні гіпотези типу Тимошенко, згідно з якими переміщення U_1 та U_2 є лінійними функціями α_3 , а U_3 є постійними за товщиною тіла [3,4]. Тоді для деформацій матимемо формули

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii} + \alpha_3 \kappa_{ii}}{1 + K_i \alpha_3}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_{12} + \alpha_3 \kappa_{12}}{(1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3)}, \quad \varepsilon_{i3} = \frac{\varepsilon_{i3}}{1 + K_i \alpha_3},$$

$$i = 1, 2.$$

Введемо в розгляд усереднену густину енергії деформації

$$\int_V \Phi(\varepsilon, T) dV = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi(\varepsilon, T) (1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3 d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \phi^0(\varepsilon, \kappa, T, T) d\Omega,$$

де

$$\phi^0(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\alpha_3, \quad \phi^1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \alpha_3 d\alpha_3.$$

Вираз для $\phi^0(\varepsilon, \kappa, T, T)$ отримується шляхом усереднення за товщиною функції $\Phi(\varepsilon, T)$. При цьому приймають гіпотезу стосовно реального розподілу деформацій за товщиною тіла, згідно з якою [1]

$$\varepsilon_{i3} = \frac{5\varepsilon_{i3} [0.25 - (\alpha_3/h)^2]}{1 + K_i \alpha_3}.$$

Така гіпотеза дозволяє не завищувати зсувну жорсткість оболонки і не порушувати основний енергетичний принцип.

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon, \kappa, T, T) = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{(E_1 - E_2 T)h}{1 - \nu^2} (\tilde{\varepsilon}_{11}^2 + \tilde{\varepsilon}_{22}^2 + 2\nu\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\varepsilon}_{22} + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2) - \right. \\ & - \frac{E_2 T h^3}{12(1-\nu^2)} (\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\kappa}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\tilde{\kappa}_{22} + \nu\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\kappa}_{22} + \nu\tilde{\varepsilon}_{22}\tilde{\kappa}_{11} + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}\kappa_{12}) + \\ & + \frac{(E_1 - E_2 T)h^3}{12(1-\nu^2)} (\tilde{\kappa}_{11}^2 + \tilde{\kappa}_{22}^2 + 2\nu\tilde{\kappa}_{11}\tilde{\kappa}_{22} + \frac{1-\nu}{2}\kappa_{12}^2) + \\ & \left. + \frac{5}{2} \left(\frac{G_1}{3} - \frac{G_2 T}{2} \right) h (\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \right\}; \end{aligned}$$

де $\tilde{\varepsilon}_{ii} = \varepsilon_{ii} - \alpha T$, $\tilde{\kappa}_{ii} = \kappa_{ii} - \alpha T$.

Далі скористаємось принципом віртуальних робіт. З нього отримаємо, що зусилля та моменти в оболонці рівні

$$\begin{aligned} N_{ii} &= \frac{(E_1 - E_2 T)h}{1 - \nu^2} (\tilde{\varepsilon}_{ii} + \nu\tilde{\varepsilon}_{jj}) - \frac{E_2 T h^3}{12(1-\nu^2)} (\tilde{\kappa}_{ii} + \nu\tilde{\kappa}_{jj}), \\ N_{12} &= \frac{(E_1 - E_2 T)h}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12} - \frac{E_2 T h^3}{24(1+\nu)} \kappa_{12}, \\ Q_i &= \frac{5}{2} \left(\frac{G_1}{3} - \frac{G_2 T}{2} \right) h \varepsilon_{i3}, \\ M_{ii} &= -\frac{E_2 T h^3}{12(1-\nu^2)} (\tilde{\varepsilon}_{ii} + \nu\tilde{\varepsilon}_{jj}) + \frac{(E_1 - E_2 T)h^3}{12(1-\nu^2)} (\tilde{\kappa}_{ii} + \nu\tilde{\kappa}_{jj}), \\ M_{12} &= -\frac{E_2 T h^3}{24(1+\nu)} \varepsilon_{12} + \frac{(E_1 - E_2 T)h^3}{24(1+\nu)} \kappa_{12}, \\ & i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Отримані фізичні співвідношення в сумі з традиційними співвідношеннями Коші [3,4] визначають функціонал Лагранжа теорії

оболонки. Це дозволяє зробити варіаційну постановку задачі про термopружне деформування оболонки з урахуванням залежності пружних констант від температури. Описана математична модель з успіхом використовувалась в [2] для розв'язання задачі термопластичного деформування смуги-пластини.

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек // М:Наука. -1972. - 432 с.
2. Муха І.С., Кісіль Р.І. Застосування комбінованого чисельного підходу в задачах термопластичного деформування тонкостінних тіл // Доп. НАН України. - 1997.-№6. - с.69-74.
3. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл // Вісн.Львів.ун-ту,сер.мех.-мат. - 1995. - Вип.41. - с. 82-91.
4. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек // Львів:Вища школа. - 1978.-159 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.97

УДК 539.3

Муха І.С.

Дослідження пружного деформування складових тонкостінних гнучких тіл методом скінченних елементів

Складові тонкостінні тіла з складною формою серединної поверхні широко застосовуються в сучасних інженерних конструкціях. Проблеми забезпечення їх міцності та надійності зумовлюють розвиток методів розв'язування задач про визначення напружено-деформованого стану гнучких оболонок на основі геометрично нелінійних теорій пружного деформування. Дана праця присвячена розробці чисельних схем методу скінченних елементів для розв'язування вказаних задач.

Розглянемо процес деформування початково трансверсально-ізотропного однорідного гнучкого тонкостінного тіла, яке знаходиться в об'ємі V і обмежене поверхнею S . Припустимо, що тіло має структуру тонкостінної системи, складеної з гнучких оболонкових елементів постійної товщини. Вважатимемо, що кожен елемент системи віднесений до триортogonalної системи координат, зв'язаної з лініями кривини на серединній поверхні тіла. Тоді $V = UV_m$, де

$$V_m = \left\{ \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in v_{m0}, -\frac{h_m}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h_m}{2} \right\}.$$

Нехай $\Omega_m = \left\{ \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, 0) : (\alpha_1, \alpha_2) \in v_{m0} \right\}$, а Γ_m є межею області Ω_m .

Будемо припускати, що весь процес навантаження тіла зовнішніми силами проходить досить повільно, і отже його можна розглядати як ряд послідовних рівноважних станів. Це значить, що модель деформування тіла може бути записана в квазістатичній постановці. Нехай в деякий момент часу в тілі присутні переміщення точок U , повні деформації $\mathcal{E}$, і напруження Σ , які виникли під дією масових сил Q та поверхневих навантажень $\tilde{\Sigma}_n$, і є зрівноваженими.

Математичну модель деформування пружного тіла запишемо в варіаційній постановці у формі принципу Лагранжа. Будемо вважати, що деформації, які виникають в тілі у процесі деформування, є малими, а згин оболонки є середнім [5]. Приймемо гіпотези деформування нормального до серединної поверхні волокна оболонки у лінійній формі типу Тимошенко.

$$\begin{aligned} U_s(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_s(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_s(\alpha_1, \alpha_2), s=1,2 \\ U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_3(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Крім цього нехай в оболонці реалізується узагальнений плоский напружений стан. Тоді варіаційний принцип Лагранжа можна записати так [7]

$$\begin{aligned} L(u, \gamma) &= \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ij}(u, \gamma) A_{ijkl}^{(m1)} \varepsilon_{kl}(u, \gamma) d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \kappa_{rs}(u, \gamma) A_{rspt}^{(m2)} \kappa_{pt}(u, \gamma) d\Omega - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_m} q_i^{(m1)} u_i d\Omega - \int_{\Omega_m} q_r^{(m2)} \gamma_r d\Omega - \int_{\Gamma_{m\sigma}} \tilde{\sigma}_{ni}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{m\sigma}} \tilde{m}_{nr}^* \gamma_r d\Gamma \right\} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $A^{(ij)}$ -тензори, коефіцієнти яких є функціями пружних констант матеріалу і товщини h_i , $\Gamma_{i\sigma}$ -частина контура Γ_i , на якому задані граничні номінальні зусилля $\tilde{\sigma}_{ni}^*$ та граничні номінальні моменти $\tilde{m}_{nr}^*$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rs} &= e_{rs} + \frac{1}{2} \omega_{r3} \omega_{s3}; & \varepsilon_{r3} &= e_{r3}; \\ \kappa_{rs} &= k_{rs} + \frac{1}{2} (\omega_{r3} \tau_{s3} + \omega_{s3} \tau_{r3}) - \frac{1}{2} \omega_{r3} \omega_{s3} \delta_{rs} K_r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{rs} &= \frac{1}{2A_r A_s} [\nabla_s (A_r u_r) + \nabla_r (A_s u_s)] + K_r \delta_{rs} u_3; \\
e_{r3} &= \frac{1}{2} (\gamma_r + \frac{1}{A_r} \partial_r u_3 - K_r u_r); \quad k_{rr} = \frac{1}{A_r^2} \nabla_r (A_r \gamma_r); \\
k_{12} &= \frac{1}{2A_1 A_2} [\nabla_2 (A_1 \gamma_1) + \nabla_1 (A_2 \gamma_2) + K_1 \nabla_2 (A_1 u_1) + K_2 \nabla_1 (A_2 u_2)] \\
\omega_{r3} &= \frac{1}{2} (\gamma_r - \frac{1}{A_r} \partial_r u_3 + K_r u_r); \quad \tau_{r3} = K_r \gamma_r; \\
i, j, k, l &= 1, 2, 3; \quad r, s, p, t = 1, 2
\end{aligned}$$

Нехай тепер на тіло діють додаткові масові сили та поверхневі навантаження, і внаслідок цього в тілі виникають додаткові переміщення Δu та $\Delta \gamma$. Тоді для визначення приростів переміщень матимемо варіаційне рівняння [6]

$$\delta L^A(\Delta u, \Delta \gamma) = 0 \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}
L^A(\Delta u, \Delta \gamma) &= \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \sigma_{rs} \Delta \omega_{r3} \Delta \omega_{s3} d\Omega + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} m_{rs} (\Delta \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \Delta \tau_{r3} - \Delta \omega_{r3} \Delta \omega_{s3} \delta_{rs} K_r) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} (\Delta e_{ij} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{i3} \omega_{j3} + \frac{1}{2} \omega_{i3} \Delta \omega_{j3} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{i3} \Delta \omega_{j3}) \times A_{ijkl}^{(m1)} \times \\
&\times (\Delta e_{kl} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{k3} \omega_{l3} + \frac{1}{2} \omega_{k3} \Delta \omega_{l3} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{k3} \Delta \omega_{l3}) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} [\Delta k_{rs} + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{r3} \tau_{s3} + \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \tau_{r3} + \omega_{s3} \Delta \tau_{r3}) - \\
&- \Delta \omega_{r3} \omega_{s3} \delta_{rs} K_r + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \Delta \tau_{r3}) - \\
&- \frac{1}{2} \Delta \omega_{r3} \Delta \omega_{s3} \delta_{rs} K_r] \times A_{rsp1}^{(m2)} \times [\Delta k_{pt} + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{p3} \tau_{t3} + \omega_{p3} \Delta \tau_{t3} + \\
&+ \Delta \omega_{t3} \tau_{p3} + \omega_{t3} \Delta \tau_{p3}) - \Delta \omega_{p3} \omega_{t3} \delta_{pt} K_p + \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta \omega_{p3} \Delta \tau_{t3} + \Delta \omega_{t3} \Delta \tau_{p3}) - \frac{1}{2} \Delta \omega_{p3} \Delta \omega_{t3} \delta_{pt} K_p] d\Omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_m} \sigma_{ij} (\Delta e_{ij} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{i3} \omega_{j3} + \frac{1}{2} \omega_{i3} \Delta \omega_{j3}) d\Omega + \\
& + \int_{\Omega_m} m_{rs} [\Delta k_{rs} + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{r3} \tau_{s3} + \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \tau_{r3} + \omega_{s3} \Delta \tau_{r3}) - \\
& - \Delta \omega_{r3} \omega_{s3} \delta_{rs} K_r] d\Omega - \int_{\Omega_m} (q_i^{(m1)} + \Delta q_i^{(m1)}) \Delta u_i d\Omega - \\
& - \int_{\Omega_m} (q_r^{(m2)} + \Delta q_r^{(m2)}) \Delta \gamma_r d\Omega - \int_{\Gamma_{m\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ni}^* + \Delta \tilde{\sigma}_{ni}^*) \Delta u_i d\Gamma - \\
& - \int_{\Gamma_{m\sigma}} (\tilde{m}_{nr}^* + \Delta \tilde{m}_{nr}^*) \Delta \gamma_r d\Gamma
\end{aligned}$$

Тут прийняті такі позначення:

$$\sigma_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{rr} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \quad r, s = 1, 2; \quad r \neq s, \quad \sigma_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{12} d\alpha_3$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_{3r} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{r3} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \quad r, s = 1, 2; \quad r \neq s,$$

$$m_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{rr} (1 + \alpha_3 K_s) \alpha_3 d\alpha_3; \quad r, s = 1, 2; \quad r \neq s, \quad m_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{12} \alpha_3 d\alpha_3$$

Для мінімізації функціоналу (3) побудуємо ітераційний процес типу Ньютона. Для цього припустимо, що нам відомо деякі наближення $\Delta u_j^{(i)}$ та $\Delta \gamma_r^{(i)}$ шуканих функцій. Представимо точний розв'язок в вигляді

$$\Delta u_j = \Delta u_j^{(i)} + du_j^{(i)}, \Delta \gamma_r = \Delta \gamma_r^{(i)} + d\gamma_r^{(i)} \quad (4)$$

Будемо припускати, що величини $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ є величинами вищого порядку малості в порівнянні з відповідними Δ -величинами. Запишемо функціонал типу (3) відносно величин $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$. Знехтуємо в ньому підкресленими членами, що мають порядок $(du)^3, (du)^4$. Тоді отримається квадратичний функціонал $\bar{L}^d(du, d\gamma)$. Для мінімізації цього функціоналу можна застосувати метод скінченних елементів з ізопараметричними апроксимаціями шуканих функцій [1, 2]. Для цього представимо область Ω у вигляді об'єднання

М криволінійних чотирикутників Ω_e , на границях яких вибрано вісім вузлових точок. Відобразимо внутрішність квадрата $\Xi = \{\zeta_1, \zeta_2: -1 \leq \zeta_i \leq 1\}$ на область Ω_e за допомогою перетворення

$$\alpha_p = \sum_{\substack{k,j=-1,0,1 \\ k^2+j^2 \neq 0}} \alpha_{pkj} \Phi_{kj}(\zeta_1, \zeta_2); \quad p=1,2; \quad (5)$$

де квадратичні базові функції Φ_{kj} визначаються за формулами

$$\Phi_{kj} = -\frac{1}{4}(1+k\zeta_1)(1+j\zeta_2)(1-k\zeta_1-j\zeta_2),$$

$$\Phi_{0j} = \frac{1}{2}(1-\zeta_1^2)(1+j\zeta_2), \quad \Phi_{k0} = \frac{1}{2}(1+k\zeta_1)(1-\zeta_2^2), \quad k, j = -1, 1;$$

$(\alpha_{1kj}, \alpha_{2kj})$ – координати вузла (k, j) елемента Ω_e .

Шукані функції $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ представимо на стандартному елементі Ξ у вигляді

$$du_j^{(i)} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2) q_j^{(ei1)}, \quad d\gamma_r^{(i)} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2) q_r^{(ei2)}. \quad (6)$$

Тут $\Phi(\zeta_1, \zeta_2) = [\Phi_{-1,-1} \Phi_{0,-1} \Phi_{1,-1} \Phi_{1,0} \Phi_{1,1} \Phi_{0,1} \Phi_{-1,1} \Phi_{-1,0}]$; $q_j^{(ei1)}, q_r^{(ei2)}$ – стовпчики невідомих значень шуканих функцій у вузлових точках елемента Ω_e .

Виходячи з умов мінімуму квадратичного функціоналу $\bar{L}^d(du, d\gamma)$ на множині функцій вигляду (6), які задовільняють однорідні граничні умови на границі $\Gamma_m \setminus \Gamma_{m\sigma}$, отримаємо ключову систему лінійних алгебраїчних рівнянь методу скінченних елементів

$$\sum_{e=1}^M K^{(ei)} q^{(ei)} = \sum_{e=1}^M F^{(ei)}.$$

Розв'язки цієї системи є значеннями приростів $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ у вузлових точках елемента Ω_e . Для знаходження $(i+1)$ -го наближення шуканих функцій $\Delta u_j^{(i+1)}, \Delta \gamma_r^{(i+1)}$ потрібно до відомих вузлових значень функцій $\Delta u_j^{(i)}, \Delta \gamma_r^{(i)}$ додати знайдені прирости. Описаний процес продовжують до тих пір, поки прирости функцій $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ не стануть задовільняти умову

$$\|du_j^{(i)}\| \leq \varepsilon \|\Delta u_j^{(i)}\|, \quad \|d\gamma_r^{(i)}\| \leq \varepsilon \|\Delta \gamma_r^{(i)}\|. \quad (7)$$

Зауважимо, що обчислення членів $K^{(ei)}, F^{(ei)}$ на кожній ітерації по (і) вимагає колосальних затрат комп'ютерних ресурсів. Тому в праці пропонується методика, що дозволяє значно зменшити ці затрати. Суть її полягає в тому, щоб обчислювати один раз деякі величини в кожній точці чисельного інтегрування і запам'ятовувати їх на зовнішніх носіях. Ця ідея не нова, але в літературі пропонується обчислювати і запам'ятовувати значення функцій форми Φ_{kj} та їх

похідних $\frac{\partial \Phi_{kj}}{\partial \alpha_p}$ у вказаних точках. Спробуємо узагальнити цю ідею.

Якщо нам відомі значення функцій форми та їх похідних по α_p в деякій точці, то по них можна обчислити 11 величин

$$\Phi, \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \Phi, \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \Phi, K_1 \Phi, K_2 \Phi, K_2 \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \Phi, K_1 \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \Phi, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}, \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}, \frac{K_2}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}, \frac{K_1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2},$$

які використовуються для визначення деформацій e_{kj}, k_{rs} та кутів повороту ω_{r3}, τ_{r3} . Ці незначні затрати ресурсів пам'яті значно зменшують обчислювальні затрати комп'ютера. Але це ще не все. Представимо для визначеності величину e_{kj} на елементі Ω_e у вигляді

$$e_{kj}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{p=1}^3 \sum_{l=1}^8 e_{kj}^{(1pl)}(\alpha_1, \alpha_2) u_{pl} + \sum_{p=1}^2 \sum_{l=1}^8 e_{kj}^{(2pl)}(\alpha_1, \alpha_2) \gamma_{pl} \quad (8)$$

де величини $e_{kj}^{(1pl)}(\alpha_1, \alpha_2), e_{kj}^{(2pl)}(\alpha_1, \alpha_2)$ – деякі вирази, що обчислюються через значення приведених вище 11 величин в точці (α_1, α_2) ; u_{pl}, γ_{pl} – значення функцій u_p і γ_p у вузлах елемента Ω_e . Якщо тепер обчислити в кожній точці інтегрування величини $e_{kj}^{(1pl)}, k_{kj}^{(1pl)}, \omega_{kj}^{(1pl)}, \tau_{kj}^{(1pl)}$ і запам'ятати їх на зовнішніх магнітних носіях, то тоді без особливих затрат обчислювальних ресурсів можна отримувати не тільки вказані величини, але і їх прирости. В останньому випадку в формули (8) потрібно підставити $\Delta u_{pl}, \Delta \gamma_{pl}$ замість u_{pl}, γ_{pl} . Описана методика особливо ефективна при розв'язуванні вище згаданих задач, коли на кожній ітерації кроку навантаження потрібно обчислювати не тільки поля шуканих d-величин, але й поля вже накопичених значень деформацій та поворотів.

На базі описаного алгоритму створено програмне забезпечення, яке використане для розв'язання ряду задач пружного деформування тонкостінних гнучких тіл. Зокрема розв'язана задача, запропонована в праці [3], і отримано добре співпадіння з приведеними там результатами.

В даній праці приведемо лише результати розрахунку однієї практично важливої конструкції, а саме колінчатого з'єднання трубопроводів. Ця конструкція є з'єднанням двох перпендикулярних труб за допомогою перехідної труби еліптичного поперечного перерізу. На тіло діє рівномірно розподілений внутрішній тиск. На краях обох труб змодельовано умови, що відображають заварені торці. Задача розв'язувалась при таких значеннях геометричних та фізичних величин: радіус труби $R = 0,1\text{м}$, довжина $|CB| = 0,4\text{м}$, товщина $h = 0,002\text{м}$, модуль Юнга $E = 40000\text{МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

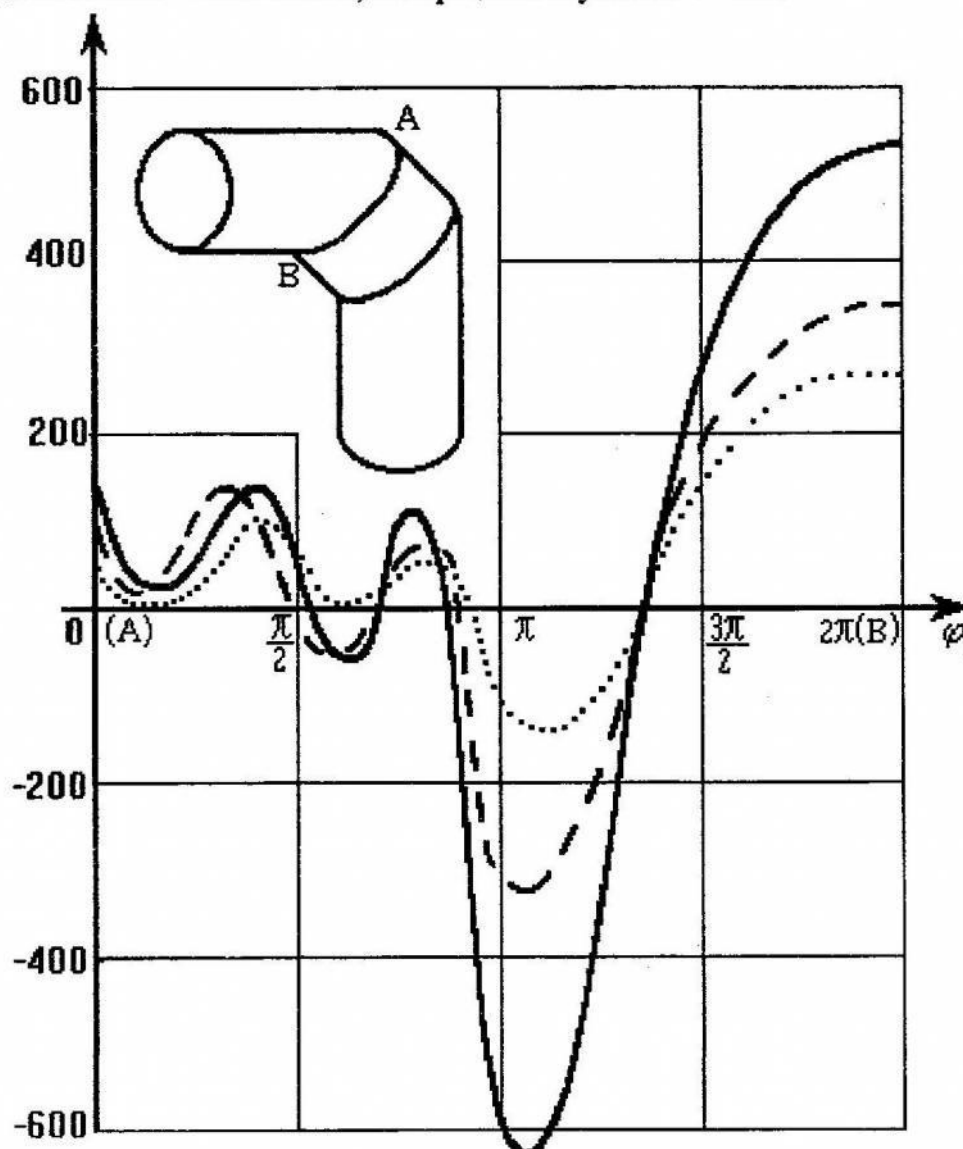


Рис. 1

З метою подальшого зміцнення конструкції запропоновано встановити ребро жорсткості в площині серединного перерізу перехідника. Розглядались три варіанти, а саме: (а) ребро постійної висоти $H=0.008\text{м}$; (б) ребро еліптичного профілю з висотою $H=0.004\text{м}$ в точках А і В, та $H=0.012\text{м}$ посередині; (в) ребро еліптичного профілю з висотою $H=0.012\text{м}$ в точках А і В та $H=0.004\text{м}$ посередині. На перший погляд найкращі результати слід було б очікувати для ребра (б), оскільки максимальні напруження виникають посередині. Але чисельні експерименти показали, що така гіпотеза була помилковою. Виявилось, що найкраща картина розподілу напружень отримана для ребра (в). Ці результати приведені на рис. 1 точковою лінією. Як бачимо, за рахунок незначного збільшення маси конструкції можна добитись того, що максимальні напруження зменшаться майже вдвічі і тіло не вийде за межі пружності.

1. Григоренко Я.М., Муха І.С., Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Пружна рівновага складових оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1984. – №7. – с.33-36.
2. Григоренко Я.М., Муха І.С., Савула Я.Г. Чисельна реалізація двоїстих варіаційних принципів в теорії оболонок типу Тимошенка // Доп. АН УРСР, сер.А. – 1985. – №8. – с.23-28.
3. Григоренко Я.М., Тимонин А.М. О численном решении нелинейных краевых задач теории гибких оболочек сложной геометрии // Докл.НАН Украины. – 1992.–№12.– с.3-10.
4. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. – 1996.-32, №6. – с.3-39.
5. Муштарі Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек // Казань: Таткнигоиздат. – 1957. – 432с.
6. Муха І.С. Чисельна схема розв'язання задач нелінійного деформування твердих тіл при наявності початкових переміщень // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1990. – Вип.33. – с.22-26.
7. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл // Вісн.Львів.ун-ту,сер.мех.-мат. – 1995. – Вип.41. – с82-91.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.97

Н.В.Іванова

Нелінійне деформування гнучких оболонок з деформівною нормаллю

Аналіз деяких підходів до розв'язання крайових задач теорії оболонок в геометрично нелінійній постановці на основі класичної та п'ятимодальної теорій наведено в роботі [2]. В даній праці на основі принципу стаціонарності повної потенціальної енергії побудована схема розв'язування задач статки шестимодальної теорії оболонок з деформівною нормаллю із застосуванням квазілінеаризації на основі методу Ньютона. При побудові ітераційної схеми функціонал повної потенціальної енергії розкладається в ряд лише по переміщеннях при заданому зовнішньому навантаженні. Розв'язування задачі здійснюється за допомогою методу скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій. Розглядається чисельний приклад.

1. Основні співвідношення нелінійної теорії оболонок з деформівною нормаллю. Нехай оболонка постійної товщини h займає в евклідовому просторі R^3 область V , обмежену поверхнею G , яка складається з двох лицьових поверхонь Ω_+ , Ω_- та бічної поверхні S ($G=\Omega_+\cup\Omega_-\cup S$). Віднесемо серединну поверхню оболонки Ω , обмежену контуром Γ ($\Gamma\subset S$), до системи ортогональних криволінійних координат $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ так, що координатні лінії $\alpha_i=\text{const}$ ($i=1,2$) співпадатимуть з лініями головних кривин цієї поверхні. Введемо ортогональну до поверхні Ω змінну z , $|z|\leq h/2$.

Нехай на частині бічної поверхні S_σ ($S_\sigma\subset S$) поверхневого навантаження $\hat{\sigma}=\{\hat{\sigma}_n,\hat{\sigma}_s,\hat{\sigma}_z\}$ (система криволінійних координат (n,s,z) визначена в такий спосіб, що її орти утворюють праву трійку; орти n та s напрямлені відповідно вздовж нормалі та дотичної до бічної поверхні оболонки S). Заради означеності будемо вважати, що на решті бічної поверхні S_u ($S_u=S\setminus S_\sigma$) виконуються умови жорсткого защемлення $U_g=0$.

Процес деформування оболонки характеризується в даній системі координат трьома проекціями вектора повного зміщення точки на

напрямки, дотичні до координатних ліній в розглядуваній точці. Згідно кінематичної гіпотези теорії оболонок типу Тимошенка з деформівною нормаллю ці зміщення можна представити у вигляді

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + z\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

де u_i – зміщення точок серединної поверхні, γ_i – компоненти вектора кутів повороту околу довільної точки цієї поверхні.

Введемо вектори

узагальнених зміщень

$$u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T;$$

компонент тензора деформацій

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23})^T;$$

усереднених характеристик зовнішнього навантаження

$$P = (p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3)^T;$$

симетричних зусиль-моментів

$$\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, N_{12}, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{13}, M_{23})^T;$$

заданих крайових зусиль-моментів

$$\sigma_g = (N_n^g, N_s^g, N_z^g, M_n^g, M_s^g, M_z^g)^T \quad \text{на } \Gamma_\sigma;$$

крайових зміщень

$$u_g = (u_n^g, u_s^g, u_z^g, \gamma_n^g, \gamma_s^g, \gamma_z^g)^T.$$

Вважаємо, що процес деформування розглядуваної оболонки супроводжується малими деформаціями при немалих кутах повороту довільного нескінченно малого об'ємного елемента оболонки, тобто має місце процес геометрично-нелінійного деформування. Крайова задача про рівновагу геометрично-нелінійних оболонок з деформівною нормаллю полягає у знаходженні такого вектора узагальнених зміщень u , що відповідні деформаційні компоненти ε , а також зусилля і моменти N_{ij} , M_{ij} задовольняють:

деформаційні співвідношення

$$\varepsilon = C_L u + \frac{1}{2} (C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega (C_\Omega u), \quad (1.2)$$

рівняння рівноваги

$$C_\sigma \sigma^* + P = 0, \quad (1.3)$$

фізичні співвідношення

$$\sigma = B\varepsilon, \quad (1.4)$$

статичні крайові умови

$$G_{\sigma} \sigma^* = \sigma_g \quad \text{на} \quad \Gamma_{\sigma} \quad (1.5)$$

кінематичні крайові умови

$$u_g = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u. \quad (1.6)$$

В формулах (1.3), (1.5) та далі символом σ^* позначено вектор видозмінених зусиль-моментів

$$\sigma^* = (N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*)^T,$$

який пов'язаний з симетричними зусиллями та моментами залежністю

$$\sigma^* = F \sigma. \quad (1.7)$$

Повний вигляд матриць C_L , C_{Ω} , E_{Ω} , C_{σ} , B , G_{σ} , F та вектора P можна знайти в праці авторів [1].

Відзначимо, що в деформаційних співвідношеннях (1.2) перший доданок відповідає лінійній складовій деформаційних компонент. За припущення, що кути повороту довільного нескінченно малого об'ємного елементу оболонки малі, другим доданком в співвідношеннях (1.2) можна знехтувати, тобто граничним переходом можна легко отримати деформаційні співвідношення лінійної теорії оболонок. Крім того, припускаючи, що кути повороту малі, з співвідношень між видозміненими та симетричними зусиллями і моментами (1.7) отримаємо, що $N_{ij}^* = N_{ji}^* = N_{ij}$, ($i, j=1,2,3$), $M_{ij}^* = M_{ji}^* = M_{ij}$, ($i, j=1,2$), $M_{13}^* = M_{13}$, $M_{23}^* = M_{23}$. Отже, оскільки рівняння рівноваги (1.3) записані в лінійній формі відносно видозмінених зусиль та моментів, то такий запис дозволяє граничним переходом легко отримати рівняння рівноваги лінійної теорії оболонок з деформівною нормаллю, а також, як частковий випадок, рівняння теорії оболонок типу Тимошенка або Кіргофа-Лява.

2. Стаціонарність потенціальної енергії. Схема методу скінченних елементів для розв'язання задачі нелінійного деформування оболонок будується на основі варіаційного принципу віртуальних робіт. В нелінійній теорії оболонок принцип Лагранжа, на відміну від лінійної теорії, можна трактувати лише як принцип стаціонарності повної потенціальної енергії, оскільки в загальному випадку нелінійного деформування потенціальна енергія може не мати єдиного мінімуму [3].

Згідно принципу Лагранжа серед всіх кінематично допустимих зміщень, які задовольняють кінематичні крайові умови (1.6) істинними будуть ті, які надають функціоналу повної потенціальної енергії

$$l(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \varepsilon^T(u) E_0 B \varepsilon(u) d\Omega - \iint_{\Omega} u^T P d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} (G_u u)^T \sigma_g d\Gamma_\sigma \quad (2.1)$$

стаціонарного значення, тобто для яких

$$\delta l(u) = 0 \quad (2.2)$$

Тут E_0 – матриця розмірності 11×11 , ненульові елементи якої рівні: $E_{ii}=1$ ($i=1,2,3,7,8$) та $E_{ii}=2$ ($i=4-6,9-11$).

Умова стаціонарності функціонала повної потенціальної енергії приводить до рівнянь рівноваги (1.3) та природних (статичних) крайових умов (1.5).

3. Знаходження стаціонарного значення функціонала повної потенціальної енергії. Позначимо через u^i , $l(u^i)$ та $u^i + \Delta u^i$, $l(u^i + \Delta u^i)$ відповідно зміщення та потенціальну енергію в початковому та суміжному станах. Розкладаючи функціонал (2.1) в ряд в околі i -го наближення до стаціонарного значення і нехтуючи членами вище квадратичних, отримаємо

$$l(u^i + \Delta u) = l(u^i) + \delta l(u^i) + \frac{1}{2} \delta^2 l(u^i). \quad (3.1)$$

Тоді приріст потенціальної енергії

$$\Delta l(u^i; \Delta u) = l(u^i + \Delta u) - l(u^i) = \delta l(u^i) + \frac{1}{2} \delta^2 l(u^i) \quad (3.2)$$

з урахуванням (2.1) після ряду перетворень можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta l(u^i; \Delta u) = & - \iint_{\Omega} (\Delta u)^T P d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} (G_u \Delta u)^T \sigma_g d\Gamma_\sigma + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [C_L \Delta u + C_N(u^i; \Delta u)]^T E_0 B [C_L \Delta u + C_N(u^i; \Delta u)] d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} [C_L \Delta u + C_N(u^i; \Delta u)]^T E_0 B \left[C_L u^i + \frac{1}{2} C_N(u^i; u^i) \right] d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [C_N(\Delta u; \Delta u)]^T E_0 B \left[C_L u^i + \frac{1}{2} C_N(u^i; u^i) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тут використано наступне позначення

$$C_N(a, b) = (C_\Omega a)^T E_\Omega C_\Omega b.$$

Використовуючи скінченноелементну ізопараметричну апроксимацію, подамо шуканий вектор зміщень у вигляді [3]

$$u = Nq, \quad (3.4)$$

де q – вектор невідомих вузлових значень зміщень, N – блочно-діагональна матриця апроксимуючих поліномів.

Перетворимо підінтегральний вираз останнього доданка в формулі (3.3). Для цього введемо вектор

$$b(u_i) = (b_1, \dots, b_{11})^T = E_0 B \left[C_L u_i + \frac{1}{2} C_N(u_i, u_i) \right] \quad (3.5)$$

і, використовуючи подання (3.4), отримаємо

$$\begin{aligned} [C_N(\Delta N q, \Delta N q)]^T E_0 B \left[C_L N q_i + \frac{1}{2} C_N(N q_i, N q_i) \right] &= \\ &= [C_N(\Delta N q, \Delta N q)]^T b(N q_i) = \\ &= (\Delta q)^T \left[\sum_{j=1}^{11} b_j(N q_i) (C_\Omega N)^T_{11} E_j C_\Omega N \right] \Delta q. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Умову стаціонарності функціонала (2.2) можна записати

$$\delta I(u^i + \Delta u) = \delta (I(u^i; \Delta u)) = 0, \quad (3.7)$$

звідки випливає умова стаціонарності квадратичної функції (3.3), яка має наступний вигляд

$$\frac{\partial I(q_i; \Delta q)}{\partial \Delta q} = K_T(q_i) \Delta q + K(q_i) q_i - R = 0 \quad (3.8)$$

В формулі (3.8) введено наступні позначення:
матриця січної жорсткості

$$K(q_i) = \iint_{\Omega} \left[(C_L + (C_\Omega N q_i)^T_{11} E_\Omega C_\Omega) N \right]^T E_0 B \left[C_L + \frac{1}{2} (C_\Omega N q_i)^T_{11} E_\Omega C_\Omega \right] N d\Omega;$$

матриця тангенціальної жорсткості

$$\begin{aligned} K_T(q_i) &= \iint_{\Omega} \left[(C_L + (C_\Omega N q_i)^T_{11} E_\Omega C_\Omega) N \right]^T E_0 B \left[C_L + (C_\Omega N q_i)^T_{11} E_\Omega C_\Omega \right] N d\Omega + \\ &+ \iint_{\Omega} \sum_{j=1}^{11} b_j(N q_i) (C_\Omega N)^T_{11} E_j C_\Omega N d\Omega; \end{aligned}$$

вектор зовнішнього вузлового навантаження

$$R = \iint_{\Omega} N^T P d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (G_u N)^T \sigma_g d\Gamma_\sigma.$$

Після розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь (3.8) відносно Δq знаходимо на $i+1$ ітерації матрицю-стовбець вузлових зміщень і поворотів

$$q_{i+1} = q_i + \Delta q, \quad (3.9)$$

при яких потенціальна енергія в першому наближенні набуває стаціонарного значення. Далі знову розв'язуємо систему (3.8) і про-

довжуємо процес уточнення значення потенціальної енергії для стану рівноваги. Алгоритм знаходження стаціонарного значення потенціальної енергії починається з допустимого розв'язку $q_0=0$. При цьому після першої ітерації отримаємо розв'язок геометрично лінійної задачі

$$K_T(0)\Delta q = R.$$

Ітераційний процес (3.8), (3.9) зупиняється після n -ої ітерації, якщо для наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ виконується наступна умова

$$\|\Delta q\| = \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\Delta q_j}{q_j^n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Тут k – число ступенів вільності всього ансамблю скінченних елементів, q_i^j – j -а компонента матриці-стовбця вузлових зміщень і поворотів після i -ої ітерації.

4. Чисельний приклад. Розглянемо задачу нелінійного деформування трансверсально ізотропної жорстко защемленої по контуру циліндричної, навантаженої зовнішнім тиском p . Серединна поверхня оболонки описується наступними параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} x(\alpha_1, \alpha_2) &= R \cos \alpha_2; & y(\alpha_1, \alpha_2) &= R \sin \alpha_2; \\ z(\alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_1; \end{aligned}$$

Параметри матеріалу та геометрія оболонки наступні: $0 \leq \alpha_1 \leq L$, $-\theta \leq \alpha_2 \leq \theta$, $h/R = 1/800$; $\rho = 1200$ кг/м³; $h = 3.175 \cdot 10^{-3}$ м; $R = 2.54$ м; $L = 0.254$ м; $\theta = 0.1$; $E = 3.1 \cdot 10^9$ Н/м²; $\nu = 0.3$; модуль зсуву $G = E/20$. З огляду на подвійну симетрію задачі розглядалась 1/4 оболонки. Задача розв'язувалась методом скінченних елементів з використанням біквадратичних апроксимацій. Залежність зміщень в центрі оболонки від різних значень навантаження $p^* = pR \cdot 10^4 / Eh$ наведена на рис.1. Криві 1 та 2 відповідають лінійному та нелінійному розв'язкам, отриманим по запропонованій в даній роботі методиці; криві 3 та 4 відображають розв'язки, отримані в роботах [4] та [5].

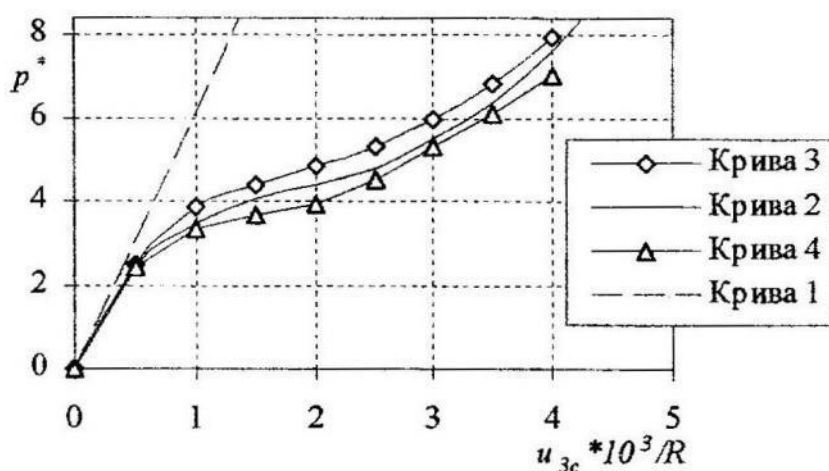


Рис. 1

1. Вагін П.П., Іванова Н.В. Нелінійне деформування багатопарових оболонок. / Львів. ун-т. – Львів, 1996. – 27 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 20.12.96 N 285 Ук96.
2. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках. // Прикладная механика, 1996, – т.32. – № 6, – с.3-40.
3. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
4. Chang T.Y., Sawamiphakdi K. Large deformation analysis of laminated shells by finite element method. // Computers and Structures. – 1981. – Vol. 13. – p. 331-340.
5. Noor A.K. Recent advances reduction methods for nonlinear problems. // Computers and Structures. – 1981. – Vol. 13. – p. 31-44.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.97

УДК 519.68

Х.С. Дороцька, Г.Г. Цегелик

Побудова та аналіз оптимальних стратегій пошуку інформації в послідовних файлах для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів

Розглядається побудова та аналіз оптимальних стратегій різних варіантів пошуку інформації в послідовних файлах, що містяться в

зовнішній пам'яті ЕОМ, для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів. При цьому за варіанти пошуку беруться: а) послідовне читання блоків записів в основну пам'ять і їх послідовний перегляд; б) послідовний перегляд записів блоку, який попередньо локалізований шляхом читання блоків в основну пам'ять і перегляду їх останніх записів; в) послідовний перегляд записів блоку, який попередньо локалізований шляхом перегляду останніх записів блоків в зовнішній пам'яті. Серед законів розподілу ймовірностей звертання до записів розглядаються: рівномірний і "бінарний" розподіли, закон Зіпфа та узагальнений розподіл (частковим випадком якого є правило "80-20"). В роботі приводяться тільки основні результати досліджень, які є продовженням досліджень, розглянутих в [1-12, 14-16]. Всі виведення, розрахунки та інша цікава інформація знаходиться в [13].

Розглянемо послідовний впорядкований файл, який знаходиться в зовнішній пам'яті ЕОМ. Припустимо, що файл містить N записів, які розбиті на n блоків по m записів у кожному. Нехай $a = b + dm$ – час читання блоку записів в основну пам'ять, де b, d – деякі константи; t і t_1 – час перегляду запису відповідно в основній і зовнішній пам'яті ($t_1 = t + b + d$); p_i – ймовірність звертання до i -го запису файла; E – математичне сподівання загального часу, необхідного для пошуку запису в файлі.

Для кожного варіанту пошуку і кожного розподілу ймовірностей звертання до записів знайдемо явний вираз для математичного сподівання і визначимо значення параметрів, при яких математичне сподівання досягає мінімуму. Після цього приведемо порівняльний аналіз ефективності варіантів пошуку для розглянутих законів розподілу ймовірностей звертання до записів.

1. Нехай пошук записів в файлі здійснюється шляхом послідовного читання блоків записів в основну пам'ять і їх послідовного перегляду. Тоді математичне сподівання загального часу, необхідного для пошуку запису в файлі, виразиться формулою

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (ai + ((i-1)m + j)t) p_{(i-1)m+j}.$$

У випадку рівномірного закону розподілу ймовірностей звертання до записів

$$E = \frac{1}{2} ((n+1)a + (mn+1)t).$$

Функція E досягає мінімуму при $m = \sqrt{\frac{Nb}{d}}$, $n = \sqrt{\frac{Nd}{b}}$.

Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють "бінарний" закон розподілу, тобто [13]

$$p_i = \frac{1}{2^i} \quad (i=1,2,\dots,N-1), \quad p_N = \frac{1}{2^{N-1}},$$

то [13]

$$E = \left(\frac{2^m}{2^m - 1} a + 2t \right) (1 - 2^{-N}).$$

Для обчислення значення параметра m , при якому функція E досягає мінімуму, маємо рівняння

$$2^m = 1 + \left(\frac{b}{d} + m \right) \ln 2.$$

Нехай ймовірності звертання до записів розподілені за законом Зіпфа, тобто

$$p_i = \frac{1}{iH_N} \quad (i=1,2,\dots,N), \quad H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Тоді [13]

$$E = \frac{1}{H_N} \left((n+1)H_N - S_m(n) \right) (a + mt) + \\ + \frac{1}{H_N} \left(\left(\frac{1}{n} S_m(n) - H_N + 1 \right) N - mH_N \right) t,$$

$$S_m(n) = \sum_{i=1}^n H_{im}.$$

Використовуючи апроксимацію $S_m(n)$ функцією $\bar{S}_m(n)$, де

$$\bar{S}_m(n) = n(H_N - 1) + \frac{1}{2} \ln n + c_1, \quad c_1 = \frac{1}{2} \ln 2\pi, \quad (1)$$

для визначення значення параметра n , при якому функція E досягає мінімуму, отримуємо таке рівняння

$$(2n-1)n = \frac{Nd}{b} (2H_N - 2c_1 + 1 - \ln n).$$

Якщо розподіл ймовірностей звертання до записів задовольняє узагальнений закон розподілу, тобто

$$p_i = \frac{1}{i^c H_N^{(c)}} \quad (i=1,2,\dots,N), \quad 0 < c < 1, \quad H_N^{(c)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^c},$$

то [13]

$$E = \frac{1}{H_N^{(c)}} \left((n+1)H_N^{(c)} - S_m^{(c)}(n) \right) (a+mt) + \\ + \frac{1}{H_N^{(c)}} \left(H_N^{(c-1)} + mS_m^{(c)}(n) - NH_N^{(c)} - mH_N^{(c)} \right) t,$$

$$S_m^{(c)}(n) = \sum_{i=1}^n H_{im}^{(c)}.$$

Використовуючи апроксимацію $S_m^{(c)}(n)$ функцією $\bar{S}_m^{(c)}(n)$, де

$$\bar{S}_m^{(c)}(n) = nH_N^{(c)} + \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}} \right), \quad (2)$$

$$\alpha^{(c)}(n) = H_n^{(c-1)} - \frac{1}{2-c} n^{2-c},$$

для наближеного визначення значення параметра n , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

$$n^{3-c} + (2-c) \left(n + \frac{2-c}{1-c} \frac{d}{b} N \right) \alpha^{(c)}(n) = \\ = (2-c) \frac{d}{b} N^c n^{1-c} H_N^{(c)} + \frac{2-c}{1-c} n \left(n + \frac{d}{b} N \right) \left(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n) \right).$$

2. Якщо використовується варіант пошуку б), то математичне сподівання виразиться формулою

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a+t) i p_{(i-1)m+j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m j t p_{(i-1)m+j}.$$

У випадку рівномірного закону розподілу ймовірностей звертання до записів

$$E = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{N}{m} + 1 \right) (b + dm + t) + (m+1)t \right),$$

а мінімальне значення функція E досягає при

$$m = \sqrt{\frac{(t+b)N}{t+d}}, \quad n = \sqrt{\frac{(t+d)N}{t+b}}.$$

Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють "бінарний" закон розподілу, то [13]

$$E = \frac{mt}{2^N} + \left(\frac{2^m}{2^m - 1} (a+t) + \left(2 - \frac{m}{2^m - 1} \right) t \right) (1 - 2^{-N}).$$

Для визначення значення параметра m , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

$$2^m = 1 + \left(\frac{b}{d} + m \right) \ln 2 - \frac{t}{d} ((m-1) \ln 2 + 2^{-m} - 1).$$

Нехай ймовірності звертання до записів розподілені за законом Зіпфа. Тоді [13]

$$E = \frac{1}{H_N} ((n+1)H_N - S_m(n))(a+t) + \frac{t}{H_N} \left(\frac{1}{n} S_m(n) - H_N + 1 \right) N.$$

Використовуючи (1), для визначення значення параметра n , при якому функція E досягає мінімуму, отримуємо таке рівняння

$$(2n-1)n = \frac{Nd}{b} (2H_N - 2c_1 + 1 - \ln n).$$

Якщо розподіл ймовірностей звертання до записів задовольняє узагальнений закон розподілу, то [13]

$$E = \frac{1}{H_N^{(c)}} \left(((n+1)H_N^{(c)} - S_m^{(c)}(n))(a+t) + (H_N^{(c-1)} + mS_m^{(c)}(n) - NH_N^{(c)})t \right).$$

Використовуючи (2), для наближеного визначення значення параметра n , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо таке рівняння

$$\begin{aligned} n^{3-c} + (2-c) \left(n + \frac{2-c}{1-c} \frac{d-t}{b+t} N \right) \alpha^{(c)}(n) = \\ = (2-c) \frac{d}{b+t} N^c n^{1-c} H_N^{(c)} + \frac{2-c}{1-c} n \left(n + \frac{d-t}{b+t} N \right) (\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)). \end{aligned}$$

3. Припустимо, що розглядається варіант пошуку в). Тоді математичне сподівання виразиться формулою

$$E = a + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m it_1 p_{(i-1)m+j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m jt p_{(i-1)m+j}.$$

У випадку рівномірного закону розподілу ймовірностей звертання до записів

$$E = b + dm + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{N}{m} + 1 \right) t_1 + (m+1)t \right),$$

а мінімальне значення E досягає при

$$m = \sqrt{\frac{t_1 N}{2d+t}}, \quad n = \sqrt{\frac{(2d+t)N}{t_1}}.$$

Якщо ймовірності звертання до записів задовольняють "бінарний" закон розподілу, то [13]

$$E = b + dm + \left(\frac{2^m}{2^m - 1} t_1 + \left(2 - \frac{m}{2^m - 1} \right) t \right) (1 - 2^{-N}) + \frac{mt}{2^N}.$$

Для визначення значення параметра m , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

$$\frac{(2^m - 1)^2}{2^m} = \left(\frac{t_1}{t} \ln 2 + 1 - m \ln 2 - 2^{-m} \right) \frac{t}{d}.$$

Нехай ймовірності звертання до записів розподілені за законом Зіпфа. Тоді [13]

$$E = b + dm + \frac{1}{H_N} \left(\left((n+1)H_N - S_m(n) \right) t_1 + \left(mS_m(n) - N(H_N - 1) \right) t \right).$$

Використовуючи (1), для обчислення значення параметра n , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

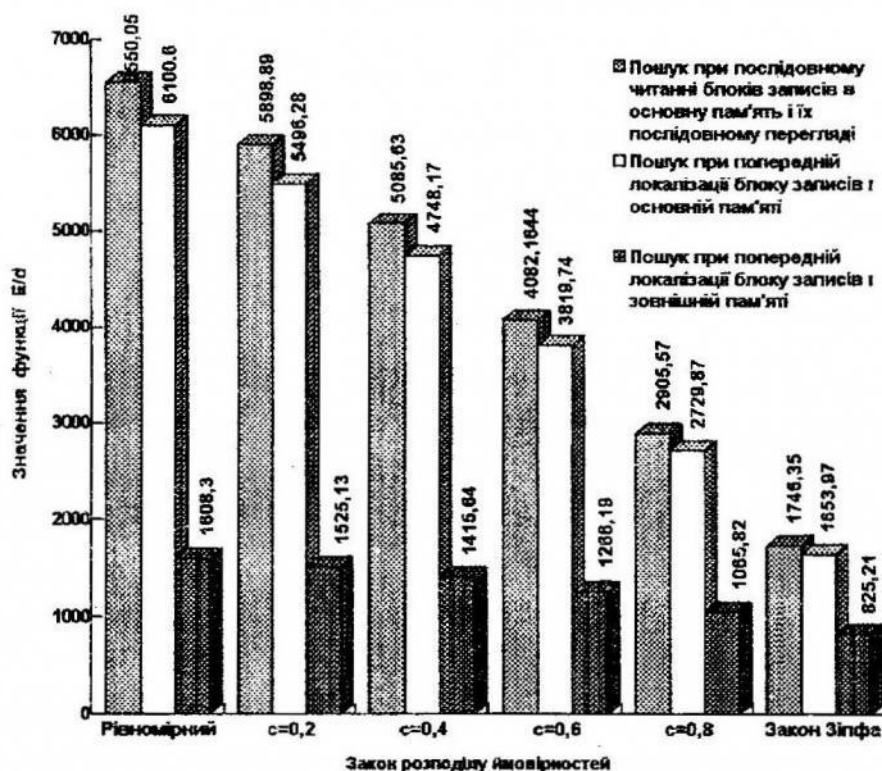
$$(2n-1)n = N \left(\frac{d}{t_1} 2H_N + \frac{t}{t_1} (2c_1 - 1 + \ln n) \right).$$

Якщо розподіл ймовірностей звертання до записів задовольняє узагальнений закон розподілу, то [13]

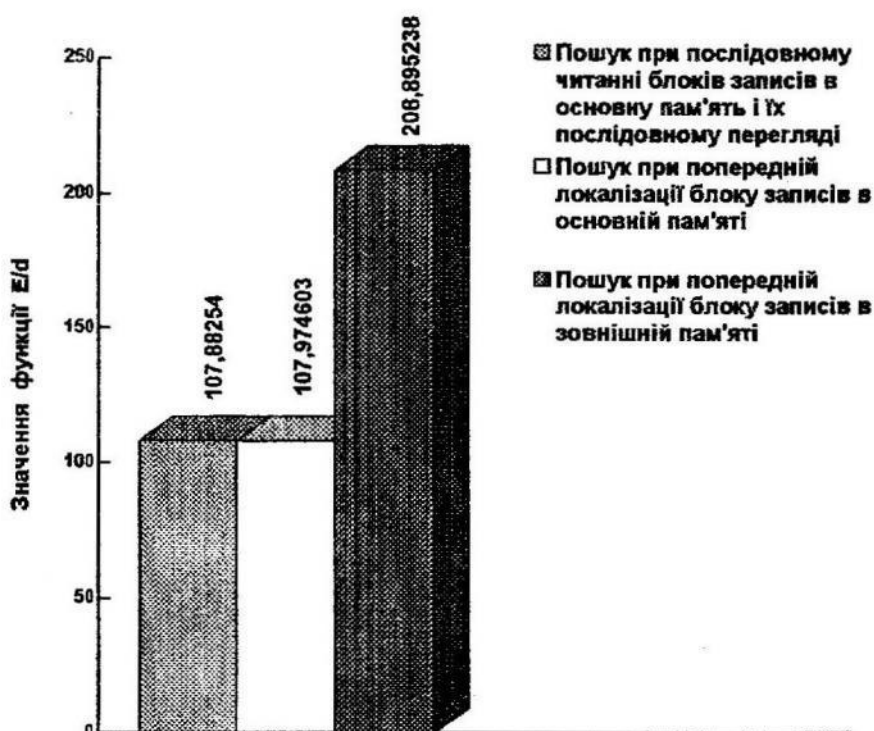
$$E = b + dm + \frac{t_1}{H_N^{(c)}} \left((n+1)H_N^{(c)} - S_m^{(c)}(n) \right) + \\ + \frac{t}{H_N^{(c)}} \left(mS_m^{(c)}(n) - NH_N^{(c)} + H_N^{(c-1)} \right).$$

Використовуючи (2), для наближеного визначення значення параметра n , при якому функція E досягає мінімуму, отримуємо таке рівняння

$$n^{3-c} + (2-c) \left(n + \frac{2-c}{1-c} \frac{t}{t_1} N \right) \alpha^{(c)}(n) = \\ = (2-c) \frac{d}{t_1} N^c n^{1-c} H_N^{(c)} + \frac{2-c}{1-c} n \left(n - \frac{t}{t_1} N \right) \left(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n) \right).$$



Діаграма 1. Оптимальні значення функції E/d для різних варіантів пошуку і різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів при $N=10000$ і $b/d=100$



Діаграма 2. Оптимальні значення функції E/d у випадку "бінарного" закону розподілу ймовірностей звертання до записів для різних варіантів пошуку і $b/d=100$

На діаграмах 1, 2 приведена картина залежності оптимальних значень функції E/d для кожного варіанту пошуку від зміни закону розподілу ймовірностей звертання до записів. На основі цієї залежності для кожного конкретного закону розподілу ймовірностей звертання до записів можна визначити свій найкращий варіант пошуку.

Використовуючи наведені діаграми, бачимо, що у випадку, коли ймовірності звертання до записів задовольняють "бінарному" розподілу, оптимальним буде варіант пошуку з послідовним читанням блоків записів в основну пам'ять і їх послідовним переглядом. Для решти законів розподілу найкращим варіантом пошуку буде варіант з попередньою локалізацією блоку записів в зовнішній пам'яті.

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.3. Сортировка и поиск.-М.: Мир, 1978.-844с.
2. Мартин Дж. Организация баз данных в вычислительных системах.-М.: Мир, 1980.-644с.
3. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных.-Львов: Вища шк., 1987.-176с.
4. Цегелик Г.Г. Оптимальна організація індексно-послідовних файлів при нерівномірному розподілі ймовірностей пошуку записів //Доп. АН УРСР. Сер.А, №3, 1987, с.70-73.
5. Цегелик Г.Г. Об оптимальной по времени поиска организации одноуровневого индекса //Исследование операций и АСУ. К., 1987, вып. 29, с.96-101.
6. Цегелик Г.Г. Оптимальные по времени поиска модели индексно-последовательных файлов при неравномерном распределении вероятностей обращения к записям //Программирование, №2, 1988, с.81-86.
7. Цегелик Г.Г. Определение параметров оптимальной организации многоуровневых индексно-последовательных файлов // Кибернетика, №2, 1988, с.74-78.
8. Цегелик Г.Г. Задача выбора оптимального числа уровней индекса в индексно-последовательной организации файлов баз данных // Докл. АН УССР. Сер.А, №7, 1988, с.82-84.
9. Цегелик Г.Г. Некоторые оптимальные модели многоуровневых индексно-последовательных файлов // Респ. межвед. науч. сб. "Модели и системы обработки информации", вып.8, 1989, с.94-98.
10. Цегелик Г.Г. Системы распределённых баз данных.-Львов: Свит, 1990.-168с.
11. Цегелик Г.Г. Оптимальные модели индекса в индексных методах организации файлов баз данных // Респ. межвед. науч. сб. "Модели и системы обработки информации", вып.9, 1990, с.28-32.
12. Цегелик Г.Г. Модели оптимальной организации и поиска информации в файлах БД // УСИМ, №7, 1991, с.28-31.
13. Кудеравец Х.С., Цегелик Г.Г. Побудова та аналіз оптимальних стратегій пошуку інформації в послідовних файлах для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів.-Львів: 1997.-70с./ Препринт (Львівський державний університет ім.І.Франка; №1-97)
14. Leipälä T. On the design of one – level indexed sequential files // Internat. J. Comput. Inform. Sei. – 1981.-V.10, N3.-P.177-186.
15. Leipälä T. On optimal multilevel indexed sequential

files //Inf.Process.Lett. 1982. Vol.15, NS. P.191-195. 16. Shneiderman B. A model for optimizing indexed file structures // Internat. J.Comput.Inform.Sci.1974, Vol.3,N1. P.93-103.

Стаття надійшла до редколегії 9.02.98

УДК 519.68

О.В.Демидович

Математичне моделювання оптимального розподілу файлів в локальних обчислювальних мережах

I. Вступ

Локальні обчислювальні мережі на базі Ethernet займають вагомий сектор мережних технологій. Однією з найбільш поширених мережних ОС є Novell NetWare. Швидкий розвиток технологій програмування зумовлює велику різноманітність програмних засобів, що використовується в мережі, а наявність мережно-орієнтованих програмних продуктів виключає необхідність тримати копію кожної програми на локальному жорсткому диску. Зростання швидкості передачі даних і зменшення затримки при передачі робить можливим використовувати спільне програмне забезпечення в локальній мережі без суттєвого погіршення швидкості роботи програм. Задача оптимального розподілу копій файлів в локальній обчислювальній мережі серед жорстких дисків серверів і локальних жорстких дисків робочих станцій не є тривіальною навіть при простих топологіях мереж. Часто неможливо визначити без детального аналізу, що є причиною повільної роботи програм в мережі – мала потужність сервера, неоптимальна топологія, низька швидкість передачі даних чи неправильне розміщення копій програм і файлів даних в мережі.

II. Побудова моделі

Нами пропонується спосіб вирішення проблеми оптимального розподілу копій файлів в локальній обчислювальній мережі. Така мережа може працювати, наприклад, під мережною ОС Novell NetWare.

В загальному випадку процес оптимального розподілу поділяється на кілька етапів:

1. Збір статистики про використання файлів.

На цьому етапі ведеться облік кожного звертання до будь-якого файлу, розміщеного на серверах Novell і нагромаджується інформація такого характеру: 1) назва файлу, 2) робоча станція, з якої відбулося звертання, 3) запис інформації чи зчитування, 4) який об'єм інформації передано на сервер, 5) який об'єм інформації передано з сервера.

В такому режимі мережа працює достатньо довгий час, щоб зібрати достовірну статистичну інформацію про звертання до файлів. Після цього періоду для кожного файлу визначаються відповідні статистичні змінні.

Нехай

N – число серверів мережі;

M – число файлів, які потрібно розподілити серед серверів;

K – число робочих станцій в мережі;

$F_i, i=1,2,\dots,M$ – ідентифікатор i -го файлу;

$S_l, l=1,2,\dots,N$ – ідентифікатор l -го сервера в мережі;

$P_j, j=1,2,\dots,K$ – ідентифікатор j -ї робочої станції в мережі.

Тоді визначаємо величини:

v_{ij} – середня частота звертання до файлу F_i з робочої станції P_j з запитом на зчитування даних;

r_{ij} – середній об'єм інформації, що передається з робочої станції P_j на сервер при запиті на зчитування файлу F_i ;

a_{ij} – середній об'єм інформації, що передається з сервера на робочу станцію P_j при обробці запиту на зчитування файлу F_i ;

v'_{ij} – середня частота звертання до файлу F_i з робочої станції P_j з запитом на запис даних;

r'_{ij} – середній об'єм інформації, що передається з робочої станції P_j на сервер при запиті на запис файлу F_i ;

a'_{ij} – середній об'єм інформації, що передається з сервера на робочу станцію P_j при обробці запиту на запис файлу F_i ;

L_i – середня довжина файлу F_i ;

2. Аналіз топології мережі.

На цьому етапі, аналізується топологія мережі і визначаються:

$S_l, l=1,2,\dots,N$ – ідентифікатор l -го сервера в мережі;

$Z_s, s=0,1,\dots,T$ – ідентифікатор s -го каналу зв'язку (якщо використовується канал Z_0 то передача заборонена);

Ω_{lj} , – множина каналів зв'язку Z_s , що використовується для доступу до сервера S_l з робочої станції P_j (якщо $\Omega_{lj} = \{\emptyset\}$, то файл-сервер знаходиться на локальному жорсткому диску даної робочої станції);

b_l – максимальний об'єм пам'яті, що відведений на сервері S_l для розміщення файлів;

$q_s, s=0,1,\dots,T$ – вартість передачі одиниці інформації по каналу Z_s ($q_0 = \infty$);

$Q_{lj} = \sum_{s \in \Omega_{lj}} q_s$ – вартість передачі одиниці інформації між сервером S_l і робочою станцією P_j .

3. Побудова математичної моделі.

На цьому етапі будується математична модель з цільовою функцією, що мінімізує середню вартість трафіка, який пересилається по мережі за одиницю часу.

Введемо шукані величини x_{il} ($i=1,2,\dots,M; l=1,2,\dots,N$), які визначаються за формулою

$$x_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо файл } F_i \text{ розміщений на сервері } S_l, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Складемо математичну модель задачі. Загальний об'єм корегуючих повідомлень (запитів на поновлення і відповідей на них) до копії файла F_i з робочої станції P_j , породжений інтенсивністю v'_{ij} , рівний $v'_{ij}(r'_{ij} + a'_{ij})$, а вартість пересилання з робочої станції P_j на сервер S_l корегуючих повідомлень до копії файла F_i , породжених інтенсивністю v'_{ij} , має значення $v'_{ij}(r'_{ij} + a'_{ij})Q_{lj}$. Тоді загальна вартість трафіка корегуючих повідомлень між робочою станцією P_j до всіх копій файла F_i , породженого інтенсивністю корегуючих повідомлень v'_{ij} , виражається формулою

$$C'_{ij} = \sum_{l=1}^N v'_{ij} (r'_{ij} + a'_{ij}) Q_{lj} x_{il}.$$

Тому вартість корегуючого трафіка, який виникає в результаті функціонування ОМ на протязі одиниці часу, визначається формулою

$$C' = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^N v'_{ij} (r'_{ij} + a'_{ij}) Q_{lj} x_{il}.$$

Загальний об'єм довідкових повідомлень (запитів на зчитування і відповідей на них), породжених запитами, які поступають з середньою частотою v_{ij} до файла F_i з робочої станції P_j , дорівнює $v_{ij}(r_{ij} + a_{ij})$, а вартість пересилання довідкових повідомлень, породжених запитами, які поступають за одиницю часу до файла F_i з робочої станції P_j , при обслуговуванні цих запитів сервером S_l , має значення $v_{ij}(r_{ij} + a_{ij})Q_{lj}$. В залежності від того, в якому вузлі вибирається копія файла F_i для обслуговування запитів, які поступають до файла F_i з робочої станції P_j , вартість пересилання повідомлень, породжених цими запитами, буде мати різне значення. Припустимо для обслуговування запитів, які поступають до файла F_i з робочої станції P_j , серед серверів S_l , на яких розміщені копії файла F_i (тобто для яких $x_{il} = 1$), вибирається такий сервер S_l , якому відповідає мінімальна вартість передачі одиниці інформації між сервером і робочою станцією P_j (тобто для якого виконується $\min_{l: x_{il}=1} Q_{lj}$). Таким чином, вартість довідкового трафіка, який виникає в результаті функціонування ОМ на протязі одиниці часу, виражається формулою

$$C = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K v_{ij} (r_{ij} + a_{ij}) \min_{l: x_{il}=1} Q_{lj}.$$

Оскільки максимальний об'єм пам'яті, що відведений на сервері S_l для розміщення файлів рівний b_l , а середня довжина файла F_i рівна L_i , то $\sum_{i=1}^M L_i x_{il} \leq b_l$ ($l=1,2,\dots,N$). Оскільки кожен файл повинен мати хоча б одну копію, але не більше ніж по одній на кожному сервері, то $1 \leq \sum_{l=1}^N x_{il} \leq N$ ($i=1,2,\dots,M$). В результаті математична модель має вигляд:

$$Q = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K v_{ij} (r_{ij} + a_{ij}) \min_{l: x_{il}=1} Q_{lj} + \\ + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^N v'_{ij} (r'_{ij} + a'_{ij}) Q_{lj} x_{il} \rightarrow \min$$

за умов

$$1 \leq \sum_{l=1}^N x_{il} \leq N \quad (i=1,2,\dots,M); \\ \sum_{i=1}^M L_i x_{il} \leq b_l \quad (l=1,2,\dots,N); \\ x_{il} \in (0 \cup 1) \quad (i=1,2,\dots,M; l=1,2,\dots,N).$$

4. Знаходження оптимального розв'язку математичної моделі.

Розв'язок задачі знаходиться за допомогою методів математичного програмування. Нами пропонується для розв'язування такої задачі використовувати генетичний алгоритм.

5. Перерозподіл файлів.

Системний адміністратор мережі перерозподіляє файли в мережі так, щоб вони відповідали знайденому оптимальному розподілу.

Крім оптимізації розподілу файлів при фіксованій топології, можна розглядати задачу оптимізації топології при фіксованому розподілі файлів.

Стаття надійшла до редакції 22.12.97

УДК 519.6

Н.М.Щербина, Ю.М.Щербина

Застосування методу лінеаризації до задачі оптимізації композитної оболонки

Задачі оптимального проектування композитних оболонок формуються як задачі нелінійного програмування, у багатьох випадках неопуклі. Ефективним методом розв'язання таких задач є метод лінеаризації [1] та його різні варіанти [3,4]. Застосування композитних матеріалів дозволяє регулювати механічні властивості елементів кон-

струкцій із них за рахунок вибору структури матеріалу. Таким чином, параметрами оптимізації доцільно вибирати не лише геометричні, а й структурні параметри, наприклад, коефіцієнти об'ємного армування, кути армування, відносний вміст армувальних волокон тощо.

Розглядається задача оптимального проектування композитної оболонки за критерієм мінімізації маси. Циліндрична оболонка завтовшки h , радіуса R і довжини l стискається в осьовому напрямку силою P . Оболонка виготовлена з склопластика армованого у двох взаємно перпендикулярних напрямках, які збігаються з осьовим і окружним напрямками.

Вважатимемо, що коефіцієнт об'ємного армування μ є величиною сталою і змінюється лише вміст армувальних волокон в обох напрямках. Нехай E_a і E_c модулі пружності складових композиту (арматури та сполучника відповідно) і $E_a \gg E_c$, тоді для модулів пружності оболонки E_1 та E_2 у кожному з напрямків можна прийняти

$$E_1 = E\theta, \quad E_2 = E(1 - \theta),$$

де E визначається модулем пружності E_a і коефіцієнтом армування μ ; θ – відносний вміст армувальних волокон в осьовому напрямку [2].

Функція мети – маса оболонки – визначається за формулою

$$G = 2\pi\rho Rlh,$$

де $\rho = \rho_a + (1 - \mu)\rho_c$ – густина композитного матеріалу, ρ_a та ρ_c – густини арматури та сполучника відповідно.

На проект оболонки накладаються геометричні та фізичні обмеження. Геометричні обмеження визначають інтервали зміни деяких геометричних параметрів проекту. Фізичні обмеження – це обмеження на механічну поведінку конструкції під дією зовнішніх чинників. Ці обмеження відображають вимоги щодо жорсткості, міцності, стійкості об'єкта, які не знайшли відображення у функції мети. Структурні обмеження по суті пов'язані зі специфікою задачі оптимізації композитної оболонки і відображають структуру будови матеріалу.

Параметрами оптимізації вважатимемо товщину оболонки h , її радіус R та відносний вміст армувальних волокон θ . Введемо позначення: $x_1 = h$, $x_2 = R$, $x_3 = \theta$. Тоді задача оптимізації оболонки при наявності обмежень місцевої і загальної втрати стійкості та міцності формулюється так:

$$G(x_1, x_2, x_3) \equiv 2\pi\rho l x_1 x_2 \rightarrow \min$$

за умов

$$\frac{P}{B} x_1^{-2} x_3^{-\frac{1}{2}} (1 - x_3)^{-\frac{1}{2}} - 1 \leq 0,$$

$$\frac{P}{C} x_1^{-1} x_2^{-3} x_3^{-1} - 1 \leq 0,$$

$$\frac{P}{D} x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-\frac{2}{3}} - 1 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 30,$$

$$0 \leq x_3 \leq 1,$$

де $B = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} E$, $C = \pi^3 l^{-2} E$, $D = 2\pi \sigma_0$, σ_0 – міцність матеріалу оболонки на стиск в осьовому напрямку.

Розрахунок оптимального проекту здійснений для композитної оболонки з такими характеристиками: $E = 3.43 \cdot 10^6$ н/см², $P = 9.81 \cdot 10^5$ н/см², $\sigma_0 = 3.92$ н/см², $l = 20$ см, $\rho = 1.9 \cdot 10^{-3}$ кг/см³. У результаті розв'язування сформульованої задачі модифікацією методу лінеаризації з [4] знайдені оптимальні значення $h^* = 0.397$ см, $R^* = 30$ см, $\theta^* = 0.5$. Цим значенням параметрів відповідає оптимальне (мінімальне) значення маси оболонки $G^* = 2.84$ кг.

У широкому діапазоні зміни вихідних даних задачі на основі проведених обчислень встановлений їх вплив на оптимальні розв'язки.

1. Пшеничный Б. Н. Метод линеаризации. М.: Наука, 1983, 136 с.
2. Тетерс Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига: Зинатне, 1978, 240 с.
3. Щербина Ю. Н., Голуб Б. М. Квазиньютоновская модификация метода линеаризации // Кибернетика, 1988, №6. С.66-71.
4. Щербина Ю. Н., Голуб Б. М. Модификация метода линеаризации для решения задачи математического программирования на простом множестве типа "параллелепипеда" // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1989, вып. 30. С. 24-28.

Стаття надійшла до редколегії 23.09.97

М.В.Жук, А.Ю.Кіндибалюк

Розв'язування деякого нелінійного диференціального рівняння методом Канторовича

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv - \frac{\partial p \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial q \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial y} = f(x, y) \quad (1)$$

при однорідній крайовій умові

$$Pu|_{\Gamma} = \left[p \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(v, x) + q \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(v, y) \right]_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де Γ – межа області D , обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y – достатньо гладкими кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x) < h(x)$, v – зовнішня нормаль до Γ .

Відносно заданих функцій припускаємо, що $p(x, y, s, t, z)$, $q(x, y, s, t, z)$ вимірні при $(x, y) \in D$, $-\infty < s, t, z < +\infty$, диференційовані за змінними s, t, z , причому

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial p}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial q}{\partial s} \right| \right\} \leq M_1, \max \left\{ \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial q}{\partial z} \right| \right\} \leq M_2,$$

де $M_1, M_2 - \text{const}$.

Не обмежуючи загальності можемо вважати, що $p(x, y, 0, 0, 0) = 0$, $q(x, y, 0, 0, 0) = 0$.

Введемо допоміжний оператор T , який визначається за формулами

$$Tu = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(v, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(v, y) \right]_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

За область визначення $D(T)$ оператора T приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x, y)$ в замкнутій області $\bar{D}$, які задовольняють крайовій умові (4) і рівнянню

$$\iint_D u dx dy = 0. \quad (5)$$

Тоді на лінеалі $D(T)$ оператор T буде додатно визначеним. Дійсно, використовуючи нерівність Пуанкаре

$$\iint_D u dx dy \leq C_1 \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + C_2 \left(\iint_D u dx dy \right)^2,$$

де C_1, C_2 – додатні постійні. Для симетричного оператора T маємо

$$(Tu, u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad (6)$$

де $\gamma = \frac{1}{\sqrt{C_1}}$.

Позначимо через $H_T \subset H$ енергетичний простір оператора T , тобто замикання $D(T)$ в метриці

$$[u, v]_T = (Tu, v) = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$|u|_T^2 = [u, u]_T.$$

При цьому функції із енергетичного простору H_T мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом в області D , і крайова умова (4) природна. Крім того, функції $u(x, y)$ із енергетичного простору H_T задовольняють умові (5).

Із нерівності (6) внаслідок граничного переходу для довільного $u \in H_T$ отримуємо

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|_T. \quad (7)$$

Для довільних $u, v \in H_T$ формально введемо квазібілінійну форму

$$A(u, v) \equiv \iint_D \left[p \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + q \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy$$

Припускаємо, що при $(x, y) \in \bar{D}$ і довільних s, t, z виконується нерівність

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} \xi_1^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t} \right) \xi_1 \xi_2 + \frac{\partial q}{\partial z} \xi_2^2 + \frac{\partial p}{\partial s} \xi_1 \xi_0 + \frac{\partial q}{\partial s} \xi_2 \xi_0 \geq \\ \geq M(\xi_1^2 + \xi_2^2) + N \xi_0^2, \end{aligned}$$

де $M = \text{const} > 0$, $N = \text{const}$, причому співвідношення між постійними M , N і γ такі, що для константи μ , яка визначається співвідношенням

$$\mu = \begin{cases} M, & \text{коли } N \geq 0, \\ M + \frac{N}{\gamma^2}, & \text{коли } N < 0, \end{cases}$$

виконується умова $\mu > 0$.

Тоді для довільних $u, v, w \in H_T$, аналогічно як і в праці [2], можна встановити нерівності

$$A(u, u - v) - A(v, u - v) \geq \mu |u - v|_T^2, \quad (8)$$

$$A(u, w) - A(v, w) \leq \eta |u - v|_T |w|_T, \quad (9)$$

$$\text{де } \eta = \frac{\sqrt{2}M_1}{\gamma} + 2M_2.$$

Відомо (див., наприклад, [1]), що виконання умов (8), (9) забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку $u \in H_T$ задачі (1)–(2).

Задачу (1)–(2) розв'язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y), \quad (10)$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x, y)$ вибираються із умови, щоб система функцій $\{\chi_e(x) \varphi_k(x, y)\} \in H_T$ була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі H_T . Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо із системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Au_n - f) \varphi_i dy + \varphi_i \sqrt{1 + (y')^2} Pu_n|_{y=g(x)} +$$

$$+\varphi_i \sqrt{1+(y')^2} Pu_n|_{y=h(x)} = 0 \quad (11)$$

при умовах

$$\int_{g(a)}^{h(a)} \varphi_i Pu_n|_{x=a} dy = 0, \int_{g(b)}^{h(b)} \varphi_i Pu_n|_{x=b} dy = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду

$$v_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \varphi_k(x, y).$$

Узагальненим розв'язком системи методу Канторовича (11)–(12) називається функція $u_n(x, y) \in H_n \cap H_T$, що задовольняє тотожності

$$A(u_n, v_n) = \iint_D f v_n dx dy$$

при довільній функції $v_n(x, y) \in H_n \cap H_T$.

Аналогічно, як і у праці [2], доводиться наступна теорема.

Теорема. Якщо обмеження на вихідні дані задачі (1)–(2) такі, що виконуються умови (8)–(9), то для довільної функції $f(x, y) \in H$ задача (1)–(2) має єдиний узагальнений розв'язок $u(x, y) \in H_T$; при довільному n система методу Канторовича (11)–(12) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(x, y) \in H_n \cap H_T$ і справедливі співвідношення

$$|u - u_n|_T \rightarrow 0, \quad (13)$$

при $n \rightarrow \infty$, та оцінка

$$|u - u_n|_T \leq C |u - v_n|_T, \quad (14)$$

де $C = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$, а v_n – елемент, що реалізує мінімум функціоналу $|u - v_n|_T$.

Зауваження 1. Якщо вихідне диференціальне рівняння (1) розглядається у вигляді

$$Au \equiv - \frac{\partial p \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial q \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial y} = f(x, y), \quad (15)$$

то нерівність (8) випливає із умови еліптичності для рівняння (15).

Зауваження 2. Координатну систему функцій можна вибрати згідно рекомендацій праці [3] у вигляді

$$\varphi_k(x, y) = \cos\left(\frac{kn(y - g(x))}{h(x) - g(x)}\right), k = 1, 2, \dots$$

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М.: 1974. 2. Жук М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь. //Укр. матем. журн. 1976. Т.28. №2. С.183–193. 3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

Стаття надійшла до редколегії 3.09.97

УДК 519.6

Бартіш М.Я., Чипурко А.І.

Дослідження одного рекурсивного методу розв'язування задачі про найменші квадрати

Розглянемо постановку задачі про найменші квадрати:

$$\text{знайти } \min \frac{1}{2} F(x)^T F(x) \quad (1)$$

де $F(x):R^n \rightarrow R^m$ – нелінійна по x , $m \geq n$.

На практиці для розв'язування (1) найчастіше використовують метод Гаусса-Ньютона [1]. Даний метод на кожному кроці вимагає обчислення матриці Якобі функції $F(x)$, що у випадку складності функції є операцією трудомісткою.

В цій роботі пропонується рекурсивна модифікація методу Гаусса-Ньютона:

$$\begin{aligned} x_k^{v+1} &= x_k^v - \left[F'(x_k)^T F'(x_k) \right]^{-1} F'(x_k)^T F(x_k^v), \\ x_{k+1}^0 &= x_{k+1}^t = x_k^t, \quad x_0^0 = x_0, \\ v &= 0, 1, \dots, t-1, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

В методі (2) матриця $F'(x_k)$ обчислюється один раз на t кроків, що дозволяє значно зменшити кількість обчислень.

Умови збіжності та оцінки швидкості збіжності методу дає

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

- 1) $F(x)$ – двічі неперервно-диференційовна в області $D \subset R^n$;
- 2) $\forall x \in D \quad \|F'(x)\| \leq C, \quad \|F''(x)\| \leq M$;
- 3) $\forall x \in D$ існує обернений оператор $[F'(x)^T F'(x)]^{-1}$, причому $\|[F'(x)^T F'(x)]^{-1}\| \leq B$;
- 4) в області D існує точка x^* , яка є розв'язком задачі (1), причому $F(x^*) = 0$;
- 5) існує константа $\eta_0 > 0$, така що $h_0 = l\eta_0 < 1$, де $l = \frac{3BCM}{2}$.

Тоді для будь-якого початкового наближення $x_0 \in \Omega_0 = \{x: \|x - x^*\| < \eta_0\} \subset D$ послідовність $\{x_k\}$, породжена методом (2), коректно визначена та збігається до x^* і має місце оцінка

$$\|x_k - x^*\| \leq h_0^{(t+1)^t - 1} \eta_0. \quad (3)$$

Доведення. Покажемо справедливість (3) для $k = 1$. Застосуємо метод математичної індукції по $\nu = 0, 1, \dots, t-1$.

Оскільки $x_k^0 = x_k \quad \forall k = 0, 1, \dots$, то кожен крок при $\nu = 0$ методу (2) співпадає з кроком методу Гаусса-Ньютона. В даному випадку для $\nu = 0$ неважко отримати оцінку

$$\|x_0^1 - x^*\| \leq \frac{BCM}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \leq l\eta_0^2 = h_0 \eta_0. \quad (4)$$

Для $\nu = 1$ запишемо тотожність:

$$\begin{aligned} x_0^2 - x^* &= x_0^1 - x^* - [F'(x_0)^T F'(x_0)]^{-1} F'(x_0)^T (F(x_0^1) - F(x^*)) = \\ &= [F'(x_0)^T F'(x_0)]^{-1} F'(x_0)^T \{F'(x_0)(x_0^1 - x^*) - (F(x_0^1) - F(x^*))\}. \end{aligned}$$

Використавши розклад $F(x)$ в околі точки x^* у ряд Тейлора, отримаємо

$$\begin{aligned} x_0^2 - x^* &= [F'(x_0)^T F'(x_0)]^{-1} F'(x_0)^T \left\{ (F'(x_0) - F'(x^*))(x_0^1 - x^*) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 F''(x^* + \tau(x_0^1 - x^*))(1 - \tau) d\tau (x_0^1 - x^*)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \|x_0^2 - x^*\| &\leq BCM \|x_0 - x^*\| \|x_0^1 - x^*\| + \frac{BCM}{2} \|x_0^1 - x^*\|^2 \leq \\ &\leq \frac{3BCM}{2} \|x_0 - x^*\| \|x_0^1 - x^*\| \leq l\eta_0 h_0 \eta_0 = h_0^2 \eta_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Нехай $\|x_0^{t-1} - x^*\| \leq h_0^{t-1} \eta_0$, тоді для $\nu = t-1$, аналогічно (5) отримаємо

$$\|x_0^t - x^*\| \leq \frac{3BCM}{2} \|x_0 - x^*\| \|x_0^{t-1} - x^*\| \leq l\eta_0 h_0^{t-1} \eta_0 = h_0^t \eta_0, \quad (6)$$

або $\|x_1 - x^*\| \leq h_0^t \eta_0.$

Припустимо, що твердження теореми справедливі для послідовності наближень $x_2, x_3, \dots, x_k$. Тоді має місце оцінка

$$\|x_k - x^*\| \leq h_0^{(t+1)^k - 1} \eta_0 \quad \text{і при}$$

$\nu = 0$ отримаємо

$$\|x_k^1 - x^*\| \leq \frac{BCM}{2} \|x_k - x^*\|^2 \leq l h_0^{2(t+1)^k - 2} \eta_0^2 = h_0^{2(t+1)^k - 1} \eta_0.$$

При $\nu = 1$, аналогічно (5), маємо

$$\|x_k^2 - x^*\| \leq \frac{3BCM}{2} \|x_k - x^*\| \|x_k^1 - x^*\| \leq l h_0^{(t+1)^k - 1} \eta_0 h_0^{2(t+1)^k - 1} \eta_0 = h_0^{3(t+1)^k - 1} \eta_0.$$

Неважко показати, що $\|x_k^t - x^*\| = \|x_{k+1} - x^*\| \leq h_0^{(t+1)^{k+1} - 1} \eta_0$.

Теорема доведена.

Розглянемо різницевий аналог методу (2)

$$x_k^{\nu+1} = x_k^\nu - [F(x_k, \bar{x}_k)^T F(x_k, \bar{x}_k)]^{-1} F(x_k, \bar{x}_k)^T F(x_k^\nu), \quad (7)$$

$$x_{k+1}^0 = x_{k+1}^t = x_k^t, \quad x_0^0 = x_0, \quad \bar{x}_k - \text{близьке до } x_k,$$

$$\nu = 0, 1, \dots, t-1, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тут $F(x, y)$ – перша поділена різниця [2].

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

- 1) $F(x)$ – неперервна в області $D \subset R^n$;
- 2) $\forall x, y \in D \quad \|F(x, y)\| \leq C$;
- 3) $\forall x, y, z \in D \quad \|F(x, y, z)\| \leq M$, де $F(x, y, z)$ – друга поділена різниця;
- 4) $\forall x, y \in D$ існує обернений оператор $[F(x, y)^T F(x, y)]^{-1}$, причому $\|[F(x, y)^T F(x, y)]^{-1}\| \leq B$;

5) в області D існує точка x^* , яка є розв'язком задачі (1), причому $F(x^*) = 0$;

6) $\|\bar{x}_k - x_k\| < \|x_k - x^*\| \quad \forall k = 0, 1, \dots$;

7) існує константа $\eta_0 > 0$, така що $h_0 = l\eta_0 < 1$, де $l = 4BCM$.

Тоді $\forall x_0 \in \Omega_0 = \{x: \|x - x^*\| < \eta_0\} \subset D$ послідовність $\{x_k\}$, породжена методом (7), коректно визначена та збігається до x^* і має місце оцінка:

$$\|x_k - x^*\| \leq h_0^{(t+1)^k - 1} \eta_0. \quad (8)$$

Доведення. Перевіримо справедливості твердження для $k = 1$. Застосуємо метод математичної індукції для $\nu = 0, 1, \dots, t-1$.

Використовуючи (7), запишемо тотожність:

$$x_0^1 - x^* = \left[F(x_0, \bar{x}_0)^T F(x_0, \bar{x}_0) \right]^{-1} F(x_0, \bar{x}_0)^T \left\{ F(x_0, \bar{x}_0)(x_0 - x^*) - F(x_0) \right\}.$$

Скориставшись аналогом інтерполяційної формули Ньютона [2], враховуючи умову 5 теореми 2, можемо записати

$$F(x_0) = F(x_0, x^*)(x_0 - x^*).$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} x_0^1 - x^* &= \left[F(x_0, \bar{x}_0)^T F(x_0, \bar{x}_0) \right]^{-1} F(x_0, \bar{x}_0)^T (F(x_0, \bar{x}_0) - F(x_0, x^*)) \times \\ &\times (x_0 - x^*) = \left[F(x_0, \bar{x}_0)^T F(x_0, \bar{x}_0) \right]^{-1} F(x_0, \bar{x}_0)^T F(x_0, \bar{x}_0, x^*)(\bar{x}_0 - x^*) \times \\ &\times (x_0 - x^*) \text{ і} \end{aligned}$$

$$\|x_0^1 - x^*\| \leq BCM \|\bar{x}_0 - x_0 + x_0 - x^*\| \|x_0 - x^*\| \leq 2BCM \eta_0^2 = h_0 \eta_0.$$

Для $\nu = 1$ маємо

$$\begin{aligned} x_0^2 - x^* &= \left[F(x_0, \bar{x}_0)^T F(x_0, \bar{x}_0) \right]^{-1} F(x_0, \bar{x}_0)^T (F(x_0, \bar{x}_0) - F(x_0, x^*) + \\ &+ F(x_0, x^*) - F(x_0^1, x^*)) (x_0^1 - x^*) = \left[F(x_0, \bar{x}_0)^T F(x_0, \bar{x}_0) \right]^{-1} F(x_0, \bar{x}_0)^T \times \\ &\times (F(x_0, \bar{x}_0, x^*)(\bar{x}_0 - x^*) + F(x_0, x_0^1, x^*)(x_0 - x_0^1))(x_0^1 - x^*). \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \|x_0^2 - x^*\| &\leq BCM (\|\bar{x}_0 - x_0 + x_0 - x^*\| + \|x_0 - x^*\| + \|x_0^1 - x^*\|) \|x_0^1 - x^*\| \leq \\ &\leq 4BCM \|x_0 - x^*\| \|x_0^1 - x^*\| \leq l\eta_0 h_0 \eta_0 = h_0^2 \eta_0. \end{aligned}$$

Легко бачити, що для $\nu = t-1$ $\|x_0^t - x^*\| \leq h_0^t \eta_0$ тобто $\|x_1 - x^*\| \leq h_0^t \eta_0$.

Аналогічно попередній теоремі неважко показати, що

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq h_0^{(t+1)^{k+1}-1} \eta_0.$$

Теорема доведена.

Використовуючи результати теорем, можна розглянути питання про вибір оптимальної глибини рекурсії t_{opt} з метою отримання результату з заданою точністю ε за мінімальне число обчислень.

Позначимо через K_1 кількість обчислень необхідних для переходу від x_k^0 до x_k^1 , $k=0,1,\dots$, а через K_2 – кількість обчислень необхідних для переходу від x_k^v до x_k^{v+1} , $v=1,\dots,t-1$, $k=0,1,\dots$. Очевидно, що $K_1 \gg K_2$. Таким чином, на кожній ітерації методу (2) виконується $K_1 + (t-1)K_2$ обчислень, а для того, щоб отримати k -те наближення потрібно виконати $(K_1 + (t-1)K_2)k$ обчислень.

Отже, для визначення оптимальної глибини рекурсії маємо задачу

$$(K_1 + (t-1)K_2)k \rightarrow \min_t$$

при обмеженнях $h_0^{(t+1)^k-1} \eta_0 \leq \varepsilon$.

Для знаходження розв'язку даної задачі маємо рівняння

$$(1+t^*) \ln(1+t^*) = \frac{K_1}{K_2} + t^* - 1,$$

а за оптимальну глибину рекурсії вибираємо число $t_{opt} = [t^* + 0.5]$, де $[]$ -ціла частина числа.

Відзначимо, що K_1 та K_2 можна замінити величинами T_1 та T_2 , які є часом, необхідним для обчислення x_k^1 при заданому x_k^0 та x_k^{v+1} при заданому x_k^v , $v=1,\dots,t-1$ відповідно.

1. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М. Мир, 1988. – 440 с. 2. Ульм С.Ю. Об обобщенных разделенных разностях. I. Изд. АН ЭССР. Физика., Матем., 1967, 16, N1, С.13-26.

Стаття надійшла до редколегії 26.11.97

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

Наближене розв'язування деяких граничних задач теорії потенціалу методом інтегральних рівнянь без використання кубатурних формул

Позначимо через M , N , P і т.д. точки в $\mathbf{R}^3$, а $R(M, N) := \text{dist}(M, N)$. Припустимо, що в $\mathbf{R}^3$ міститься сукупність гладких розімкнених поверхонь $S := \bigcup_{i=1}^m S_i$, які не мають спільних точок та точок самоперетину. Нехай $\bar{S}_i := S_i \cup \mathcal{A}_i$, де $\mathcal{A}_i$ – кусково гладкий контур скінченної довжини, який обмежує S_i , а $\bar{S} := \bigcup_{i=1}^m \bar{S}_i$. Поки що вважатимемо S однією розімкненою поверхнею. Доповнимо довільним чином S поверхнею S_0 так, щоб їхнім об'єднанням була деяка замкнена поверхня $\Sigma := S \cup S_0$. Область, обмежену Σ , позначимо Ω_+ . Тоді $\Omega_- := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_+$, а $\Omega := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}$. Введемо такі функціональні простори:

$$L_2(\Omega_{\pm}) := \left\{ u(x) \mid \int_{\Omega_{\pm}} |u(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

$$H^1(\Omega_{\pm}) := \left\{ u(x) \mid u(x), |\nabla u(x)| \in L_2(\Omega_{\pm}) \right\},$$

$$H^1(\Omega_{\pm}, \Delta) := \left\{ u(x) \mid u(x) \in H^1(\Omega_{\pm}), \Delta u(x) \in L_2(\Omega_{\pm}) \right\},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega_{\pm})}^2 := \|u\|_{L_2(\Omega_{\pm})}^2 + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_{\pm})}^2,$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega_{\pm}, \Delta)}^2 := \|u\|_{H^1(\Omega_{\pm})}^2 + \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_{\pm})}^2,$$

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}, \quad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Розглянемо оператор сліду [1] $\gamma_0^{\pm}: H^1(\Omega_{\pm}) \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)$. Нехай також

$$H^1(\Omega) := \{u(x) \mid u(x), |\nabla u(x)| \in L_2(\Omega)\},$$

$$H^1(\Omega, \Delta) := \{u(x) \mid u(x) \in H^1(\Omega), \Delta u(x) \in L_2(\Omega)\}.$$

Норми в просторах $H^1(\Omega)$ і $H^1(\Omega, \Delta)$ задають аналогічно. Визначимо простір $H^{1/2}(S)$ як звуження функцій із $H^{1/2}(\Sigma)$ на S . Якщо $C_0^\infty(S)$ – лінійний простір нескінченно диференційованих на Σ функцій із компактним носієм у S , тобто $\text{supp}(u) \subset S$, то $H_{00}^{1/2}(S)$ – замикання $C_0^\infty(S)$ по нормі $H^{1/2}(\Sigma)$. Нехай $\omega(x)$ – достатньо гладка функція, що обертається в нуль при наближенні до $\partial\mathcal{S}$ як $R(x, \partial\mathcal{S})$. Тоді $H_{00}^{1/2}(S)$ можна трактувати наступним чином:

$$H_{00}^{1/2}(S) := \{u(x) \mid u(x) \in H^{1/2}(S), \omega^{-1/2}u \in L_2(S)\}.$$

Введемо також деякі простори функціоналів:

$$(H^{1/2}(S))' := \{f \mid f \in H^{-1/2}(\Sigma), \text{supp}(f) \in S\},$$

$$H^{-1/2}(\Sigma) := (H^{1/2}(\Sigma))', \quad (H^{1/2}(S))' \subset (H_{00}^{1/2}(S))'.$$

Розглянемо таку задачу: потрібно знайти функцію $u(P)$, визначену в області Ω з класу $H^1(\Omega, \Delta)$, яка задовольняє умови:

$$\Delta u(P) = 0, \quad P \in \Omega, \quad (1)$$

$$\gamma_0^\pm u = g_\pm(P), \quad P \in S, \quad (2)$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} u(P) = 0, \quad P \in \Omega, \quad (3)$$

де $g_\pm(P) \in H^{1/2}(S)$. Зауважимо, що $g_\pm(P)$ – значення шуканої функції на граничній поверхні відповідно з додатньої та від'ємної сторони.

Якщо розв'язок задачі (1)–(3) існує, то його необхідно шукати у вигляді:

$$u(P) := \int_S K(P, M) \tau(M) dS_M - u_0(P), \quad P \in \Omega, \quad (4)$$

$$\text{де } u_0(P) := \int_S \frac{\partial K(P, M)}{\partial n_M} [g(M)] dS_M, \quad [g(M)] := g_-(M) - g_+(M) \in H_{00}^{1/2}(S),$$

$M \in S$, $K(P, M) := 1/(4\pi R(P, M))$ – фундаментальний розв'язок

рівняння Лапласа в $\mathbf{R}^3$, а $\tau(M)$ – розв'язок інтегрального рівняння першого роду

$$K\tau := \int_S K(P, M)\tau(M)dS_M = g_0(P), \quad P \in S, \quad (5)$$

причому $g_0(P) := \frac{1}{2}(g_-(M) + g_+(M)) + u_0(P)$, $P \in S$. І навпаки,

функція $u(P)$, яка задається виразом (4), де $\tau(M) \in (H^{1/2}(S))'$ задовольняє рівняння (5), є розв'язком задачі (1)–(3). В роботі [2] показано, що оператор $K: (H^{1/2}(S))' \rightarrow H^{1/2}(S)$ – ізоморфізм.

Таким чином, за допомогою інтегрального представлення (4) початкова задача у диференціальній постановці зведена до розв'язування інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю в ядрі, яке має єдиний розв'язок для будь-якої функції $g_0(P)$ з $H^{1/2}(S)$.

Інтегральне рівняння (5) у загальному випадку є двовимірним. Дійсно, нехай у прямокутній системі координат $OXYZ$ поверхня S задана параметричними рівняннями $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$, $z = z(\alpha, \beta)$ ($-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$). В (5) перейдемо від поверхневого інтегралу до подвійного. Для цього обчислимо якобіан переходу $J(\alpha, \beta)$ за формулою $J(\alpha, \beta) := [E(\alpha, \beta)G(\alpha, \beta) - F^2(\alpha, \beta)]^{1/2}$, де

$$E(\alpha, \beta) := (x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2 + (z'_\alpha)^2, \quad G(\alpha, \beta) := (x'_\beta)^2 + (y'_\beta)^2 + (z'_\beta)^2,$$

$$F(\alpha, \beta) := x'_\alpha x'_\beta + y'_\alpha y'_\beta + z'_\alpha z'_\beta$$

– коефіцієнти першої квадратичної форми. Тоді (5) набуває вигляду:

$$\iint_D \hat{K}(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta) J(\alpha, \beta) \hat{\tau}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \hat{g}(\alpha_0, \beta_0), \quad (6)$$

де $-1 \leq \alpha_0, \beta_0 \leq 1$, $D := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Припустимо, що в $\mathbf{R}^3$ міститься сукупність чотирикутних пластин $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$, які не мають спільних точок і визначаються своїми вершинами. Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля в області Ω , якщо на безмежно тонких ("без товщини") металевих пластинах S_i задане граничне значення потенціалу. При такому розумінні

поверхонь S_i гранична функція не залежить від сторони пластини: $g(P) := g_-(M) = g_+(M)$, $P \in S$. Отже, умова (2) набуває вигляду:

$$\gamma_0 u = g_i(P), \quad P \in S_i.$$

Нехай вершини пластини мають координати: (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, 4}$. Відповідні параметричні рівняння можна подати так:

$$\begin{cases} x_i(\alpha, \beta) := \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 x_{ij} \varphi_j(\alpha, \beta), & \varphi_j(\alpha, \beta) := (1 + (-1)^p \alpha) (1 + (-1)^q \beta), \\ y_i(\alpha, \beta) := \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 y_{ij} \varphi_j(\alpha, \beta), & p := \left[\frac{j}{2} \right] + 1, \\ z_i(\alpha, \beta) := \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 z_{ij} \varphi_j(\alpha, \beta), & q := \left[\frac{j-1}{2} \right] + 1. \end{cases} \quad (7)$$

Тепер встановимо вигляд рівняння (5). Для цього перейдемо до інтегрування по системі поверхонь S_i та знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми. Зауважимо, що одержане рівняння значно спроститься, якщо одна із сторін прямокутної пластини S_i ($i = \overline{1, m}$) паралельна до будь-якої із осей координат. Враховуючи все сказане вище, одержимо таке інтегральне рівняння:

$$\sum_{j=1}^m \sqrt{E_j G_j} \iint_D \frac{\hat{\tau}_j(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{\left(\alpha \sqrt{E_j} - \frac{a_{j0}}{\sqrt{E_j}} \right)^2 + \left(\beta \sqrt{G_j} - \frac{b_{j0}}{\sqrt{G_j}} \right)^2 + \hat{c}_{j0}}} = \hat{g}_{i0}. \quad (8)$$

Тут $\hat{g}_{i0} := \hat{g}(\alpha_0, \beta_0)$, E_j , G_j , a_{j0} , b_{j0} , $\hat{c}_{j0} \geq 0$ – деякі константи, які визначаються з огляду на параметричні рівняння (7), а також залежать від положення точки P з координатами $x_i(\alpha_0, \beta_0)$, $y_i(\alpha_0, \beta_0)$, $z_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($-1 \leq \alpha_0, \beta_0 \leq 1$) на поверхні S_i .

В процесі розв'язування (8) методом колокації із апроксимацією шуканої густини за допомогою кусково поліноміальних базисних функцій виникає проблема обчислення таких невластних інтегралів:

$$I(m, n, a, b, x_0, y_0) := \iint_D \frac{x^m y^n dx dy}{\sqrt{(ax - x_0)^2 + (by - y_0)^2 + d^2}}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$a, b > 0$, $d \geq 0$. Зауважимо, що питання існування інтегралів (9) вимагає додаткового дослідження, але ми на цьому в даній роботі не зупиняємось. З метою уніфікації проблеми виконаємо заміну змінних, яка відповідає переносу центру системи координат у точку (x_0, y_0) , тоді

$$\begin{aligned} I(m, n, a, b, x_0, y_0) &:= a^{-(m+1)} b^{-(n+1)} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{(u+x_0)^m (v+y_0)^n du dv}{\sqrt{u^2 + v^2 + d^2}} = \\ &= a^{-(m+1)} b^{-(n+1)} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_m^i C_n^j x_0^{m-i} y_0^{n-j} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{u^i v^j du dv}{\sqrt{u^2 + v^2 + d^2}}, \end{aligned}$$

де $u := ax - x_0$, $v := ay - y_0$, $a_1 := -a - x_0$, $b_1 := -b - y_0$, $a_2 := a - x_0$,

$b_2 := b - y_0$, $|m| + |n| > 0$, якобіан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{ab}$, а C_k^l — коефіцієнти

біному Ньютона. Отже, для обчислення (9) потрібно визначити

$$J(m, n) := \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{u^m v^n du dv}{\sqrt{u^2 + v^2 + d^2}} \quad (10)$$

у припущенні, що $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Для (10) одержано формули при таких значеннях параметрів m і n :

$$\begin{aligned} &(m=1 \wedge n=0) \vee (m=0 \wedge n=1), \quad m=1 \wedge n=1, \\ &(m=2 \wedge n=0) \vee (m=0 \wedge n=2), \quad (m=2 \wedge n=1) \vee (m=1 \wedge n=2), \\ &(m=3 \wedge n=0) \vee (m=0 \wedge n=3), \quad (m=3 \wedge n=1) \vee (m=1 \wedge n=3). \end{aligned}$$

Наведемо для прикладу деякі з цих формул:

$$\begin{aligned} J(2, 0) &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{i+j} a_i b_j \sqrt{a_i^2 + b_j^2 + d^2} + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{\substack{a \ b \ k \\ b \ a \ l}} k \sum_{i=1}^2 (-1)^i a_i (a_i^2 + d^2) \ln \left| \frac{b_2 + \sqrt{a_i^2 + b_2^2 + d^2}}{b_1 + \sqrt{a_i^2 + b_1^2 + d^2}} \right| - \\ &- \frac{d^2}{3} a_{21}^- b_{21}^- I(0, 0, a_{21}^-, b_{21}^-, a_{21}^+, b_{21}^+), \end{aligned}$$

де $k := 2$, $l := -1$, $a_{21}^- := (a_2 - a_1)/2$, $a_{21}^+ := -(a_2 + a_1)/2$,
 $b_{21}^- := (b_2 - b_1)/2$, $b_{21}^+ := -(b_2 + b_1)/2$,

$$J(3, 1) = \frac{1}{15} \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{i+j} (3a_i^2 - 2b_j^2 - 2d^2) (a_i^2 + b_j^2 + d^2)^{3/2}.$$

Зауважимо, що, в свою чергу, інтеграл $I(0,0,a_{21}^-,b_{21}^-,a_{21}^+,b_{21}^+)$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} I(0,0,a_{21}^-,b_{21}^-,a_{21}^+,b_{21}^+) = \\ = \frac{1}{ab} \left\{ \sum_{\substack{ab \\ b \ a \ y_0 \ x_0}} \sum_{i=1}^2 a_i(x_0) \ln \left| \frac{b_2(y_0) + \sqrt{a_i^2(x_0) + b_2^2(y_0) + d^2}}{-b_1(y_0) + \sqrt{a_i^2(x_0) + b_1^2(y_0) + d^2}} \right| + \right. \\ \left. + 2d \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{i+j} \arctg \left(\frac{1}{d} \left[(-1)^j b_j(y_0) - (-1)^i a_i(x_0) + \sqrt{a_i^2(x_0) + b_j^2(y_0) + d^2} \right] \right) \right\}, \end{aligned}$$

де $a_i(x_0) := a + (-1)^i x_0$, $b_j(y_0) := b - (-1)^j y_0$.

Розглянемо питання наближеного розв'язування інтегрального рівняння (8). Поділимо проміжки зміни параметрів α та β (відносно пластини S_i) відповідно на $N_{\alpha i}$ та $N_{\beta i}$ рівних частин точками:

$$\begin{cases} \alpha_k := H_{\alpha i} k - 1, & H_{\alpha i} := 2 / N_{\alpha i}, & k = \overline{0, N_{\alpha i}}, \\ \beta_l := H_{\beta i} l - 1, & H_{\beta i} := 2 / N_{\beta i}, & l = \overline{0, N_{\beta i}}. \end{cases}$$

Тобто область інтегрування D ми розбили на елементи $D_{kl} := [\alpha_k, \alpha_{k+1}] \times [\beta_l, \beta_{l+1}]$, $k = \overline{1, N_{\alpha i}}$, $l = \overline{1, N_{\beta i}}$. Виберемо центр кожного елемента D_{kl} за початок локальної системи координат $0\xi\eta$ та виконаємо заміну змінних у відповідних інтегралах рівняння (8)

$$\begin{cases} \alpha(\xi, \eta) := \frac{1}{2} H_{\alpha i} (2k - 1 + \xi) - 1, \\ \beta(\xi, \eta) := \frac{1}{2} H_{\beta i} (2l - 1 + \eta) - 1, \end{cases} \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1.$$

При цьому якобіан $J(\xi, \eta) = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{4} H_{\alpha i} H_{\beta i}$. Для апроксимації шуканої густини $\hat{\tau}_i(\alpha, \beta)$ в D використаємо її значення у вузлових точках та побудуємо в межах D_{kl} відповідні кусково поліноміальні базисні функції:

$$\hat{\tau}_i(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)) := \sum_{k=1}^{N_{\alpha i}} \sum_{l=1}^{N_{\beta i}} \sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n} \sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n} \hat{\tau}_{ief} \psi_{nef}(\xi, \eta),$$

$$(\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)) \in D_{kl},$$

де n – порядок використовуваної апроксимації, $\sigma_n(p)$, $p \in \{k, l\}$, – функція зв'язку між нумерацією прямокутних елементів та вузлових точок, а $\hat{\tau}_{ief}$ – значення шуканої густини у вузлових точках. Так

$$\sigma_n(p) := n(p-1) + p s_n, \quad s_n := \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 0, \\ 0, & \text{якщо } n = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$\hat{\tau}_{ief} := \hat{\tau}_i \left(\alpha_k - \frac{\sigma_n(k) + n - e + s_n}{n + 2 s_n} H_{\alpha i}, \beta_l - \frac{\sigma_n(l) + n - f + s_n}{n + 2 s_n} H_{\beta i} \right),$$

причому розглядаються лише ті індекси e і f , для яких виконується умова

$$\left(\bigwedge_{q=1}^{n-1} (e \neq nk - q) \right) \vee \left(\bigwedge_{q=1}^{n-1} (f \neq nl - q) \right) = \text{true}, \quad n \geq 2.$$

Слід зауважити, що, зокрема, при використанні біквадратичної апроксимації шуканого розв'язку на елементі D_{kl} , функції ψ_{nef} набувають такого конкретного вигляду

$$\begin{aligned} \psi_{2ef}(\xi, \eta) &:= \frac{1}{8} \left(1 + (-1)^{e+f} \right) \left(1 + (-1)^{k+e/2} \xi \right) \times \\ &\times \left(1 + (-1)^{e+f/2} \eta \right) \left((-1)^{k+e/2} \xi + (-1)^{e+f/2} \eta - 1 \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{e+f} \right) \left(1 + \xi_0 \xi + \eta_0 \eta \right) \left(1 - \xi_0^2 \xi^2 - \eta_0^2 \eta^2 \right), \\ \xi_0 &:= \frac{1}{2} \left((-1)^{e_0} - (-1)^{f_0} \right), \quad \eta_0 := \frac{1}{2} \left((-1)^{e_0} + (-1)^{f_0} \right), \\ e_0 &:= \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f}{2} \right\rfloor + k + e + 1, \quad f_0 := \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f+1}{2} \right\rfloor + k + e + 1, \end{aligned}$$

де індекси e і f змінюються за правилом $e = \overline{2k-2, 2k}$, $f = \overline{2l-2, 2l}$ при умові, що $(e \neq 2k-1) \vee (f \neq 2l-1) = \text{true}$.

Враховуючи сказане, одержимо дискретний аналог інтегрального рівняння

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_{\alpha j}} \sum_{l=1}^{N_{\beta j}} \sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n} \sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n} \hat{\tau}_{jef} J_{ijkl}^{(nef)}(\alpha_0, \beta_0) = \hat{g}_i(\alpha_0, \beta_0), \quad (11)$$

$$-1 \leq \alpha_0, \beta_0 \leq 1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тут

$$J_{ijkl}^{(nef)}(\alpha_0, \beta_0) := \frac{1}{4} H_{\alpha_j} H_{\beta_j} \sqrt{E_j G_j} \iint_D \frac{\psi_{nef}(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\bar{R}_{ijkl}(\alpha_0, \beta_0, \xi, \eta)},$$

де

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijkl}(\alpha_0, \beta_0, \xi, \eta) := & \left(\left(\frac{1}{2} H_{\alpha_j} \sqrt{E_j} \xi + \left(\frac{1}{2} (2k-1) H_{\alpha_j} - 1 \right) \sqrt{E_j} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{a_{ij}(\alpha_0, \beta_0)}{\sqrt{E_j}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} H_{\beta_j} \sqrt{G_j} \eta + \left(\frac{1}{2} (2l-1) H_{\beta_j} - 1 \right) \sqrt{G_j} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{b_{ij}(\alpha_0, \beta_0)}{\sqrt{G_j}} \right)^2 + \hat{c}_{ij}(\alpha_0, \beta_0) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тепер виберемо контрольні значення (α_0, β_0) у вузлових точках:

$$\begin{cases} \alpha_s := h_{\xi_i} s - 1 - \frac{1}{2} h_{\xi_i} s_n, \\ \beta_t := h_{\eta_i} t - 1 - \frac{1}{2} h_{\eta_i} s_n, \end{cases} \quad \text{де} \quad \begin{cases} h_{\xi_i} := 2 / (n N_{\alpha_i} + N_{\alpha_i} s_n), \\ h_{\eta_i} := 2 / (n N_{\beta_i} + N_{\beta_i} s_n), \end{cases}$$

причому $s = \overline{s_n, N_{\alpha_i}(n + s_n)}$, $t = \overline{s_n, N_{\beta_i}(n + s_n)}$. Зауважимо, що при $n \geq 2$ індекси s і t , для яких виконується умова

$$\left(\left\{ \frac{s}{n + s_n} \right\} \neq 0 \right) \wedge \left(\left\{ \frac{t}{n + s_n} \right\} \neq 0 \right) = \text{true},$$

повинні бути пропущені. Тут фігурні дужки означають дробову частину внутрішнього виразу. Вважаючи, що $\hat{g}_{ist} := \hat{g}_i(\alpha_s, \beta_t)$,

$J_{ijklst}^{(nef)} := J_{ijkl}^{(nef)}(\alpha_s, \beta_t)$, $i, j = \overline{1, m}$, із (11) отримаємо систему рівнянь для визначення функції $\hat{\tau}_i(\alpha, \beta)$ у точках введеної сітки

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_{\alpha_j}} \sum_{l=1}^{N_{\beta_j}} \sum_{e=\sigma_n(k)}^{\sigma_n(k)+n} \sum_{f=\sigma_n(l)}^{\sigma_n(l)+n} \hat{\tau}_{jef} J_{ijklst}^{(nef)} = \hat{g}_{ist}. \quad (12)$$

Запишемо останню у вигляді:

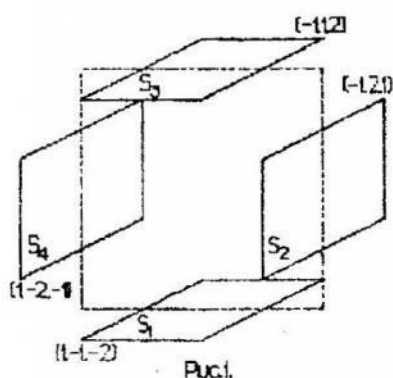
$$\sum_{v=1}^{N_A} a_{\mu v} \hat{\tau}_v = \hat{g}_\mu, \quad \mu = \overline{1, N_A}, \quad (13)$$

де N_A – розмірність матриці системи, яка визначається розбиттям поверхонь S_i та порядком апроксимації n :

$$N_A = \sum_{i=1}^m \left| (1-s_n)(nN_{\alpha i} + 1)(nN_{\beta i} + 1) - (n-1)^2 N_{\alpha i} N_{\beta i} \right|.$$

Зв'язок між індексами систем (12) і (13) встановлюється в залежності від вибору конкретного способу наближення $\hat{r}_i(\alpha, \beta)$. Зокрема, при $n = 2$, матимемо

$$\begin{aligned} v_i = & \sum_{q=1}^{j-1} (3N_{\alpha q} N_{\beta q} + 2N_{\alpha q} + 2N_{\beta q} + 1) + (2N_{\alpha j} + 1) \left[\frac{f+1}{2} \right] + \\ & + (N_{\alpha j} + 1) \left[\frac{f}{2} \right] + \left(\left[\frac{f}{2} \right] - \left[\frac{f+1}{2} \right] + 1 \right) e + \left(\left[\frac{f+1}{2} \right] - \left[\frac{f}{2} \right] \right) \left[\frac{e}{2} \right] + 1. \end{aligned}$$



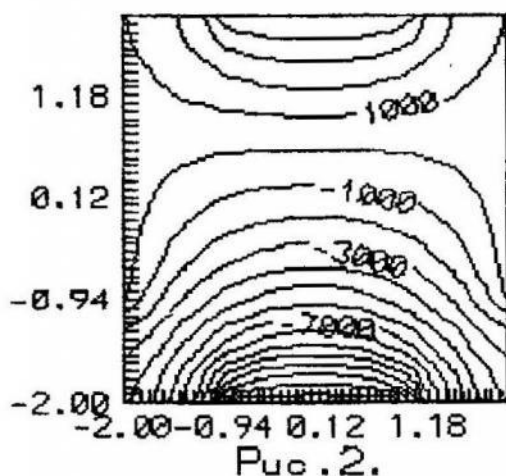
Замінивши j , e та f відповідно на i , s та t отримаємо подібне співвідношення для μ . Зауважимо, що на індекси e , f та s , t накладаються умови, аналогічні до розглянутих раніше.

Як приклад застосування описаної методики розглядалася задача розрахунку потенціалу електростатичного поля квадрупольної лінзи (див. рис. 1). Однією із особливостей такої електронно оптичної системи (ЕОС) є значний перепад

напруги між різними її електродами. Зокрема, граничні значення потенціалу становили:

$$\begin{aligned} g_1(P) &\equiv -15000, & g_2(P) &\equiv 500, \\ g_3(P) &\equiv 5000, & g_4(P) &\equiv 500. \end{aligned}$$

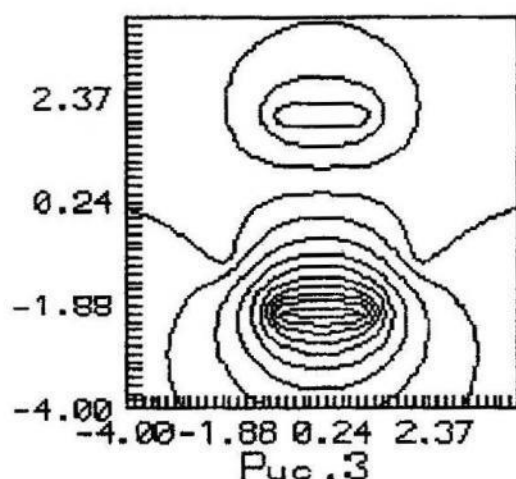
Дослідження проводилися у 6561 рівномірно розподілених внутрішніх точках поперечного перерізу ЕОС. При цьому кожна пластина S_i розбивалася на 100



елементів, а невідома густина розподілу зарядів наближалася за допомогою біквадратичних базисних функцій. Результати виконаних обчислень представлені на рис. 2 та 3 у вигляді ліній рівного потенціалу

у вказаній площині. В окремих точках простору розв'язок поставленої задачі характеризується наступними значеннями:

$u(0,-1.5,-1.5)$	$= -4838.25$	$u(0,-1;2)$	$= 4177.20$
$u(0,-1;-1)$	$= -4590.55$	$u(0,-0.9;2)$	$= 5001.30$
$u(0,-0.5,-0.5)$	$= -3308.59$	$u(0,-2;-0.7)$	$= 500.11$
$u(0;0;0)$	$= -1751.23$	$u(0,-2;-0.9)$	$= 499.94$
$u(0;0.5;0.5)$	$= -256.57$	$u(0,-2;-1)$	$= -296.67$
$u(0;1;1)$	$= 919.64$	$u(0,-1;-2)$	$= -12780.58$
$u(0;1.5;1.5)$	$= 1350.41$	$u(0,-0.9;-2)$	$= -15003.16$



Тут права частина таблиці містить тестові результати, отримані у деяких проміжних точках та на ребрі заданих пластин.

На завершення відзначимо, що застосування кубатурних формул при розв'язуванні інтегральних рівнянь методом колокації призводить до внесення додаткової похибки у загальний наближений розв'язок задачі та до суттєвого сповільнення роботи

відповідної програми, навіть на сучасних ЕОМ. Тому описана методика є актуальною і особливо ефективною у випадку складних просторових задач.

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложение. – М.: Мир, 1971. – 371с. 2. Sybil Yu. M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface. //Математичні студії. 1997. Т.8. № 2. С.79–96.

Стаття надійшла до редколегії 1.09.97

В.С.Попович, Г.Ю.Гарматій, К.С.Іванків

Нестационарна задача теплопроводности термочувливого циліндра з тонким покриттям

У працях [1,4,8] висвітлено сучасний стан досліджень температурних полів і викликаних ними напружень в термочувливих тілах, тобто тілах, теплофізичні характеристики яких змінюються із зміною температури. При розгляді таких задач значна складність полягає у розв'язанні відповідної нелінійної крайової задачі теплопроводности. Аналіз літератури показує, що у більшій мірі розроблені методи розв'язання таких задач для однорідних термочувливих тіл і вони майже відсутні для тіл кусково-однорідної структури. В роботах [9,10] наведені методики розв'язання стаціонарних задач теплопроводности кусково-однорідних тіл, які використані до розв'язування відповідних задач для порожнистого циліндра скінченої довжини та багатошарової труби. У даній праці пропонується підхід до розв'язку нестационарної задачі теплопроводности для кусково-однорідного тіла при наявності конвективного теплообміну на його поверхні, який проілюструємо на прикладі циліндричного тіла з покриттям.

Розглянемо безмежний циліндр радіуса r_1 з тонким покриттям товщиною $r_2 - r_1$. Вважаємо, що теплофізичні характеристики матеріалу циліндра і покриття є функціями температури. У початковий момент часу $\tau = 0$ така система має нульову температуру і поміщається в середовище зі сталою температурою t_c . Між покриттям і середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона, а між циліндром і покриттям існує ідеальний тепловий контакт. Коефіцієнти теплопроводности $\lambda_i^{(i)}(t)$ і об'ємної теплоємності $c_v^{(i)}(t)$ циліндра і покриття представимо у вигляді

$$\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T) \quad (1)$$

де множники з нуликом є сталими і мають відповідні розмірності, а їх співмножники – функції безрозмірної температури $T = t/t_0$, t_0 – довільно вибрана опорна температура, індексом "1" позначаються характеристики циліндра, а "2" – покриття.

Якщо покриття вважати тонкою плоскою стінкою, то знаходження розподілу температури в такому кусково-однорідному тілі у довільний момент часу зводиться до розв'язання нелінійної задачі теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_{i0}^{(1)} \lambda_i^{*(1)}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r} \right] = c_{v0}^{(1)} c_v^{*(1)}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda_{i0}^{(2)} \lambda_i^{*(2)}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \right] = c_{v0}^{*(2)} c_v^{*(2)}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \tau} \quad (r_1 \leq r \leq r_2), \quad (3)$$

$$\lambda_{i0}^{(1)} \lambda_i^{*(1)}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_{i0}^{(2)} \lambda_i^{*(2)}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad T_1 = T_2 \quad \text{при} \quad r = r_1; \quad (4)$$

$$\lambda_{i0}^{(2)} \lambda_i^{*(2)}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} + \alpha(T_2 - T_c) = 0, \quad \text{при} \quad r = r_2; \quad (5)$$

$$T_1|_{r=0} < \infty, \quad (6)$$

$$T_1|_{r=0} = T_2|_{r=0} = 0, \quad (7)$$

де α – коефіцієнт теплообміну з поверхні $r = r_2$.

Нехай матеріали циліндра і покриття володіють простою нелінійністю, тобто відношення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів циліндра і покриття до їх об'ємних теплоємностей незначно залежать від температури і тому коефіцієнт температуропровідності $a_i = \lambda_i^{(i)}(T)/c_v^{(i)}(T)$ можна вважати сталими величинами, що має місце для багатьох матеріалів [5,7].

Якщо ввести в розгляд змінні Кірхгофа

$$\theta_i = \int_0^{T_i} \lambda_i^{*(i)}(T) dT \quad (8)$$

і врахувати зроблене допущення про сталість a_i , тоді із задачі (2)-(7) отримуємо наступну задачу спряження на змінні Кірхгофа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right] = \frac{1}{a_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} \quad (0 \leq r \leq r_1), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial r^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \quad (r_1 \leq r \leq r_2), \quad (10)$$

$$\lambda_{i0}^{(1)} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = \lambda_{i0}^{(2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial r}, \quad T_1(\theta_1) = T_2(\theta_2) \quad \text{при} \quad r = r_1, \quad (11)$$

$$\lambda_{r_0}^{(2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} + \alpha [T_2(\theta_2) - T_c] = 0 \quad \text{п р и } r = r_2, \quad (12)$$

$$\theta_1|_{r=0} < \infty, \quad (13)$$

$$\theta_1|_{r=0} = \theta_2|_{r=0} = 0. \quad (14)$$

Введення змінних Кірхгофа частково лінеаризувало вихідну задачу і перегрупувало нелінійності, які зосередилися у виразах температур $T_i(\theta_i)$ на поверхні контакту циліндра і покриття $r = r_1$ та зовнішній поверхні покриття $r = r_2$. Остаточну лінеаризацію задачі здійснимо шляхом заміни [8]

$$T_i(\theta_i) = (1 + \omega_i)\theta_i, \quad (15)$$

де ω_i – деякі, поки що невідомі, параметри. Введемо безрозмірні

координату $\rho = r/r_1$, час $Fo = \frac{a_1 \tau}{r_1^2}$ і позначимо

$$\theta_1^* = \frac{1 + \omega_1}{1 + \omega_2} \theta_1, \quad K_\lambda^* = \frac{1 + \omega_2}{1 + \omega_1} K_\lambda, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_{r_0}^{(1)}}{\lambda_{r_0}^{(2)}}, \quad K_a = \frac{a_1}{a_2},$$

$$Bi^* = (1 + \omega_2) \frac{r_1}{r_2} Bi, \quad Bi = \frac{\alpha r_2}{\lambda_{r_0}^{(2)}}, \quad \rho_2 = r_2/r_1, \quad T_c^* = \frac{T_c}{1 + \omega_2},$$

тоді задача (9)-(14) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \theta_1^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_1^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \theta_1^*}{\partial Fo} \quad (0 \leq \rho \leq 1), \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \rho^2} = K_a \frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} \quad (1 \leq \rho \leq \rho_2), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta_1^*}{\partial \rho} = K_\lambda^* \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho}, \quad \theta_1^* = \theta_2 \quad \text{п р и } \rho = 1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} + Bi^* (\theta_2 - T_c^*) = 0 \quad \text{п р и } \rho = \rho_2, \quad (19)$$

$$\theta_1^*|_{\rho=0} < \infty \quad (20)$$

$$\theta_1^*|_{Fo=0} = \theta_2^*|_{Fo=0} = 0. \quad (21)$$

Розв'язок задачі (16)-(21), знайдений з допомогою інтегрального перетворення Лапласа за безрозмірним часом Fo [2,3], має вигляд

$$\theta_1^* = T_c^* [1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \rho) e^{-\mu_n^2 Fo}], \quad (22)$$

$$\theta_2^* = T_c^* \{1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n [J_0(\mu_n) \cos(\mu_n \sqrt{K_a} (\rho - 1)) - K_\varepsilon J_1(\mu_n) \sin(\mu_n \sqrt{K_a} (\rho - 1))] e^{-\mu_n^2 Fo}\}, \quad (23)$$

де

$$A_n = \frac{2Bi^* K_\varepsilon (Bi^* \operatorname{tg} \mu_n^* + \mu_n^*)}{\mu_n J_0(\mu_n) \sin \mu_n^* \psi(\mu_n)}, \quad \mu_n^* = \mu_n \sqrt{K_a} (\rho_2 - 1),$$

$$K_\varepsilon = \frac{K_\lambda^*}{\sqrt{K_a}},$$

$$\begin{aligned} \psi(\mu_n) = & (K_\varepsilon^2 \mu_n^{*2} + Bi^{*2}) \operatorname{ctg} \mu_n^* + \frac{2K_\varepsilon \sqrt{K_a} (\rho_2 - 1)}{\sin 2\mu_n^*} (Bi^{*2} + \mu_n^{*2}) + \\ & + [2\sqrt{K_a} (\rho_2 - 1) K_\varepsilon Bi^* + \mu_n^{*2} + K_\varepsilon^2 Bi^{*2}] \operatorname{tg} \mu_n^* + \frac{K_\varepsilon \mu_n^{*2}}{\mu_n} + \\ & + 2(K_\varepsilon^2 - 1) \mu_n^* Bi^* - \frac{K_\varepsilon Bi^{*2}}{\mu_n}; \end{aligned}$$

$J_n(\mu)$ – функції Бесселя першого роду [11], а μ_n – корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} J_0(\mu) (Bi^* \cos \mu^* - \sqrt{K_a} \rho_2 \mu \sin \mu^*) - \\ - K_\varepsilon J_1(\mu) (Bi^* \sin \mu^* + \sqrt{K_a} \rho_2 \mu \cos \mu^*) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Знайдені розв'язки θ_i є функціями координати ρ , часу Fo і двох параметрів ω_i . Вони задовольняють рівняння (9), (10), першу умову (11) та умови (13), (14) при довільних значеннях ω_i . Скористаємось вільністю величин ω_i підберемо їх таким чином, щоб із заданою точністю виконувалась друга умова (11) та умова (12). Практично обчислення температури у довільних точці і момент часу проводимо за такою схемою:

- 1) розв'язавши рівняння (8) для конкретно заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури, знаходимо вирази $T_i(\theta_i)$;
- 2) задаємо деякі початкові значення параметрів ω_i (переважно приймаємо їх рівними нулеві) і обчислюємо корені характеристичного рівняння (24);
- 3) за прийнятими значеннями ω_i та знайденими коренями обчислюємо значення θ_i і перевіряємо виконання другої умови (11) та умови (12);
- 4) за нев'язкою виконання цих умов проводимо уточнення значень ω_i і продовжуємо обчислення до досягнення заданої точності.

Проводився числовий аналіз температурного поля в циліндрі, виготовленому з алюмінієвого сплаву із стальним покриттям. Опорна температура приймалася рівною температурі зовнішнього середовища $t_0 = t_c = 373^0 \text{ K}$, а коефіцієнти теплопровідності матеріалів циліндра і покриття як функції безрозмірної температури $T = t / t_0$, бралися у вигляді [12]

$$\lambda_r^{(1)}(T) = \lambda_{r0}^{(1)}(1 + k_{11}T + k_{21}T^2), \quad (25)$$

$$\lambda_r^{(2)}(T) = \lambda_{r0}^{(2)}(1 + k_{12}T), \quad (26)$$

де

$$\lambda_{r0}^{(1)} = 0,247 \frac{\text{K BT}}{\text{м} \cdot \text{K}}, k_{11} = -0,184, k_{21} = 0,069, \lambda_{r0}^{(2)} = 0,0469 \frac{\text{K BT}}{\text{м} \cdot \text{K}}, k_{12} = -0,204$$

Значення коефіцієнтів температуропровідності матеріалів циліндра і покриття приймалися рівними середнім значенням для вказаного діапазону температур, внаслідок чого відношення $K_a = a_1 / a_2 \approx 8,046$.

Оскільки коефіцієнт теплопровідності матеріалу циліндра – квадратична функція температури (25), у відповідності до (8), температура в циліндрі обчислювалася як єдиний дійсний корінь рівняння

$$\frac{k_{11}}{2} T_1^2 + \frac{k_{21}}{3} T_1^3 + T_1 - \theta_1 = 0, \quad (27)$$

який знаходився за формулою Кардана [6]. В той же час, коефіцієнт теплопровідності матеріалу покриття – лінійна функція температури (26) і, згідно з (8), температура в покритті, як розв'язок відповідного квадратного рівняння, визначалася за формулою

$$T_2 = k_{12}^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k_{12}\theta_2} - 1 \right). \quad (28)$$

Знайдено розподіл температури вздовж радіуса системи циліндр-покриття, для якої $\rho_2 = 1.02$ при різних значеннях критерія Bi в момент часу $Fo = 1$. Отримали неперервну зміну температури в межах циліндра і покриття, та рівність температур на лінії контакту. Як і слід було чекати, температура в системі із ростом Bi зростає. Зауважимо, що при $Fo \neq 1$ для задоволення нелінійних другої умови (11) та умови (12) з точністю 10^{-10} достатньо було взяти 10 коренів характеристичного рівняння (24).

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с. 2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Физматгиз, 1960. – 208 с. 3. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш.шк., 1965. – 466 с. 4. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук.думка, 1992. – 280 с. 5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487с. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с. 7. Недосека А.Я. Основы расчета сварных конструкций. – К.: Вища школа, 1988. – 263 с. 8. Попович В.С., Гарматій Г.Ю. Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні. – Львів, 1993, – 66 с. – (Препр. АН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача; № 13-93). 9. Попович В.С., Махоркін І.М. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл //Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 36-44. 10. Попович В.С., Федай Б.М. Осесиметрична задача термопружності багатопарової термочутливої труби //Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1966. – Т. 39, № 1. – С. 97-102. 11. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовица. Н.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с. 12. Sugano Y. On a strees function method of a thermoelastic problem expressed in cylindrical coordinates in a multiply-connected region exhibiting temperature-dependent matertal properties //Ingenieur - Archiv, – 1984. – P. 301-308.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.97

В.С.Попович, К.С.Іванків, Г.Ю.Гарматій

**Осесиметрична квазістатична задача термопружності
термочутливого циліндра з тонким покриттям**

У праці [2] запропоновано методику розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для кусково-однорідного термочутливого тіла при наявності конвективного теплообміну на його поверхні. З її допомогою знайдено нестационарне температурне поле у безмежному циліндрі радіуса r_1 з тонким покриттям товщиною $r_2 - r_1$. Вважається, що така система має нульову початкову температуру, а її нагрів здійснюється шляхом конвективного теплообміну з середовищем сталої температури t_c . Визначимо напружено-деформований стан системи циліндр-покриття, викликаний даним температурним полем, у припущенні, що зовнішня її поверхня вільна від навантаження.

Якщо знехтувати незначною залежністю коефіцієнтів Пуассона матеріалів циліндра і покриття від температури [1], а залежності від температури модулів Юнга $E_i(t)$ і температурних коефіцієнтів лінійного розширення $\alpha_i^{(i)}(t)$ представити у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, тоді розв'язок відповідної осесиметричної задачі термопружності у циліндричній системі координат r, φ, z зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_\rho^{(i)}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho^{(i)} - \sigma_r^{(i)}}{\rho} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

при граничних умовах

$$\sigma_\rho^{(1)}|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(2)}|_{\rho=1}, \quad \bar{u}_1|_{\rho=1} = \bar{u}_2|_{\rho=1}, \quad \bar{u}_1|_{\rho=0} = 0, \quad \sigma_\rho^{(2)}|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad (2)$$

де компоненти тензора напружень обчислюються за формулами:

$$\sigma_\rho^{(i)} = K_i E_i^*(T) \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} + \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \frac{\bar{u}_i}{\rho} - \Phi_i^* \right],$$

$$\sigma_T^{(i)} = K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}_i}{\rho} - \Phi_i^* \right], \quad (3)$$

$$\sigma_\zeta^{(i)} = K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} - \frac{\bar{u}_i}{\rho} \right) - \Phi_i^* \right].$$

Тут для зручності запису введені наступні безрозмірні величини та позначення

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{r_1 \alpha_{i0}^{(i)} t_0}, \quad \sigma_\rho^{(i)} = \frac{\sigma_r^{(i)}}{E}, \quad \sigma_T^{(i)} = \frac{\sigma_\varphi^{(i)}}{E}, \quad \sigma_\zeta^{(i)} = \frac{\sigma_z^{(i)}}{E}$$

$$E = E_0^{(i)} \alpha_{i0}^{(i)} t_0, \quad K_E^{(i)} = \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}}, \quad \Phi_i^* = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} K_\alpha^{(i)} \int_0^{T_i} \alpha_i^{*(i)}(T) dT,$$

$$K_\alpha^{(i)} = \frac{\alpha_{i0}^{(i)}}{\alpha_{i0}^{(1)}}, \quad K_i = \frac{K_E^{(i)}(1-\nu_i)}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)},$$

де ν_i – коефіцієнти Пуасона, u_i – радіальні переміщення, $T = \frac{t}{t_0}$ –

безрозмірна температура, $\rho = \frac{r}{r_1}$, $\rho_2 = \frac{r_2}{r_1}$, t_0 – довільно вибрана опорна температура.

Після підстановки виразів напружень в рівняння рівноваги (1) бачимо, що переміщення $\bar{u}_i$ в циліндрі і покритті повинні задовольняти рівняння

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{\lambda}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{u}_i) \right] + \frac{d \ln E_i^*(T)}{d\rho} \left(\frac{d \bar{u}_i}{d\rho} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{\bar{u}_i}{\rho} - \Phi_i^* \right) = \frac{d \Phi_i^*}{d\rho} \quad (4)$$

($i = 1, 2$).

Розв'язок крайової задачі (4), (2) побудуємо методом збурень [3], який ґрунтується на малості деякого параметра ε і у нашому випадку визначається з рівності

$$\frac{d \ln E_i^*(T)}{d\rho} = \varepsilon \psi_i(T), \quad (5)$$

де $\psi_i(T)$ – функції безрозмірної температури.

Представимо переміщення $\bar{u}_i$ у вигляді рядів за зростаючими степенями параметра ε

$$\bar{u}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_{i,k}, \quad (6)$$

і підставимо їх у рівняння (4). Тоді після порівняння виразів при однакових степенях ε , отримаємо рекурентну послідовність крайових задач для визначення $\bar{u}_{i,k}$:

для основної задачі

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{u}_{i,0}) \right] = \frac{d\Phi_i^*}{d\rho} \quad (i=1,2), \quad (7)$$

$$\sigma_{\rho,0}^{(1)} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho,0}^{(2)} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,0} \Big|_{\rho=1} = \bar{u}_{2,0} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,0} \Big|_{\rho=0} = 0, \sigma_{\rho,0}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho,0}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{d\bar{u}_{i,0}}{d\rho} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{\bar{u}_{i,0}}{\rho} - \Phi_i^* \right], \\ \sigma_{r,0}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{d\bar{u}_{i,0}}{d\rho} + \frac{\bar{u}_{i,0}}{\rho} - \Phi_i^* \right], \\ \sigma_{\zeta,0}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left(\frac{d\bar{u}_{i,0}}{d\rho} + \frac{\bar{u}_{i,0}}{\rho} \right) - \Phi_i^* \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

для k -ої задачі ($k \geq 1$)

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{u}_{i,k}) \right] = - \frac{\psi_i(T)}{K_i E_i^*(t)} \sigma_{\rho,k-1}^{(i)} \quad (i=1,2), \quad (10)$$

$$\sigma_{\rho,k}^{(1)} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho,k}^{(2)} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,k} \Big|_{\rho=1} = \bar{u}_{2,k} \Big|_{\rho=1}, \bar{u}_{1,k} \Big|_{\rho=0} = 0, \sigma_{\rho,k}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho,k}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{du_{i,k}}{d\rho} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{u_{i,k}}{\rho} \right], \\
\sigma_{T,k}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \left[\frac{\nu_i}{1-\nu_i} \frac{du_{i,k}}{d\rho} + \frac{u_{i,k}}{\rho} \right], \\
\sigma_{\zeta,k}^{(i)} &= K_i E_i^*(T) \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \left[\frac{du_{i,k}}{d\rho} + \frac{u_{i,k}}{\rho} \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

Повний розв'язок задачі термопружності отримаємо у вигляді (6) при $\varepsilon=1$.

Після інтегрування рівняння (7) з врахуванням умов (8) розв'язок основної задачі знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned}
u_{i,0} &= C_{1,0}^{(i)} \rho + \frac{C_{2,0}^{(i)} + H_i}{\rho}, \\
\sigma_{\rho,0}^{(i)} &= \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[\frac{2\nu_i-1}{\rho^2} H_i + C_{1,0}^{(i)} + \frac{(1-2\nu_2)C_{2,0}^{(2)}}{\rho^2} \delta_{i2} \right], \\
\sigma_{T,0}^{(i)} &= \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left\{ (2\nu_i-1) \left[\Phi_i^* - \frac{H_i + C_{2,0}^{(2)} \delta_{i2}}{\rho^2} \right] + C_{1,0}^{(i)} \right\}, \\
\sigma_{\zeta,0}^{(i)} &= \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[2\nu_i C_{1,0}^{(i)} + (2\nu_i-1) \Phi_i^* \right] \quad (i=1,2),
\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
C_{2,0}^{(2)} &= \frac{C_1 + C_2}{C_3}, \\
C_1 &= \frac{K_1 E_1^*(1)}{1-\nu_1} \left[2(\nu_1+1)H_1(1) - \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} H_2(\rho_2) \right], \\
C_2 &= \frac{K_2 E_2^*(1)}{1-\nu_2} \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} H_2(\rho_2), \\
C_3 &= (2\nu_2-1) \left[\frac{K_1 E_1^*(1)}{1-\nu_1} \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{2\nu_2-1} \right) + \frac{K_2 E_2^*(1)}{1-\nu_2} \left(1 - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$C_{1,0}^{(2)} = \frac{1-2\nu_2}{\rho_2^2} [H_2(\rho_2) + C_{2,0}^{(2)}], C_{1,0}^{(1)} = C_{1,0}^2 + C_{2,0}^2 - H_1(1), C_{2,0}^{(1)} = 0,$$

$$H_i = \int_0^{\rho} \Phi_i^* \rho d\rho, \quad E_i^*(1) = E_i^*(T) \Big|_{\rho=1}, \quad H_i(\rho_i) = H_i \Big|_{\rho=\rho_i},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Інтегруючи рівняння (10) при граничних умовах (11), знаходимо перше наближення задачі термопружності, а саме:

$$u_{i,1} = d_{1,1}^{(i)} \rho + \frac{d_{2,1}^{(i)} - F^{(i)}(\rho)}{\rho},$$

$$\sigma_{\rho,1}^{(i)} = \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[\frac{1-2\nu_i}{\rho^2} (F^{(i)}(\rho) - d_{2,1}^{(i)} \delta_{i2}) - (1-\nu_i) G^{(i)}(\rho) + d_{1,1}^{(i)} \right],$$

$$\sigma_{r,1}^{(i)} = \frac{K_i E_i^*(T)}{1-\nu_i} \left[\frac{2\nu_i-1}{\rho^2} (F^{(i)}(\rho) - d_{2,1}^{(i)} \delta_{i2}) - \nu_i G^{(i)}(\rho) + d_{1,1}^{(i)} \right],$$

$$\sigma_{\zeta,1}^{(i)} = \frac{K_i E_i^*(T) \nu_i}{1-\nu_i} [2d_{1,1}^{(i)} - G^{(i)}(\rho)] \quad (i=1,2)$$

де

$$d_{2,1}^{(2)} = b^{-1} \left\{ \frac{K_2 E_2^*(1)}{1-\nu_2} \left[\frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} F^{(2)}(\rho_2) + (1-\nu_2) G^{(2)}(\rho_2) \right] - \right. \\ \left. - \frac{K_1 E_1^*(1)}{1-\nu_1} \left[2(1-\nu_1) F^{(1)}(1) - (1-\nu_1) G^{(1)}(1) + \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} F^{(2)}(\rho_2) - (\nu_2-1) G^{(2)}(\rho_2) \right] \right\},$$

$$b = \frac{K_1 E_1(1)}{1-\nu_1} \left(1 + \frac{1-2\nu_2}{\rho_2^2} \right) + \frac{K_2 E_2(1)}{1-\nu_2} (1-2\nu_2)(1-\rho_2^{-2}),$$

$$d_{1,1}^{(2)} = \frac{2\nu_2-1}{\rho_2^2} [F^{(2)}(\rho_2) - d_{2,1}^{(2)}] + (1-\nu_2) G^{(2)}(\rho_2), \quad d_{2,1}^{(1)} = 0,$$

$$d_{1,1}^{(1)} = d_{1,1}^{(2)} + d_{2,1}^{(2)} + F^{(1)}(1), \quad F^{(i)}(\rho) = \int_{\rho_{i-1}}^{\rho} \rho G^{(i)}(\rho) d\rho,$$

$$G^{(i)}(\rho) = \frac{1}{K_i} \int \frac{\psi_i(T) \sigma_{\rho,0}^{(i)}}{E_i^*(T)} d\rho \quad (\rho=0, \rho_1=1),$$

$$F^{(i)}(\rho_i) = F^i(\rho) \Big|_{\rho=\rho_i}, G^{(i)}(\rho_i) = G^i(\rho) \Big|_{\rho=\rho_i}.$$

Нехай циліндр із алюмінієвого сплаву має стальне покриття. Залежності термодинамічних характеристик від безрозмірної температури $T = t/t_0$ для алюмінієвого сплаву мають вигляд [4]

$$E_1(T) = 0,724 \cdot 10^{-2} - 0,156 \cdot 10^{-1} T - 0,684 \cdot 10^{-4} T^2 \text{ (GPa)},$$

$$\alpha_1(T) = 0,228 \cdot 10^{-4} + 0,183 \cdot 10^{-7} T \text{ (1/K)},$$

$$\nu_1 = 0,34.$$

Аналогічні залежності для сталі

$$E_2(T) = 0,216 \cdot 10^3 - 0,245 \cdot 10^{-3} T^2 \text{ (GPa)},$$

$$\alpha_2(T) = 0,119 \cdot 10^{-4} + 0,832 \cdot 10^{-8} T \text{ (1/K)},$$

$$\nu_2 = 0,3.$$

Таким чином

$$E_0^{(1)} = 0,724 \cdot 10^2, E_0^{(2)} = 0,216 \cdot 10^3,$$

$$\alpha_{t0}^{(1)} = 0,228 \cdot 10^{-4}, \alpha_{t0}^{(2)} = 0,119 \cdot 10^{-4}.$$

Для обчислення першого наближення переміщень та напружень виникає необхідність обчислення інтегралів $F^{(i)}(\rho)$ та $G^{(i)}(\rho)$, де підінтегральні вирази є функціями нульового наближення. Так як температура і напруження у нульовому наближенні на заданому інтервалі є монотонними функціями, для зручності обчислення згаданих інтегралів, представляємо їх у вигляді многочленів

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^n a_k \rho^k,$$

де коефіцієнти a_k знаходимо методом найменших квадратів. Необхідна кількість членів ряду n визначалася точністю апроксимації заданих функцій. Після такого представлення і деяких перетворень підінтегральних виразів, обчислення інтегралів $G^{(i)}(\rho)$ проводилося за квадратурними формулами Гауса. Аналогічно, з заданою точністю, апроксимувалися отримані значення інтегралів $G^{(i)}(\rho)$ і обчислювалися інтеграли $F^{(i)}(\rho)$.

Графіки розподілу безрозмірних температури, радіального переміщення і напружень у першому наближенні для різних значень критерія Bi у момент часу $Fo=1$ показані на рисунках 1 -5.

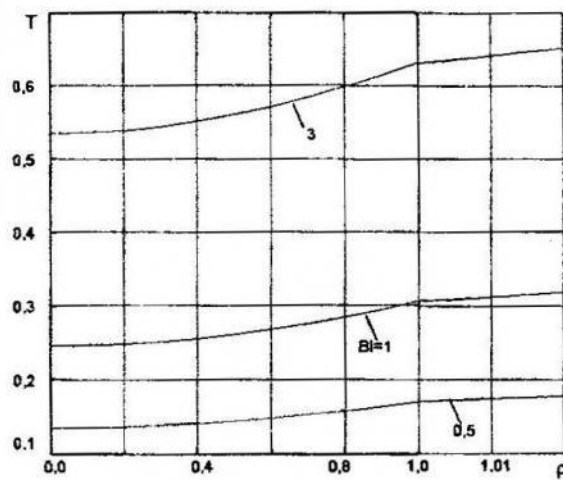


Рис. 1

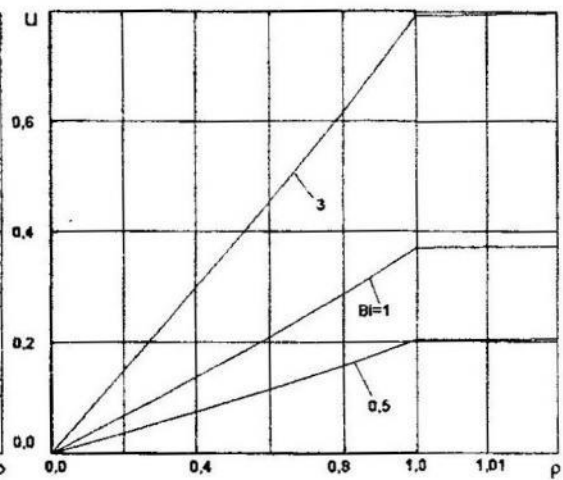


Рис. 2

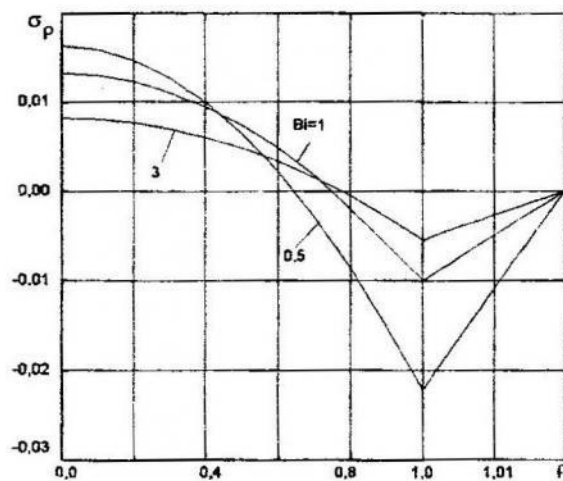


Рис. 3

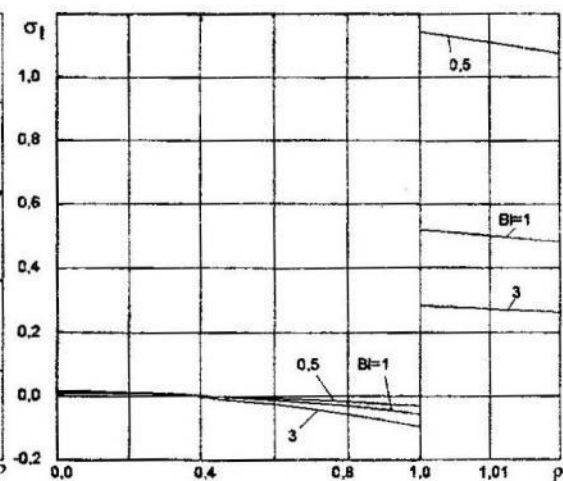


Рис. 4

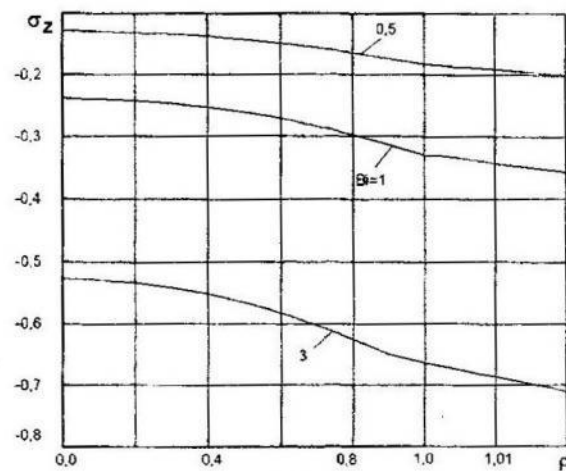


Рис. 5

Обчислення показали, що основний внесок у розв'язок задачі термопружності вносить нульове наближення. Наприклад, для вибраного часу, максимальний внесок першого наближення у напруження σ_p не перевищує 4%, а у напруження σ_T – 7.5%.

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел.-М.:Изд-во Моск. ун-та, 1976, – 376с. 2. Попович В.С., Гарматій Г.Ю., Іванків К.С. Нестационарна задача теплопровідності термочутливого циліндра з тонким покриттям. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1997. Вип. 45. – с. 83-88. 3. Nowinski J. Transient Thermoelastic problem for an infinite medium with a Spherical cavity exhibiting temperature dependent properties//J.Appl.Mech.-1962.-29,№2,-p.197-205. 4. Sugano Y. On a stress function method of a thermoelastic problem expressed in cylindrical coordinates in a multiply-connected region exhibiting temperature-dependent material properties //Ingenieur - Archiv, – 1984,54.-p.301-308.

Стаття надійшла до редколегії 30.12.97.

УДК 518.5:518.62:681.335

Костенко С.Б., Попов Б.О.

Знаходження рівномірного наближення неперервної функції сплайном із заданою похибкою

При розв'язанні задач математичного моделювання для обчислення неперервної функції $f(x)$ на фіксованому проміжку $[a, b]$ часто використовують наближення сплайнами [1,2]. Для цього розбивають проміжок $[a, b]$ множиною точок $Z = \{z_i\}_{i=0}^r$, $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$ на систему підінтервалів $[z_{i-1}, z_i]$, $i = 1, r$, на кожному з яких будуються вирази найкращого чебишовського наближення. Множину точок Z називають вузлами сплайну.

Якщо необхідно досягти найменшу похибку наближення при заданій кількості ланок, то здійснюють вибір вузлів сплайну з умови рівномірності наближення (похибки наближення на кожному з підінтервалів є однаковими)[3].

У випадку існування аналітичного виразу ядра наближення $\eta(f(x), F(A, x))$ [4] функції $f(x)$ за допомогою найкращого чебишовського наближення $F(A, x) = F(a_0, a_1, \dots, a_m; x)$ формула похибки

рівномірного наближення сплайном з вагою $\omega(x) > 0$ при заданій кількості ланок r , $r \rightarrow \infty$ на проміжку $[a, b]$ має вигляд [4]

$$\mu = \frac{2}{(4r)^{m+1} (m+1)!} \left(\int_a^b \left| \frac{\eta(f, F)}{\omega(x)} \right|^{\frac{1}{m+1}} dx \right)^{m+1} \left[1 + O\left(\frac{(b-a)}{r}\right) \right]. \quad (1)$$

Підставивши значення $b = z_i$, $r = i$, $i = \overline{1, r}$ і знехтувавши виразом у квадратних дужках, отримаємо рівняння для визначення границь ланок

$$\int_a^{z_i} \left| \eta(f, F) / \omega(x) \right|^{\frac{1}{m+1}} dx = 4i \left(\frac{\varepsilon(m+1)!}{2} \right)^{1/(m+1)}. \quad (2)$$

Тут границі ланок визначаються з умови асимптотично рівномірного наближення із заданою похибкою μ , тобто похибка наближення на кожній ланці буде близькою до заданої, а границі ланок обчислюються наближено. Для визначення з довільною точністю границь ланок сплайну, що рівномірно наближає функцію $f(x)$ із заданою похибкою наближення μ пропонуються нові методи.

Нехай $F(A, x, u, v) = F(a_0, a_1, \dots, a_m; x, u, v)$ вираз найкращого чебишовського наближення на проміжку $[u, v] \in [a, b]$. Максимальне значення похибки наближення є функцією границь ланки

$$\mu(u, v) = \max_{[u, v]} \left| \frac{f(x) - F(A, x, u, v)}{\omega(x)} \right|. \quad (3)$$

Якщо $f(x) \in C[a, b]$ і наближаюча функція $F(A, x, u, v)$ – неперервна за аргументами A та x , то функція похибки $\mu(u, v)$ є неперервною відносно своїх аргументів [4], неспадна по v і незростаюча по u . Підставивши $u = z_0$, де $z_0 = a$, і прирівнявши $\mu(z_0, v) = \mu^*$, де μ^* – задана похибка рівномірного наближення сплайном, отримаємо рівняння для пошуку першого вузла z_1 сплайна на проміжку $[z_0, b]$. i -тий вузол сплайну визначається з рівняння

$$\mu(z_{i-1}, v) = \mu^*, \quad i = \overline{1, r}, \quad v \in [z_{i-1}, b]. \quad (4)$$

Відшукання граничних точок припиняється, коли $\mu(z_{i-1}, v) \leq \mu^*$.

Для розв'язання рівняння (4) можна скористатися методом поділу проміжку наближення, оскільки він вимагає неперервності функції $\mu(z_{i-1}, v)$ відносно v і наявності кореня на заданому проміжку. Позначимо $y_1 = z_{i-1}$, $y_2 = b$. Обчислимо $w = (y_2 - y_1)/2$. Знайдемо найкраще чебишовське наближення $F(A, x, z_{i-1}, w)$ і визначимо максимальне значення похибки $\tilde{\mu}$. Якщо $\tilde{\mu} < \mu^*$, очевидно, значення кореня z_i міститься поза проміжком $[z_{i-1}, w]$, тому здійснюємо переприсвоєння $y_1 = w$, а в іншому випадку $y_2 = w$ і знайдемо центральну точку новоутвореного проміжку. І т.д.

Обчислення коренів триває доти, поки довжина проміжку $[y_1, y_2]$ є меншою за наперед задану величину точності знаходження розв'язку Δ , тобто $|y_2 - y_1| < \Delta$ або виконується $|\tilde{\mu} - \mu^*|/\mu^* < \delta_\mu$, де δ_μ – відносна помилка визначення похибки наближення.

Очевидно, що даний метод відшукування границь ланок дає можливість знаходити їх значення з довільною точністю Δ . Якщо процес обчислення припиняється через виконання умови $|y_2 - y_1| < \Delta$, то можна наперед визначити кількість k кроків обчислення. Ця кількість рівна

$$k = \lceil \log_2((b - z_i)/\Delta) \rceil. \quad (5)$$

Виходячи з виразу (1) для похибки можна побудувати ітераційний алгоритм для знаходження вузлів рівномірного наближення, що, як правило, збігається за меншу кількість кроків.

Нехай $z_1, \dots, z_{i-1}$ – $i-1$ перших вузлів сплайну. Постає завдання знаходження вузлів z_i за умови, що похибка найкращого чебишовського наближення $F(A, x)$ на кожній ланці рівна μ . Розклавши в ряд Тейлора підінтегральну функцію у формулі (1) в околі точки z_{i-1} , отримаємо

$$\mu = \frac{(z_i - z_{i-1})^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} |\varphi(z_{i-1})| [1 + O((z_i - z_{i-1})/2)], \quad (6)$$

де

$$\varphi(x) = \left| \eta(f, F)/\omega(x) \right|^{\frac{1}{m+1}}. \quad (7)$$

Виберемо деяке близьке до вузла z_i значення z_i^* , тоді похибку наближення можна подати

$$\mu^* = \frac{(z_i^* - z_{i-1})^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} |\varphi(z_{i-1})| \left[1 + O((z_i^* - z_{i-1})/2) \right]. \quad (8)$$

Розглянемо відношення рівностей (7) та (8), знехтувавши виразами у квадратних дужках

$$\frac{\mu}{\mu^*} = \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{z_i^* - z_{i-1}} \right)^{m+1}. \quad (9)$$

Виразивши значення z_i , отримаємо

$$z_i = z_{i-1} + \left(\mu / \mu^* \right)^{\frac{1}{m+1}} (z_i^* - z_{i-1}). \quad (10)$$

Побудуємо ітераційний процес

$$z_i^{(n)} = z_{i-1} + \left(\mu / \mu_{n-1} \right)^{\frac{1}{m+1}} (z_i^{(n-1)} - z_{i-1}), \quad (11)$$

де μ – задана похибка наближення, μ_{n-1} – похибка найкращого чебишовського наближення на проміжку $[z_{i-1}, z_i^{(n-1)}]$. Умови збіжності процесу (11) встановлює теорема.

Теорема. Якщо $f(x) \in C^{m+2}[a, b]$, $\omega(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$, $F(A, x) = F(a_0, a_1, \dots, a_m, x)$, $F(A, x) \in C^{m+2}[a, b]$. – вираз найкращого чебишовського наближення, то числова послідовність $\{z_i^{(n)}\}$, що задається ітераційною формулою (11), де μ_{n-1} – похибка найкращого чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом $F(A, x)$ на проміжку $[z_{i-1}, z_i^{(n-1)}]$, збігається до значення i -того вузла z_i сплайну, що рівномірно наближає функцію $f(x)$ з похибкою μ на проміжку $[a, b]$.

В основі доведення теореми лежить дослідження поведінки виразу (11) за перелічених умов.

Приклад. Визначимо границі ланок при рівномірному абсолютному наближенні функції Бесселя $J_0(x)$ сплайном з ланками виду $V_3(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6$ на проміжку $[0, 13]$ із заданою похибкою наближення $\varepsilon = 10^{-5}$ використовуючи алгоритми поділу проміжку наближення навпіл і методом послідовних наближень за допомогою ітераційної формули (11) ($\Delta = 10^{-8}$; $\mu_\varepsilon < 10^{-6}$).

Встановимо кількість кроків обчислення k_1 , k_2 кожного із методів, що виконуються при обчисленні границь ланок.

У таблиці 1 подані номер i ланки, її права границя – i -тий вузел сплайну z_i , значення кількості кроків обчислення.

Різке зростання кількості кроків k_2 обчислення з використанням ітераційної формули (11) вузлів ланок сплайна, що містять нулі ядра наближення $\eta(f, F)$ [5]: $c_1 = 0$, $c_1 = 7.587$, $c_1 = 11.074$, свідчить про те, що ефективність ітераційного процесу

залежить від знакосталості функції ядра.

Таблиця 1.

i	z_i	k_1	k_2	k_3
1	1.94829	30	396	44
2	2.79061	30	9	9
3	3.46485	29	7	7
4	4.06056	29	6	6
5	4.61406	29	5	5
6	5.14634	29	4	4
7	5.67353	29	4	4
8	6.21278	29	5	5
9	6.79163	29	7	7
10	7.50371	29	11	11
11	8.28991	29	15	15
12	8.90016	28	6	6
13	9.47971	28	4	4
14	10.07366	28	6	6
15	10.75060	28	9	9
16	11.69570	27	38	32
17	12.33524	26	6	6

Так і повинно бути, бо інакше не буде виконуватися умова теореми 2.4, ітераційна формула (11) не має місця, вираз (10), що використовується при встановленні цієї формули не слідує із виразу (9).

Метод половинного поділу є стабільним на всій розглядуваній області, але його використання вимагає значних затрат часу. Тому для знаходження границь ланок при побудові сплайн-наближень функцій, ядро яких не перетворюється в нуль на проміжку наближення, доцільно користуватися ітераційною формулою

(11).

Найкращі результати дає поєднання розглянутих методів. У випадку, коли нулі ядра існують, вибираючи початкові наближення $z_i^{(0)}$ для ітераційної формули (11), необхідно перевірити, чи попадає така точка у проміжок $[z_{i-1}, z_i^{(0)}]$. Якщо попадає, то визначення вузла сплайну z_i відбувається за допомогою метода половинного поділу проміжка наближення, а якщо не попадає – то використовуючи ітераційні формули.

Якщо вираз для ядра наближення невідомий, то при визначенні вузлів сплайну слід користуватися ітераційною формулою (11) доти, поки кількість виконаних кроків не перебільшує величини $k/2$, де k – обчислюється згідно (5). Потім необхідно перейти до використання методу половинного поділу. Такий метод реалізований і у таблиці 1 вказана кількість k_3 його кроків.

1. De Mori R., Cardin R. A new design approach to binary logarithm computation// Signal Processing. – 1987. – 13, N 2. – P. 177-195.
2. Grintzali F., Popakonstantinei G. A fast piecewise linear approximation algorithm// Signal Processing. – 1983. – 5, N3. – P. 221-227.
3. Lawson C.L. Characteristic properties of the segmented rational minimax approximation problem// Numer. Math. – 1964. – 6, N4. – P.293-301.
4. Попов Б.О. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка. – 1989. – 272 с.
5. Попов Б.О. Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ.-Киев: Наук. думка. – 1985. – 600 с.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.97

УДК 518.5:518.62:681.335

Б.О.Попов, О.І.Лаушник

Наближення показникових функцій за допомогою спеціального виразу

З метою прискорення обчислення математичних функцій на ЕОМ або за допомогою спеціалізованих пристроїв пропонуються усе нові способи обчислення таких функцій [3,4]. Особливо корисне швидке обчислення найбільш поширених елементарних функцій. При цьому важливо дослідити властивості таких способів і провести їх порівняння із відомими. Далі таке дослідження поводитьсь для показникової функції.

При найкращому чебишовському наближенні показникової функції c^x ($c > 0$) за допомогою раціонального многочлена

$$R_{k,l}(x) = P_k(x)/Q_l(x), \quad (1)$$

де $P_k(x)$ та $Q_l(x)$ многочлени степеня k та l відповідно, мінімум максимальної похибки при сталому $m = k + l$ досягається для $k = l$

або $k = l + 1$ [2]. Для функції c^x справедливо $c^{-x} = 1/c^x$. Не важко бачити, що раціональний многочлен $R(x)$ матиме властивість $R(-x) = 1/R(x)$ тоді і лише тоді, коли його можна представити у вигляді

$$R(x) = T_{N,M}(x) = \frac{\alpha_N(x^2) + x\beta_M(x^2)}{\alpha_N(x^2) - x\beta_M(x^2)}, \quad (2)$$

де $\alpha_N(x)$ та $\beta_M(x)$ многочлени степеня відповідно N та M ;

$$\alpha_N(x^2) = \sum_{i=0}^N a_i x^{2i}, \beta_M(x^2) = \sum_{i=0}^M b_i x^{2i}.$$

Відносна похибка $\delta(x)$ наближення функції c^x за допомогою виразу (2) $\delta(x) = 1 - R(x)c^{-x}$ має очевидну властивість

$$\delta(-x) = -\delta(x)/(1 - \delta(x))$$

Звідси слідує, що для малих $\delta(x)$

$$\delta(-x) \approx -\delta(x). \quad (3)$$

Нехай вираз (2) – найкраще відносне чебишовське наближення функції c^x на проміжку $[0, b]$. Оскільки цей вираз має $N + M + 2$ параметри, то на цьому проміжку буде $N + M + 3$ точки альтернансу $\{u_i\}_0^{N+M+2}$ ($0 < u_0 < u_1 < \dots < u_{N+M+2} = b$), у яких змінюються знаки екстремумів функції $\delta(x)$:

$$\delta(u_i) = -\delta(u_{i+1}), \quad i = \overline{0, N+M+1}. \quad (4)$$

Із виразів (3) та (4) маємо на проміжку $[-b, b]$:

$$\delta(-t_i) \approx -\delta(t_i), \quad i = \overline{0, 2(N+M+2)+1}, \quad (5)$$

де

$$t_i = \begin{cases} -u_{N+M+2-i} & \text{при } i = \overline{0, N+M+2} \\ u_{i-N-M-3} & \text{при } i = \overline{N+M+3, 2(N+M+2)+1} \end{cases}$$

Тобто, якщо $M = N$ або $M = N - 1$, то вираз (2) близький до найкращого відносного чебишовського наближення функції c^x на проміжку $[-b, b]$ раціональним многочленом (1), для якого

$k = l = N + M + 1$. В останньому випадку максимальна похибка наближення виражається формулою [2]

$$\mu(c^x, R_{k,k}) = \frac{(k!)^2 (\ln c)^{2k+1} b^{2k+1}}{2^{2k} (2k)! (2k+1)!} [1 + O(b^2)] \quad (6)$$

Виходячи із виразу (6) та властивості (5), бачимо, що максимальна похибка найкращого відносного чебишовського наближення функції c^x на проміжку $[0, b]$ за допомогою раціонального многочлена (2) має вигляд

$$\mu(c^x, T_{N,M}) = \frac{(N+M+1)!^2 (b \ln c)^{2(N+M)+3}}{2^{2N+2M+2} (2N+2M+2)! (2N+2M+3)!} [1 + O(b^2)] \quad (7)$$

Для знаходження параметрів $\{a_i\}_{i=0}^N$ та $\{b_i\}_{i=0}^M$ найкращого чебишовського наближення функції $y = c^x$ на проміжку $[0, b]$ за допомогою виразу (2) необхідно послідовно розв'язувати систему рівнянь чебишовської інтерполяції [1]

$$1 - R(u_i) c^{-u_i} = (-1)^i \mu, \quad i = \overline{0, N+M+1},$$

яка може бути перетворена до вигляду

$$\sum_{j=0}^N a_j [1 - (1 - (-1)^i \mu) c^{u_i}] u_i^{2j} + \sum_{j=0}^M b_j [1 + (1 - (-1)^i \mu) c^{u_i}] u_i^{2j+1} = 0, \quad i = \overline{0, N+M+1} \quad (8)$$

Прийнявши $b_M = 1$ і вважаючи величину похибки μ відомою із виразу (7) бачимо, що система (8) є системою $N+M+2$ рівнянь із $N+M+1$ невідомими параметрами. Зайве рівняння можна використати для перевірки. Параметри знаходяться за одним з алгоритмів Ремеза [1].

Пропонований алгоритм значно простіший за відомі, бо не передбачає розв'язання нелінійних рівнянь. Перевіримо його точність. Для цього для різних b, N та M визначимо похибку μ за формулою (7) (верхнє число у таблиці) і фактичне найбільше значення відносної похибки при наближенні функції $y = e^x$ на проміжку $[-b, b]$ за допомогою виразу (2), параметри якого знайдені за описаним алгоритмом (нижнє число).

M,N	b = 1	b = 1/2	b = 1/4	b = 1/16	b = 1/32
0,0	$2.083 \cdot 10^{-2}$ $2.068 \cdot 10^{-2}$	$2.604 \cdot 10^{-3}$ $2.602 \cdot 10^{-3}$	$3.255 \cdot 10^{-4}$ $3.255 \cdot 10^{-4}$	$5.086 \cdot 10^{-6}$ $5.086 \cdot 10^{-6}$	$6.358 \cdot 10^{-7}$ $6.358 \cdot 10^{-7}$
0,1	$8.68 \cdot 10^{-5}$ $8.68 \cdot 10^{-5}$	$2.713 \cdot 10^{-6}$ $2.713 \cdot 10^{-6}$	$8.477 \cdot 10^{-8}$ $8.477 \cdot 10^{-8}$	$8.278 \cdot 10^{-11}$ $8.278 \cdot 10^{-11}$	$2.587 \cdot 10^{-12}$ $2.587 \cdot 10^{-12}$
1,1	$1.55 \cdot 10^{-7}$ $1.55 \cdot 10^{-7}$	$1.211 \cdot 10^{-9}$ $1.211 \cdot 10^{-9}$	$9.461 \cdot 10^{-12}$ $9.461 \cdot 10^{-12}$	$5.775 \cdot 10^{-16}$ $5.775 \cdot 10^{-16}$	$4.511 \cdot 10^{-18}$ $4.511 \cdot 10^{-18}$
1,2	$1.538 \cdot 10^{-10}$ $1.538 \cdot 10^{-10}$	$3.004 \cdot 10^{-13}$ $3.004 \cdot 10^{-13}$	$5.866 \cdot 10^{-16}$ $5.866 \cdot 10^{-16}$	$2.238 \cdot 10^{-21}$ $2.238 \cdot 10^{-21}$	$4.371 \cdot 10^{-24}$ $4.371 \cdot 10^{-24}$
2,2	$9.708 \cdot 10^{-14}$ $9.708 \cdot 10^{-14}$	$4.74 \cdot 10^{-17}$ $4.74 \cdot 10^{-17}$	$2.315 \cdot 10^{-20}$ $2.315 \cdot 10^{-20}$	$5.519 \cdot 10^{-27}$ $5.519 \cdot 10^{-27}$	$2.695 \cdot 10^{-30}$ $2.695 \cdot 10^{-30}$

Дані таблиці підтверджують працездатність пропонованого алгоритму. В найпростіших випадках алгоритм може бути додатково спрощений. Наведемо приклади для $c = e$.

Приклад 1. $N = M = 0$, $R(x) = (A + x)/(A - x)$, $\mu = b^3/48$. Із системи рівнянь (8) слідує, що $A = b(1 + \mu + e^{-b})/(1 + \mu - e^{-b})$. Екстремальне значення похибки досягається в точці $u_0 = \sqrt{A(A - 2)}$.

Приклад 2. $N = 1$, $M = 0$, $R(x) = (A + x^2 + Bx)/(A + x^2 - Bx)$, $\mu = b^5/11520$. Позначимо $\gamma(x) = (1 + (1 - \mu)e^x)/(1 - (1 - \mu)e^x)$. Тоді точка альтернансу $c = u_0$ знаходиться з трансцендентного рівняння $(A + c^2)(A + c^2 - 2B) - Bc^2(B - 4) = 0$, де $A = -b^2 - Bb\gamma(b)$, $B = (c^2 - b^2)/(b\gamma(b) - c\gamma(c))$.

Відомо, що при рівномірному відносному наближенні показникової функції за допомогою найкращих чебишовських раціональних многочленів проміжок наближення розбивається на рівні частини [2]. Нехай проміжок $[0, b]$ розбито на r рівних частин точками $z_i = ib/r$, $i = \overline{0, r}$. Позначимо $u_i = z_{i-1} + b/2r$, $y = x - u_i$, $i = \overline{1, r}$. Тоді для змінної y маємо $|y| \leq b/2r$. Оскільки $c^x = c^u c^y$, то на кожному проміжку $[z_{i-1}, z_i]$, $i = \overline{1, r}$ функцію e^x можна наблизити виразом $T_{N,M}^{(i)}(x) = e^{u_i} T_{N,M}(x - u_i)$ з однаковою відотною похибкою

$$\mu = \frac{(N+M+1)!^2 b^{2(N+M)+3}}{2^{4N+4M+5} (2N+2M+2)! (2N+2M+3)! r^{2N+2M+3}} \left[1 + O\left(\frac{b^2}{4r^2}\right) \right]$$

Якщо при цьому $x \in (0, b)$, то номер проміжку $i = \lfloor xr/b \rfloor$.

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.:Наука. 1972. 368с. 2. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. К.:Наук.думка. 1989. 272с. 3. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. К.:Наук.думка. 1984. 600с. 4. Moshier S.L.B. Methods and programs for mathematical functions. N.Y.: John Wiley. 1989. 418p.

Стаття надійшла до редколегії 4.12.97

УДК 517.7:534.111

А.Ф.Барвінський, Х.Т.Дрогомирецька, І.М.Дудзяний

Асимптотичні розв'язки узагальненої задачі Вітта у першому наближенні

Розглянемо крайову задачу, що описується загальним нелінійним автономним хвильовим рівнянням

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^p - a \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^q = -2\delta \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

і крайовими умовами

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} &= -2\varepsilon\Delta(1-u^2) \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+q} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^p\right]_{x=l} &= -2\varepsilon\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

де ε - малий параметр ($\varepsilon > 0$), δ, Δ, β - сталі ($\Delta > 0, \beta \neq 0, 1 - \varepsilon\Delta > 0$); $p, q, m+1, n+1$ - числа вигляду $(2k_1+1)/(2k_2+1)$, а $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots$

У випадку $m=0, p=q=1$ задача (1), (2) співпадає з задачею А. Вітта [2], що описує встановлення автоколивальних у деякій системі з розподіленими параметрами, а тому назовемо її узагальненою задачею

Вітта. Її асимптотичний розв'язок при $m=n=0$, $p=q=1$ побудований у [3].

За асимптотичним методом Крилова-Боголюбова-Митропольського [1], розв'язок задачі (1);(2), що близький до першої форми динамічної рівноваги, подамо у вигляді

$$u(x, t) = aX(x) \cdot T(\varphi) + \varepsilon u_1(x, a, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(x, a, \varphi) \dots \quad (3)$$

де $u_i(x, a, \varphi)$ - невідомі функції ($i=1, 2, \dots$); $aX(x) \cdot T(\varphi)$ - розв'язок відповідної незбуреної ($\varepsilon=0$) задачі, що виражається через *Ateb*-функції [4]

$$aX(x) \cdot T(\varphi) = a \cdot ca\left(\frac{q}{n+q}, \frac{m+p}{q}, v(a)x\right) \cdot sa\left(\frac{n+q}{p}, \frac{p}{m+p}, \varphi\right),$$

$$v(a) = \left(\frac{\lambda(a)(n+2q)^q (m+p+q)^{n+q}}{(2q)^{n+2q}} a^{m+p-n-q} \right)^{\frac{1}{n+2q}},$$

а $\lambda(a)$ - найменший додатний дійсний корінь рівняння

$$\left(sa\left(\frac{q}{n+q}, \frac{m+p}{q}, v(a)l\right) \right)^{q+n} = -\alpha \lambda \beta \left(\frac{m+p+q}{2qv(a)} \right)^{q+n} \left(ca\left(\frac{m+p}{q}, \frac{q}{n+q}, v(a)l\right) \right)^{m+p}.$$

Величини a і φ , що входять у розклад (3), задаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \frac{d\varphi}{dt} = w(a) + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots,$$

$$\text{де } w(a) = \left(\alpha \frac{\lambda(a)(m+2p)^p (m+p+q)^{m+p}}{(2p)^{m+2p}} \right)^{\frac{1}{m+2p}},$$

$A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$ - невідомі функції.

Знайдемо перше наближення асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2). Для визначення $A_1(a), B_1(a)$ застосуємо метод енергетичного балансу [3]. Отримаємо

$$A_1(a) = \frac{\overline{\Phi}(a)}{a^{m+p-1} w^{m+2p-2}(a) Q \left(M m w(a) + N \left(2 p w(a) + p a \frac{dw}{da} \right) \right)},$$

$B_1(a) = 0$, де Q, M, N - сталі, що обчислюються згідно формул

$$M = \left(\frac{2p}{n+p+q} \right)^{m-1} \left(\frac{-4p^2}{(n+p+q)(m+2p)} \right)^{p+1} \cdot 2B\left(\frac{p(n+q+2)}{n+p+q}, 1\right),$$

$$N = \left(\frac{2p}{n+p+q} \right)^{m+1} \left(\frac{-4p^2}{(n+p+q)(m+2p)} \right)^{p-1} \cdot 2B \left(\frac{(p-1)(n+q)+p}{n+p+q}, \frac{3(m+p)}{m+2p} \right),$$

$$Q = \int_0^l X^{m+p}(x) dx, \quad B(\cdot, \cdot) - \text{Beta-функція},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(a) = & \frac{4apw}{n+p+q} B_1 Q_2 - \frac{4\delta apw}{n+p+q} (B_2 - a^2 B_3) \left[\frac{n+q}{\beta} \left(\frac{dX}{dx} \right)_{x=l}^{n+q-1} Q_1 + \right. \\ & \left. + \alpha n Q \right] + \frac{4\delta pmw^2}{n+p+q} \left(\frac{2apw}{n+p+q} \right)^{m-1} \left(\frac{-4ap^2w}{(n+p+q)(m+2p)} \right)^p \left[-\frac{4a^2pw}{n+p+q} B_3 - \right. \\ & \left. - \frac{2pw}{m+2p} (B_4 - a^2 B_7) \right] Q_3 + \\ & + \left[-\frac{8a^2p^2w^2}{(n+p+q)^2} B_6 + \frac{32a^2p^2w^2}{(n+p+q)(m+2p)} B_2 - \frac{2pw}{m+2p} \left(\frac{2mw}{m+2p} B_4 + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2w(n+q)}{n+p+q} B_2 - \frac{2mwa^2}{m+2p} B_5 - \frac{2wa^2(n+q)}{n+p+q} B_3 \right) \right] Q_4, \end{aligned}$$

$$\text{де } B_1 = 2B \left(\frac{p}{n+p+q}, \frac{2m+3p}{m+2p} \right), \quad B_2 = 2B \left(\frac{p(n+q)}{n+p+q}, \frac{2m+3p}{m+2p} \right),$$

$$B_3 = 2B \left(\frac{p(n+q+2)}{n+p+q}, \frac{2m+3p}{m+2p} \right), \quad B_4 = 2B \left(\frac{p+(n+q)(p+1)}{n+p+q}, \frac{m+p}{m+2p} \right),$$

$$B_5 = 2B \left(\frac{(n+q)(p+1)+3p}{n+p+q}, \frac{m+p}{m+2p} \right),$$

$$B_6 = 2B \left(\frac{(n+q)(p-1)+p}{n+p+q}, \frac{3m+5p}{m+2p} \right), \quad B_7 = 2B \left(\frac{n+q+4}{n+p+q}, \frac{2m+3p}{m+2p} \right),$$

$$Q_1 = \int_0^l X(x) dx, \quad Q_2 = \int_0^l X^2(x) dx, \quad Q_3 = \int_0^l \left(\frac{dX}{dx} \right)^{n-1} \frac{d^2X}{dx^2} X(x) dx,$$

$$Q_4 = \int_0^l X^{m+p}(x)(x-l) dx.$$

Отже, перше наближення асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) запишеться у вигляді

$$u_{(1)}(x, t) = a \cdot ca\left(\frac{q}{n+q}, \frac{m+p}{q}, v(a)x\right) \cdot sa\left(\frac{n+q}{p}, \frac{p}{m+p}, \varphi\right),$$

а амплітуда a і фаза φ задаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = w(a).$$

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.:Наука. 1974. 504с.
2. Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы. //ЖТФ. 1934. 4. Вып.1. С.144-157.
3. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.К.: Вища школа. 1976. 589с.
4. Сеник П.М. Про *Ateb*-функції. //ДАН УРСР. Сер.А. 1968. №1. С.23-26.

Стаття надійшла до редколегії 24.09.97

УДК 517.7:534.111

Х.Т.Дрогомирецька

Про інтегрування спеціальних *Ateb*-функцій

Спеціальні *Ateb*-функції [2,3] є оберненням неповної *Beta*-функції. *Ateb*-синус $sa(\bar{n}, \bar{m}, w)$ та *Ateb*-косинус $ca(\bar{m}, \bar{n}, w)$ ($\bar{m} = \frac{2\nu_1^* + 1}{2\nu_2^* + 1}, \bar{n} = \frac{2\nu_1^{**} + 1}{2\nu_2^{**} + 1}$ ($\nu_1^*, \nu_1^{**}, \nu_2^*, \nu_2^{**} = 0, 1, 2, \dots$)) $\in 2\Pi(\bar{m}, \bar{n})$ -періодичними функціями, де

$$\Pi(\bar{m}, \bar{n}) = \Pi = B\left(\frac{1}{\bar{m}+1}, \frac{1}{\bar{n}+1}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}} (1-t)^{-\frac{\bar{m}}{\bar{m}+1}} dt, \quad (1)$$

що пов'язані між собою тотожністю

$$[ca(\bar{m}, \bar{n}, w)]^{\bar{m}+1} + [sa(\bar{n}, \bar{m}, w)]^{\bar{n}+1} = 1 \quad (2)$$

та диференціюються згідно правил

$$\begin{aligned} \frac{dsa(\bar{n}, \bar{m}, w)}{dw} &= \frac{2}{\bar{n}+1} [ca(\bar{m}, \bar{n}, w)]^{\bar{m}}, \\ \frac{dca(\bar{m}, \bar{n}, w)}{dw} &= -\frac{2}{\bar{m}+1} [sa(\bar{n}, \bar{m}, w)]^{\bar{n}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Частковим випадком спеціальних Ateb-функцій ($\bar{m} = \bar{n} = 1$) є звичайні тригонометричні функції $\sin w$, $\cos w$.

Спеціальні Ateb -функції є інтегральними, адже вони є оберненими до функцій, що виражаються через інтеграли від простих елементарних функцій. Ця обставина робить проблематичним процес інтегрування в квадратурах виразів, що містять спеціальні Ateb-функції.

Зупинимось на процесі знаходження означеного інтеграла на проміжку $[0; 2\Pi]$ від добутку степенів Ateb -функцій. **Теорема:**

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\Pi} (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^s (ca(\bar{m}, \bar{n}, w))^l dw = \\ & = \frac{1}{2} (1 + (-1)^s + (-1)^l + (-1)^{l+s}) B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1}, \frac{l+1}{\bar{m}+1}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

де s, l є числами виду $\frac{p}{q}$ ($p \in Z$, $q = 2q_1 + 1$, $q_1 \in N$).

Доведення. Розіб'ємо інтеграл (4) на суму чотирьох інтегралів

$$\begin{aligned} & \int_a^b (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^s (ca(\bar{m}, \bar{n}, w))^l dw = \\ & = \sum_{k=1}^4 \int_{\frac{\Pi}{2}(k-1)}^{\frac{\Pi}{2}k} (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^s (ca(\bar{m}, \bar{n}, w))^l dw. \end{aligned} \quad (5)$$

Для знаходження кожного з них визначимо з тотожності (2)

$$ca(\bar{m}, \bar{n}, w) = \begin{cases} \left(1 - (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^{\bar{n}+1}\right)^{\frac{1}{\bar{m}+1}}, & k = 1, 4 \\ -\left(1 - (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^{\bar{n}+1}\right)^{\frac{1}{\bar{m}+1}}, & k = 2, 3 \end{cases} \quad (6)$$

та, згідно (3),

$$(ca(\bar{m}, \bar{n}, w))^{\bar{m}} dw = \frac{\bar{n}+1}{2} d(sa(\bar{n}, \bar{m}, w)). \quad (7)$$

Знайдемо перший з інтегралів (5) ($k = 1$):

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{\Pi}{2}} (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^s (ca(\bar{m}, \bar{n}, w))^l dw = \\ &= \frac{\bar{n}+1}{2} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^s (1 - (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^{\bar{n}+1})^{\frac{l-\bar{m}}{\bar{m}+1}} dsa(\bar{n}, \bar{m}, w). \end{aligned}$$

Проводячи заміну $u = (sa(\bar{n}, \bar{m}, w))^{\bar{n}+1}$,

$$dsa(\bar{n}, \bar{m}, w) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{n}+1} u^{-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}, & k=1,2 \\ -\frac{1}{\bar{n}+1} u^{-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}, & k=3,4. \end{cases} \quad (8)$$

дістанемо

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{s-\bar{n}}{\bar{n}+1}} (1-u)^{\frac{l-\bar{m}}{\bar{m}+1}} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1}, \frac{l+1}{\bar{m}+1}\right). \quad (9)$$

Аналогічно, враховуючи (6), (8), матимемо

$$J_2 = \frac{(-1)^l}{2} B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1}, \frac{l+1}{\bar{m}+1}\right), \quad (10)$$

$$J_3 = \frac{(-1)^{l+s}}{2} B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1}, \frac{l+1}{\bar{m}+1}\right), \quad (11)$$

$$J_4 = \frac{(-1)^s}{2} B\left(\frac{s+1}{\bar{n}+1}, \frac{l+1}{\bar{m}+1}\right) \quad (12)$$

Підсумовуючи (9)-(12), дістанемо формулу(4). **Теорему доведено.**

Слід відмітити, що аналогічно можна знайти інтеграл від добутку степенів *Ateb*-функцій на довільному проміжку (a, b) , який буде виражатись через неповну *Beta*-функцію.

При $\bar{m} = \bar{n} = 1$ отримаємо відому [1] формулу інтегрування

добутку степенів тригонометричних функцій

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin w)^s (\cos w)^l dw = \frac{1}{2} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{l+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l+2}{2}\right)}.$$

1. Бронштейн И.Н., Семедяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.:Наука. 1981. 523 с. 2. Сеник П.М. Обернення неповної *Beta*-функції. //УМЖ. 1969. 21. №3. С. 325-333.
3. Сеник П.М. Про *Ateb*-функції. //ДАН УРСР. Сер.А. 1968. №1. С. 23-26.

Стаття надійшла до редколегії 1.10.97

Г.Г.Цегелик, О.Б.Семенська

До вибору оптимального числа процесорів багатопроцесорних ЕОМ при пошуку інформації в послідовних файлах

В [1] вперше розглядається задача вибору оптимального числа процесорів багатопроцесорних ЕОМ при пошуку інформації в послідовних файлах для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів, досліджується картина залежності числа процесорів від зміни закону розподілу ймовірностей. При цьому вважається, що файл розбитий на n блоків по m записів в кожному і при пошуку запису використовується метод m -паралельного послідовного перегляду блоків записів в основній пам'яті. В даній статті розглядається більш загальна задача, коли блоки записів містять по ml записів, де l – натуральне число.

Припустимо, що послідовний упорядкований файл міститься в зовнішній пам'яті ЕОМ, до складу якої входить m процесорів, які паралельно працюють і мають спільне поле пам'яті. Будемо вважати, що записи файла умовно розбиті на n блоків по ml записів в кожному. Нехай N – число записів файла, $a_0 = b_0 + d_0 ml$ – час читання блоку записів в основну пам'ять, де b_0 , d_0 – деякі константи, t_0 – час виконання операції m -паралельного послідовного перегляду записів в основній пам'яті, p_i – імовірність звертання до i -го запису файла, E – математичне сподівання загального часу, необхідного для пошуку запису в файлі. Будемо також вважати, що для пошуку запису відбувається послідовне зчитування блоків записів в основну пам'ять і їх m -паралельний послідовний перегляд. Тоді E виразиться формулою:

$$E = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (ka_0 + ((k-1)l + i)t_0) P_{(k-1)ml + (i-1)m + j}.$$

Знайдемо явний вираз для E у випадку різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів і визначимо значення параметра m при фіксованому значенні l , при якому E досягає мінімуму.

1. Якщо розподіл імовірностей звертання до записів є рівномірний, то для E одержуємо вираз

$$E = \frac{1}{2}((n+1)a_0 + (nl+1)t_0),$$

або

$$E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{N}{ml} + 1 \right) (b_0 + d_0 ml) + \left(\frac{N}{m} + 1 \right) t_0 \right].$$

Функція E досягає мінімуму при

$$m = \frac{1}{l} \sqrt{N \left(\frac{b_0}{d_0} + l \frac{t_0}{d_0} \right)}.$$

2. Нехай імовірності звертання до записів задовольняють "бінарний" розподіл [1]. Тоді аналогічно як в [2] одержимо:

$$E = \frac{2^{ml}}{2^{ml} - 1} (1 - 2^{-N}) a_0 + \left[\frac{2^m}{2^m - 1} (1 - 2^{-N}) + \frac{n-l}{2^N} \right] t_0.$$

Нехтуючи величиною 2^{-N} , з достатньо високою точністю можна прийняти

$$E = \frac{2^{ml}}{2^{ml} - 1} (b_0 + d_0 ml) + \frac{2^m}{2^m - 1} t_0.$$

Оскільки

$$\frac{dE}{dm} = -\frac{l 2^{ml} \ln 2}{(2^{ml} - 1)^2} (b_0 + d_0 ml) + \frac{2^{ml}}{2^{ml} - 1} d_0 l - \frac{2^m \ln 2}{(2^m - 1)^2} t_0,$$

то для визначення значення параметра m , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

$$(2^m - 1)^2 2^{m(l-1)} l \left(2^{ml} - 1 - \ln 2 \left(\frac{b_0}{d_0} + ml \right) \right) = (2^{ml} - 1)^2 \ln 2 \frac{t_0}{d_0}.$$

3. Припустимо, що ймовірності звертання до записів задовольняють закон Зіпфа [1]. В цьому випадку аналогічно як в [2] одержимо

$$E = \frac{1}{H_N} [((n+1)H_N - S_{ml}(n))(a_0 + t_0 l) + ((1-l)H_N + l S_{ml}(n) - S_m(nl))t_0],$$

де

$$S_{ml}(n) = \sum_{k=1}^n H_{kml}, \quad S_m(nl) = \sum_{k=1}^{nl} H_{km}.$$

Використовуючи апроксимацію $S_{ml}(n)$ і $S_m(nl)$ відповідно виразами [2,3]

$$\bar{S}_{ml}(n) = n(H_N - 1) + \frac{1}{2} \ln n + C_1,$$

$$\bar{S}_m(nl) = nl(H_N - 1) + \frac{1}{2} \ln nl + C_1,$$

де $C_1 = \frac{1}{2} \ln 2\pi$, з достатньо високою точністю можемо прийняти

$$E = \frac{1}{H_N} \left[\left(H_N + n - \frac{1}{2} \ln n - C_1 \right) a_0 + \right. \\ \left. + \left(H_N + nl - \frac{1}{2} \ln nl - C_1 \right) t_0 \right],$$

або

$$E = \frac{1}{H_N} \left[\left(H_N + \frac{N}{ml} - \frac{1}{2} \ln \frac{N}{ml} - C_1 \right) (b_0 + d_0 ml) + \right. \\ \left. + \left(H_N + \frac{N}{m} - \frac{1}{2} \ln \frac{N}{m} - C_1 \right) t_0 \right].$$

Оскільки

$$\frac{dE}{dm} = \frac{1}{H_N} \left[\left(H_N + \frac{N}{ml} - \frac{1}{2} \ln \frac{N}{ml} - C_1 \right) d_0 l + \right. \\ \left. + (b_0 + d_0 ml) \left(\frac{1}{2m} - \frac{N}{m^2 l} \right) + \left(\frac{1}{2m} - \frac{N}{m^2} \right) t_0 \right],$$

то для знаходження значення параметра m , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо рівняння

$$m^2 l^2 (2H_N - 2C_1 + 1 - \ln N + \ln ml) + ml \left(\frac{b_0}{d_0} + \frac{t_0}{d_0} \right) = 2N \left(\frac{b_0}{d_0} + l \frac{t_0}{d_0} \right).$$

4. Нехай імовірності звертання до записів задовольняють узагальнений закон розподілу [1], де $0 < c < 2$, $c \neq 1$. Тоді аналогічно як в [2] для E маємо вираз

$$E = \frac{1}{H_N^{(c)}} \left[\left((n+1)H_N^{(c)} - S_{ml}^{(c)}(n) \right) (a_0 + t_0 l) + \right. \\ \left. + \left((l-1)H_N^{(c)} + lS_{ml}^{(c)}(n) - S_m^{(c)}(nl) \right) t_0 \right],$$

де

$$S_{ml}^{(c)}(n) = \sum_{k=1}^n H_{kml}^{(c)}, \quad S_m^{(c)}(nl) = \sum_{k=1}^{nl} H_{km}^{(c)}.$$

Використовуючи апроксимацію $S_{ml}^{(c)}(n)$ і $S_m^{(c)}(nl)$ відповідно виразами [2,3]

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ml}^{(c)}(n) &= nH_N^{(c)} + \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}} \right), \\ \bar{S}_m^{(c)}(nl) &= nlH_N^{(c)} + \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} nl + \frac{\alpha^{(c)}(nl)}{(nl)^{1-c}} \right),\end{aligned}$$

де

$$\alpha^{(c)}(k) = H_k^{(c-1)} - \frac{1}{2-c} k^{2-c},$$

з достатньо високою точністю можемо прийняти

$$\begin{aligned}E = \frac{1}{H_N^{(c)}} &\left[\left(H_N^{(c)} - \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}} \right) \right) a_0 + \right. \\ &\left. + \left(H_N^{(c)} + \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} nl - \frac{\alpha^{(c)}(nl)}{(nl)^{1-c}} \right) \right) t_0 \right],\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}E = \frac{1}{H_N^{(c)}} &\left[\left(H_N^{(c)} - \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} n + \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}} \right) \right) \left(b_0 + \frac{d_0 N}{n} \right) + \right. \\ &\left. + \left(H_N^{(c)} + \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} nl - \frac{\alpha^{(c)}(nl)}{(nl)^{1-c}} \right) \right) t_0 \right].\end{aligned}$$

Знайдемо $\frac{dE}{dn}$, замінюючи похідну від функції $\alpha^{(c)}(n)$ різницею

$\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)$. Отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dn} &\approx \frac{1}{H_N^{(c)}} \left[\frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{1-c}{2-c} - \frac{\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}} + (1-c) \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{2-c}} \right) \times \right. \\ &\times \left(b_0 + \frac{d_0 N}{n} \right) + \left(\frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{c-1}{2-c} n - \frac{\alpha^{(c)}(n)}{n^{1-c}} \right) - H_N^{(c)} \right) \frac{N}{n^2} d_0 +\end{aligned}$$

$$+ \frac{N^{1-c}}{1-c} \left(\frac{1-c}{2-c} l - \frac{\alpha^{(c)}(nl+1) - \alpha^{(c)}(nl)}{(nl)^{1-c}} + (1-c) l \frac{\alpha^{(c)}(nl)}{(nl)^{2-c}} \right) t_0 \Bigg].$$

Для наближеного визначення значення параметра n , при якому функція E досягає мінімуму, одержуємо таке рівняння

$$\begin{aligned} & l^{1-c} \left(\frac{n^{3-c}}{2-c} - n^2 \frac{\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n)}{1-c} + n \alpha^{(c)}(n) \right) \frac{b_0}{d_0} + \\ & + \left(\frac{n^{3-c}}{2-c} l^{2-c} - n^2 \frac{\alpha^{(c)}(nl+1) - \alpha^{(c)}(nl)}{1-c} + n \alpha^{(c)}(nl) \right) \frac{t_0}{d_0} = \\ & = l^{1-c} \left(H_N^{(c)} N^{(c)} n^{1-c} + \frac{N}{1-c} \left(n \left(\alpha^{(c)}(n+1) - \alpha^{(c)}(n) \right) - (2-c) \alpha^{(c)}(n) \right) \right). \end{aligned}$$

1. Семенська О.Б., Цегелик Г.Г. Задача вибору раціонального чи оптимального числа процесорів багатопроцесорних ЕОМ при пошуку інформації в послідовних файлах: Препринт №2/97. – Львів: Львівський державний університет ім. І.Франка, 1997. – 52 с.
2. Цегелик Г.Г. Организация и поиск информации в базах данных. Львов: Вища школа, 1987. – 176 с.
3. Цегелик Г.Г. Системы распределенных баз данных. Львов: Світ, 1990. – 168 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.12.97

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України
Львівський державний університет
імені Івана Франка

Вісник
Львівського університету

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.
Випуск 46

ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Редактор Е.А.Главацька
Художній редактор Е.А.Каменщик
Технічний редактор С.Д.Довба
Комп'ютерна верстка О.М.Левченко

Підписано до друку 18.12.97. Папір офсетний. Вид. № 18. Замовне

Державне спеціалізоване видавництво «Світ»
при Львівському університеті
290000 Львів, вул Дорошенка, 41

Надруковано видавничим центром
Львівського державного університету ім. І.Франка
290602 Львів, вул. Університетська, 1

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1997, вип. 46, 1-120