ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, серія механіко-математична Вип.47, 1997

УДК 512.553

КІЛЬЦЯ ДРОБІВ РОЗШАРОВАНОГО ДОБУТКУ КІЛЕЦЬ

Р. В. Вовк

Vovk R. V. Rings of quotients of the fiber product of rings. The fiber product of the torsion theories is introduced. The quotient rings of the fiber product of the rings with respect to the fiber product of the torsion theory is investigated.

Розшаровані добутки об'єктів різних категорій відіграють важливу роль у різних розділах математики. У топології розшаровані добутки зв'язані з накриттями топологічних просторів і теорією жмутків. Розшаровані добутки займають важливе місце в алгебраїчній K-теорії та застосовуються до алгебраїчної геометрії (див. [1], [7]). В останній час ця конструкція все частіше використовується в теорії асоціативних кілець. Фаччіні [10] досліджував теоретико-кільцеві властивості розшарованих добутків локальних асоціативно-комутативних кілець, нетерових кілець, тощо. Т.Огома [14] досліджував комутативні нетерові кільця з одиницею. Вивченню розшарованих добутків некомутативних нетерових кілець присвячена праця [4]. Інші категорні властивості розшарованих добутків кілець та модулів над ними досліджували Вісман [18], Фаччіні і Вамош [11] і інші. Одним з основних результатів останньої праці є теорема 1, формулювання якої наведено нижче і яку ми використовуватимемо в наших доведеннях.

Природно виникає потреба в дослідженні локалізацій розшарованих добутків кілець. У зв'язку з цим автор ввів поняття розшарованого добутку скрутів і радикальних фільтрів (див. [3]). У даній праці досліджено скрути над розшарованими добутками кілець і кільця дробів стосовно цих скрутів.

1. Основні терміни і позначення. Кожне кільце вважатимемо асоціативним з одиницею, всі модулі, якщо не обумовлено інше, будуть унітарними лівими модулями. Нехай $\mathcal{C}$ – абелева категорія, $\alpha_1 : C_1 \to C_0$ і $\alpha_2 : C_2 \to C_0$ – морфізми в $\mathcal{C}$. Розшарованим добутком морфізмів α_1 і α_2 або (в іншій термінології) об'єктів C_1 і C_2 над C_0, є об'єкт C з $\mathcal{C}$ разом з такими морфізмами $\pi_1 : C \to C_1$ і $\pi_2 : C \to C_2$, що виконуються умови:

1) $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 13B30; Secondary 13D30.

2) Для кожного об'єкта X і будь-яких морфізмів $\xi_1 : X \to C_1$ і $\xi_2 : X \to C_2$, таких, що $\alpha_1\xi_1 = \alpha_2\xi_2$ існує і єдиний такий морфізм $\gamma : X \to C$, що $\pi_1\gamma = \xi_1$ і $\pi_2\gamma = \xi_2$. Діаграма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & C_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ C_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

називається діаграмою розшарованого добутку або універсальним квадратом. Розшарований добуток визначається однозначно з точністю до ізоморфізму ([17], с.89). Позначатимемо такий розшарований добуток через $C_1 \times_{C_0} C_2$.

Дуальним до поняття розшарованого добутку є поняття корозшарованого добутку, який також визначається однозначно з точністю до ізоморфізму ([17], с.92). Корозшарований добуток позначатимемо символом $C_1 \sqcup_{C_0} C_2$.

У категорії A-Mod розшарований добуток задається більш конкретно:

$$C_1 \times_{C_0} C_2 = \big\{(x, y) \in C_1 \times C_2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y) \in C_0\big\}.$$

Для корозшарованого добутку має місце зображення

$$C_1 \sqcup_{C_0} C_2 = \big(C_1 \oplus C_2\big)/C', \text{ де } C' = \big\{(\beta_1(x), -\beta_2(x)) \mid x \in C_0\big\}.$$

([17], с.92). У категорії асоціативних кілець Rings розшаровані і корозшаровані добутки також існують і задаються цілком аналогічним чином.

Нехай A_1, A_2, A_0 – кільця і задано гомоморфізми $f_1 : A_1 \to A_0$, $f_2 : A_2 \to A_0$. Побудуємо розшарований добуток A кілець A_1 і A_2 над A_0, який задається універсальним квадратом

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & A_0 \end{tikzcd} .$$

Впродовж всієї статті f_2 є накладенням кілець, а тоді p_1 також є сюр'єктивним гомоморфізмом. Позначимо функтори

$$\begin{aligned} P_1 &= Hom_A(A_1, -) : A\text{-}Mod \to A_1\text{-}Mod, \\ P_2 &= Hom_A(A_2, -) : A\text{-}Mod \to A_2\text{-}Mod, \\ F_1 &= Hom_{A_1}(A_0, -) : A_1\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod, \\ F_2 &= Hom_{A_2}(A_0, -) : A_2\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod. \end{aligned}$$

За подробицями можна звернутися до [9], [11]. Існує природна еквівалентність функторів $\eta : F_2P_2 \to F_1P_1$. Позначимо відображення:

$$\pi_1 : P_1M \to M,\ \pi_2 : P_2M \to M,\ \varphi_1 : F_1N \to N,\ \varphi_2 : F_2L \to L,$$

де $M \in A$-Mod, $N \in A_1$-Mod, $L \in A_2$-Mod. Відповідні позначення зберігатимуться в усій статті.

У своїх доведеннях ми будемо спиратися на такий результат Фаччіні і Вамоша.

Теорема 1. *[11, теорема 2] A-модуль E є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $E_1 = Hom_A(A_1, E)$ є ін'єктивним A_1-модулем і $E_2 = Hom_A(A_2, E)$ є ін'єктивним A_2-модулем.*

Нагадаємо основні моменти побудови розшарованого добутку категорій A_1-Mod і A_2-Mod. Позначимо через $\mathcal{C}$ категорію, об'єктами якої є трійки (M_1, M_2, α), де $M_1 \in A_1$-Mod, $M_2 \in A_2$-Mod і $\alpha : F_2M_2 \to F_1M_1$ є A_0-ізоморфізмом. Морфізмами з об'єкта (M_1, M_2, α) в об'єкт (M_1', M_2', α') в категорії $\mathcal{C}$ є такі пари (σ_1, σ_2), де $\sigma_1 : M_1 \to M_1'$ – A_1-гомоморфізм і $\sigma_2 : M_2 \to M_2'$ – A_2-гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{tikzcd} F_1M_1 \arrow[r, "F_1\sigma_1"] & F_1M_1' \\ F_2M_2 \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "F_2\sigma_2"'] & F_2M_2' \arrow[u, "\alpha'"'] \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Категорія $\mathcal{C}$ є адитивною зі скінченними добутками, та низкою інших хороших властивостей (див., наприклад, [1], [7], [12]).

Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ можна побудувати діаграму

$$\begin{tikzcd} M & M_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \\ M_2 \arrow[u, "\pi_2"] & M_0 \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1\alpha"'] \end{tikzcd},$$

яка є коуніверсальним квадратом в категорії A-Mod, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ і $M_0 = F_2M_2$. Отриманий модуль $M \in A$-Mod є корозшарованим добутком модулів M_1 та M_2 над M_0. Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ покладемо $M = T(M_1, M_2, \alpha)$. Тоді $T : \mathcal{C} \to A - Mod$ є функтором, який індукує еквівалентність між повною підкатегорією категорії $\mathcal{C}$, яка породжена об'єктами $(E_1, E_2, \alpha) \in \mathcal{C}$, де E_1 і E_2 – ін'єктивні A_1- і A_2-модулі відповідно і повною підкатегорією категорії A-Mod, яка породжена ін'єктивними A-модулями, (див. [11]).

2. Розшаровані добутки скрутів. У цьому параграфі з'ясуємо яким чином будуються розшаровані добутки скрутів.

Лема 2. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$, $M, N \in A$-Mod, $M_1 = P_1M$, $M_2 = P_2M$, $M_0 = F_2P_2M$, $N_1 = P_1N$, $N_2 = P_2N$, $N_0 = F_2P_2N$. Тоді, очевидно, $M_1, N_1 \in A_1$-Mod, $M_2, N_2 \in A_2$-Mod, $M_0, N_0 \in A_0$-Mod. Нехай $M = M_1 \sqcup_{M_0} M_2$ і $N = N_1 \sqcup_{N_0} N_2$, причому ці кодобутки визначаються такими коуніверсальними квадратами*

$$\begin{tikzcd} M & M_1 \arrow[l] \\ M_2 \arrow[u] & M_0 \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"'] \end{tikzcd} \quad i \quad \begin{tikzcd} N & N_1 \arrow[l] \\ N_2 \arrow[u] & N_0 \arrow[l, "\beta_2"] \arrow[u, "\beta_1"'] \end{tikzcd}$$

(у категорії A-Mod). Тоді модуль N вкладається в модуль M тоді і тільки тоді, коли існують такі мономорфізми $\lambda_1 : N_1 \to M_1$, $\lambda_2 : N_2 \to M_2$ і $\lambda_0 : N_0 \to M_0$, що $\lambda_1\beta_1 = \alpha_1\lambda_0$ і $\lambda_2\beta_2 = \alpha_2\lambda_0$.

Доведення. Нехай $\lambda : N \to M$ є мономорфізмом. Тоді розглянемо коротку точну послідовність: $0 \to N \xrightarrow{\lambda} M \to K \to 0$. Подіємо на цю послідовність функтором P_1. Враховуючи те, що P_1 є коваріантним і точним зліва, отримаємо точну послідовність $0 \to N_1 \xrightarrow{P_1(\lambda)} M_1 \to P_1K$, причому гомоморфізм $\lambda_1 = P_1(\lambda)$ є мономорфізмом.

Так само при дії функтора P_2 отримаємо мономорфізм $\lambda_2 = P_2(\lambda) : N_2 \to M_2$.

Маючи мономорфізм λ_2 можна побудувати точну послідовність A_2-модулів $0 \to N_2 \xrightarrow{\lambda_2} M_2 \to L \to 0$. Після дії функтора F_2 отримаємо точну послідовність $0 \to N_0 \xrightarrow{F_2(\lambda_2)} M_0 \to F_2L$ і мономорфізм $\lambda_0 = F_2(\lambda_2)$. Легко бачити, що рівності, виписані в формулюванні леми справді мають місце.

Навпаки, нехай існують мономорфізми $\lambda_1 : N_1 \to M_1$, $\lambda_2 : N_2 \to M_2$ і $\lambda_0 : N_0 \to M_0$, для яких $\lambda_1\beta_1 = \alpha_1\lambda_0$ і $\lambda_2\beta_2 = \alpha_2\lambda_0$.

Побудуємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
M & & & M_1 \arrow[lll] \\
& N \arrow[ul, "\lambda"'] & N_1 \arrow[l] \arrow[ur, "\lambda_1"] & \\
& N_2 \arrow[u] \arrow[dl, "\lambda_2"] & N_0 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dr, "\lambda_0"'] & \\
M_2 \arrow[uuu] & & & M_0 \arrow[lll] \arrow[uuu]
\end{tikzcd},$$

де квадрати

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & M_1 \\
N_0 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[r, "\lambda_0"'] & M_0 \arrow[u, "\alpha_1"']
\end{tikzcd}
\quad \text{і} \quad
\begin{tikzcd}
N_2 \arrow[d, "\lambda_2"'] & N_0 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[d, "\lambda_0"] \\
M_2 & M_0 \arrow[l, "\alpha_2"]
\end{tikzcd}$$

є комутативними.

З основної властивості коуніверсального квадрату випливає, що існує гомоморфізм $\lambda : N \to M$ з відповідними властивостями. Нам потрібно переконатись, що цей гомоморфізм насправді є мономорфізмом.

Нагадаємо, що за нашим припущенням гомоморфізм кілець $p_1 : A \to A_1$ є сюр'єктивним, і ми можемо побудувати точну послідовність A-модулів $0 \to Kerp_1 \to A \xrightarrow{p_1} A_1 \to 0$. Подіємо на цю послідовність функтором $Hom_A(-, N)$, який є контраваріантним і точним зліва. Це означає, що наступна послідовність

$$Hom_A(A_1, N) \xrightarrow{Hom_A(p_1,N)} Hom_A(A_1, N) \to Hom_A(Kerp_1, N)$$

є точною і гомоморфізм $\pi_1 = Hom_A(p_1, N)$ є ін'єктивним. У наших позначеннях маємо, що $\pi_1 : N_1 \to N$ є мономорфізмом. Аналогічно, після застосування функтора $Hom_A(-, M)$ отримаємо мономорфізм $\pi_1' : M_1 \to M$.

Гомоморфізм $\pi_1' \circ \lambda_1 : N_1 \to M$ є ін'єктивним, як композиція двох мономорфізмів. З комутативності наведеної діаграми маємо, що $\pi' \circ \lambda_1 = \lambda \circ \pi_1$. Оскільки π_1 є мономорфізмом, то λ також є мономорфізмом. Лему доведено.

Нагадаємо, що два ін'єктивних модулі називаються еквівалентними, якщо кожний з них можна вкласти в прямий добуток екземплярів іншого (див. [13]).

Має місце така лема.

Лема 3. *Нехай (E_1, E_2, α), (E_1', E_2', α') – об'єкти категорії $\mathcal{C} = A_1\text{-}Mod \times_{A_0\text{-}Mod} A_2\text{-}Mod$. Покладемо $E = T(E_1, E_2, \alpha)$ і $E' = T(E_1', E_2', \alpha')$, де T – функтор, побудований вище. Тоді ін'єктивні A-модулі E і E' є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли справджуються такі три твердження:*
1) $E_1 = P_1(E)$ і $E_1' = P_1(E')$ є еквівалентними ін'єктивними A_1-модулями,
2) $E_2 = P_2(E)$ і $E_2' = P_2(E')$ є еквівалентними ін'єктивними A_2-модулями,
3) $E_0 = F_2P_2(E)$ і $E_0' = F_2P_2(E')$ є еквівалентними ін'єктивними A_0-модулями.

Доведення. Нехай E, E' - еквівалентні ін'єктивні ліві A-модулі, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$. Тоді існує мономорфізм $\lambda : E' \to E^{\Omega}$ для деякої множини Ω.

З леми 2 випливає, що існує мономорфізм $\lambda_1 : P_1(E') \longrightarrow P_1(E^{\Omega})$. Існує також ізоморфізм $\rho_1 : Hom_A(A_1, E^{\Omega}) \to (Hom_A(A_1, E))^{\Omega}$. Тому $P_1(E^{\Omega}) \cong (P_1 E)^{\Omega} = E_1^{\Omega}$.

Ця рівність дозволяє утворити точну послідовність $0 \to E_1' \xrightarrow{\rho_1\lambda_1} E_1^{\Omega} \to K_1$.

Тут A_1-модулі E_1' і E_1^{Ω} є ін'єктивними, оскільки функтор P_1 зберігає ін'єктивність і прямий добуток ін'єктивних модулів є ін'єктивним.

Отже, ми отримали, що за мономорфізмом $\lambda : E' \to E^{\Omega}$ можна побудувати мономорфізм $\rho_1\lambda_1 : E_1' \to E_1^{\Omega}$. Проводячи аналогічні міркування щодо мономорфізму $\lambda' : E \to E'^{\Omega'}$, знайдемо мономорфізм $\rho_1\lambda_1' : E_1 \to E'^{\Omega'}_1$. Існування мономорфізмів $\rho_1\lambda_1$ і $\rho_1\lambda_1'$ доводить еквівалентність модулів E_1 і E_1'. Діючи функтором P_2 на мономорфізми λ і λ', і повторюючи наведені вище викладки отримаємо мономорфізми $\rho_2\lambda_2 : E_2' \to E_2^{\Omega}$ $\rho_2\lambda_2' : E_2 \to E'^{\Omega'}_2$, де $\rho_2 : P_2(E^{\Omega'}) \longrightarrow (P_2(E))^{\Omega'}$ – A_2-ізоморфізм. Це і буде означати, що E_2 і E_2' є еквівалентними.

Еквівалентність модулів E_0 і E_0' отримується внаслідок дії функтора F_2, який є коваріантним і точним зліва, на точні послідовності

$$0 \to E_2' \xrightarrow{P_2(\lambda)} E_2^{\Omega} \to K_2\ , \quad 0 \to E_2 \xrightarrow{P_2(\lambda')} E'^{\Omega'}_2 \to K_2'\ .$$

Навпаки, нехай E_1, E_1' є еквівалентними A_1-модулями і E_2, E_2' є еквівалентними A_2-модулями. Нагадаємо, що

$$E_1 = Hom_A(A_1, E),\ E_2 = Hom_A(A_2, E),\ E_1' = Hom_A(A_1, E') \text{ і } E_2' = Hom_A(A_2, E').$$

За теоремою 1 модулі E і E' є ін'єктивними.

Враховуючи те, що (E_1, E_2, α) і (E_1', E_2', α') є об'єктами категорії $\mathcal{C}$, яка є розшарованим добутком категорій A_1-Mod і A_2-Mod, можна побудувати коуніверсальні квадрати

$$
\begin{tikzcd}
E & E_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \\
E_2 \arrow[u, "\pi_2"] & E_0 \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1\eta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E' & E_1' \arrow[l, "\pi_1'"'] \\
E_2' \arrow[u, "\pi_2'"] & E_0' \arrow[l, "\varphi_2'"] \arrow[u, "\varphi_1'\eta"']
\end{tikzcd}, \tag{1}
$$

де всі модулі розглядаються як A - модулі і всі стрілки є A - гомоморфізмами.

Оскільки модулі E_1 і E_1', E_2 і E_2' та E_0 і E_0' є попарно еквівалентними у відповідних категоріях, то існують такі мономорфізми: $\mu_1: E_1' \to E_1^{\Omega_1}$, $\mu_2: E_2' \to E_2^{\Omega_2}$ *і* $\mu_0: E_0' \to E_0^{\Omega_0}$, де Ω_1, Ω_2, Ω_0 – деякі множини. Серед цих множин виберемо множину найбільшої потужності і позначимо її через Ω. Зрозуміло, що наведені вкладення будуть існувати і для степеня Ω, тобто можна записати $\mu_1: E_1' \to E_1^{\Omega}$, $\mu_2: E_2' \to E_2^{\Omega}$ *і* $\mu_0: E_0' \to E_0^{\Omega}$. Крім того, діаграма

$$
\begin{tikzcd}
E^{\Omega} & E_1^{\Omega} \arrow[l, "\pi_1^{\Omega}"'] \\
E_2^{\Omega} \arrow[u, "\pi_2^{\Omega}"] & E_0^{\Omega} \arrow[l, "\varphi_2^{\Omega}"] \arrow[u, "(\varphi_1\eta)^{\Omega}"']
\end{tikzcd}
$$

є теж коуніверсальним квадратом, що випливає із коуніверсальності відповідних квадратів (1).

Розглянемо тепер діаграму

$$
\begin{tikzcd}
E^{\Omega} & & & E_1^{\Omega} \arrow[lll, "\pi_1^{\Omega}"'] \\
& E' \arrow[ul] & E_1' \arrow[l, "\pi_1'"'] \arrow[ur, "\mu_1"] & \\
& E_2' \arrow[u, "\pi_2'"] \arrow[dl, "\mu_2"] & E_0' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dr, "\mu_0"'] & \\
E_2^{\Omega} \arrow[uuu, "\pi_2^{\Omega}"] & & & E_0^{\Omega} \arrow[lll] \arrow[uuu]
\end{tikzcd}
$$

З основної властивості коуніверсального квадрату отримаємо, що існує гомоморфізм $\mu: E' \to E^{\Omega}$. За лемою 6 гомоморфізм μ є мономорфізмом.

Проводячи аналогічні міркування, замінивши місцями E і E' одержимо мономорфізм $\mu': E \to E'^{\Omega'}$. Існування мономорфізмів μ і μ' доводить еквівалентність модулів E і E'. Лему доведено.

Гратку всіх скрутів, визначених у категорії A-Mod, позначатимемо через A-$Tors$. Нехай τ_1 – скрут в A_1-Mod і τ_2 – скрут в A_2-Mod з котвірними ін'єктивними модулями

$E_1 \in A_1$-Mod і $E_2 \in A_2$-Mod. Тоді розшарованим добутком скрутів τ_1 і τ_2 в категорії $\mathcal{C}$ назвемо скрут τ, копороджений об'єктом (E_1, E_2, θ). Скрут τ в категорії A-Mod копороджений таким ін'єктивним модулем E, що діаграма

$$\begin{tikzcd} E & E_1 \arrow[l] \\ E_2 \arrow[u] & E_0 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2}$$

є коуніверсальним квадратом також називатимемо розшарованим добутком скрутів. Ін'єктивний модуль $E_0 \in A_0$-Mod копороджує скрут τ_0. Позначатимемо розшарований добуток скрутів в категорії $\mathcal{C}$ через $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$. Надалі називатимемо його розшарованим добутком скрутів τ_1 і τ_2 над скрутом τ_0.

3. Кільця дробів розшарованого добутку кілець стосовно розшарованого добутку скрутів.

Твердження 4. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ – розшарований добуток кілець, S, S_1, S_2 і S_0 – мультиплікативно-замкнені множини в кільцях A, A_1, A_2 і A_0 відповідно, такі що $S = S_1 \times_{S_0} S_2$, і існують ліві кільця дробів вказаних кілець стосовно заданих множин A_S, A_{1S_1}, A_{2S_2} і A_{0S_0}. Тоді $A_S = A_{1S_1} \times_{A_{0S_0}} A_{2S_2}$.*

Доведення. Нехай розшарований добуток кілець $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ заданий універсальним квадратом

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & A_0 \end{tikzcd}.$$

Оскільки мультиплікативно-замкнена множина $S \subset A$ є розшарованим добутком мультиплікативно-замкнених множин $S_1 \subset A_1$ і $S_2 \subset A_2$ над множиною $S_0 \subset A_0$, тому

$$p_1(S) \subseteq S_1,\ p_2(S) \subseteq S_2,\ f_1(S_1) \subseteq S_0,\ \text{і}\ f_2(S_2) \subseteq S_0.$$

Утворимо ліві кільця дробів A_S, A_{1S_1}, A_{2S_2} і A_{0S_0}. Для кожного з цих кілець дробів існують кільцеві гомоморфізми

$$\lambda : A \to A_S,\ \lambda_1 : A_1 \to A_{1S_1},\ \lambda_2 : A_2 \to A_{2S_2},\ \text{і}\ \lambda_0 : A_0 \to A_{0S_0}.$$

Розглянемо композицію гомоморфізмів

$$\lambda_1 \circ p_1 : A \longrightarrow A_{1S_1}.$$

Для будь-якого елемента $s \in S$ $\lambda_1(s) \in S_1$, а тому елемент $\lambda_1 p_1(s)$ є оборотним в A_{1S_1}. У такій ситуації існує і єдиний гомоморфізм

$$\mu_1 : A_S \longrightarrow A_{1S_1}$$

такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[r, "\mu_1"] & A_{1S_1} \\ A \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "\lambda_1 p_1"'] & \end{tikzcd}$$

є комутативною. Аналогічним чином можна знайти гомоморфізми

$$\mu_2 : A_S \to A_{2S_2},\ \eta_1 : A_{1S_1} \to A_{0S_0},\ \text{і}\ \eta_2 : A_{2S_2} \to A_{0S_0},$$

для яких діаграми

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[r, "\mu_2"] & A_{2S_2} \\ A \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "\lambda_2 p_2"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A_{1S_1} \arrow[r, "\eta_1"] & A_{0S_0} \\ A_1 \arrow[u, "\lambda_1"] \arrow[ur, "\lambda_0 f_1"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A_{2S_2} \arrow[r, "\eta_2"] & A_{0S_0} \\ A_2 \arrow[u, "\lambda_2"] \arrow[ur, "\lambda_0 f_2"'] & \end{tikzcd}$$

будуть комутативими.

Побудуємо тепер комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[rrr, "\mu_1"] \arrow[ddd, "\mu_2"'] & & & A_{1S_1} \arrow[ddd, "\eta_1"] \\ & A \arrow[ul, "\lambda"'] \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[d] & \\ & A_2 \arrow[r] \arrow[dl, "\lambda_2"] & A_0 \arrow[dr, "\lambda_0"'] & \\ A_{2S_2} \arrow[rrr, "\eta_2"'] & & & A_{0S_0} \end{tikzcd}.$$

У кільці дробів A_S задано відношення еквівалентності "$\sim$", відповідно до якого будь-які два елементи $(a, s), (b, t) \in A_S$, де $a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2) \in A,\ s = (s_1, s_2),\ t = (t_1, t_2) \in S$ є еквівалентними

$$\big((a_1, a_2), (s_1, s_2)\big) \sim \big((b_1, b_2), (t_1, t_2)\big), \tag{3}$$

якщо існують елементи (c_1, c_2), $(d_1, d_2) \in A$ такі, що

$$(a_1, a_2)(c_1, c_2) = (b_1, b_2)(d_1, d_2) \ \text{ тобто } \ a_1c_1 = b_1d_1,\ a_2c_2 = b_2d_2 \ \text{і}$$

$$(s_1, s_2)(c_1, c_2) = (t_1, t_2)(d_1, d_2) \ \text{ тобто } \ s_1c_1 = t_1d_1,\ s_2c_2 = t_2d_2$$

(див. [17]).

Отже, ми отримали, що для елементів $a_1, b_1 \in A_1$ і $s_1, t_1 \in S_1$ існують такі $c_1, d_1 \in A_1$, що $a_1c_1 = b_1d_1$ і $s_1c_1 = t_1d_1$. Це означає, що $(a_1, s_1) \sim (b_1, t_1)$. Так само отримаємо, що $(a_2, s_2) \sim (b_2, t_2)$. Отже, при дії гомоморфізмів μ_1 і μ_2 еквівалентність елементів у кільцях дробів зберігається. Крім того, $\eta_1(a_1, s_1) = (a_0, s_0)$ і $\eta_2(a_2, s_2) = (a_0, s_0)$, оскільки $f_1(a_1) = f_2(a_2) = a_0$ і $f_1(s_1) = f_2(s_2) = s_0$.

Отже, ми отримали, що

$$A_S = \Big\{ \big((a_1, a_2), (s_1, s_2)\big) \in A \times S \mid f_1(a_1) = f_2(a_2), f_1(s_1) = f_2(s_2) \Big\} =$$

$$= \Big\{ \big((a_1, s_1), (a_2, s_2)\big) \in A_{1S_1} \times A_{2S_2} \mid \eta_1(a_1, s_2) = \eta_2(a_2, s_2) \in A_{0S_0} \Big\}.$$

Тому, знаючи зображення розшарованого добутку кілець, наведене вище, маємо, що кільце дробів A_S рівне розшарованому добутку кілець дробів A_{1S_1} і A_{2S_2} над кільцем дробів A_{0S_0}. Лему доведено.

Нехай τ – скрут в категорії A-Mod, копороджений ін'єктивним модулем E. Нехай $S = End_A(E)$ кільце ендоморфізмів модуля E і

$$B_E(-) = Hom_S(Hom_R(-, E), E)$$

ендофунктор в категорії A-Mod. Тоді існує канонічне природне перетворення δ з тотожнього ендофунктора в A-Mod в $B_E(-)$ таке, що для будь-якого елемента $m \in M$ і кожного елемента $\alpha \in Hom_A(M, E)$ справджується рівність $(m\delta_M)(\alpha) = m\alpha$. Для кожного модуля $M \in A$-Mod періодична частина його $\tau(M)$ дорівнює ядру $\mathrm{Ker}(\delta_M)$ (див. [5]).

Теорема 5. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ – розшарований добуток кілець, заданий універсальним квадратом*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & A_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ A_2 & \xrightarrow[f_2]{} & A_0 \end{array},$$

де гомоморфізми f_1 і f_2 є сюр'єктивними, $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$ – розшарований добуток скрутів $\tau_1 \in A_1$-$Tors$ і $\tau_2 \in A_2$-$Tors$ над $\tau_0 \in A_0$-$Tors$ і існують A-ізоморфізми

$$Hom_A(B_E(A_1), E) \cong Hom_A(A_1, E),$$

$$Hom_A(B_E(A_2), E) \cong Hom_A(A_2, E),$$

$$Hom_{A_2}(B_E(A_0), E) \cong Hom_{A_2}(A_0, E).$$

Тоді, якщо існують модулі часток $Q_\tau(A)$, $Q_{\tau_1}(A_1)$, $Q_{\tau_2}(A_2)$ і $Q_{\tau_0}(A_0)$ A-модулів A, A_1, A_2 і A_0 стосовно скрутів τ, τ_1, τ_2 і τ_0 відповідно, то

$$Q_\tau(A) = Q_{\tau_1}(A_1) \times_{Q_{\tau_0}(A_0)} Q_{\tau_2}(A_2).$$

Доведення. Нехай τ_1, τ_2 і τ_0 – скрути в категоріях A_1-Mod, A_2-Mod і A_0-Mod відповідно і $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$ – розшарований добуток скрутів. Для вказаних скрутів можна знайти ін'єктивні ендоциклічні котвірні $E_1 \in A_1\text{-}Mod$, $E_2 \in A_2\text{-}Mod$ і $E_0 \in A_0\text{-}Mod$. Побудуємо коуніверсальний квадрат

$$\begin{tikzcd} E & E_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \\ E_2 \arrow[u, "\pi_2"] & E_0 \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1"'] \end{tikzcd} . \tag{4}$$

Для кожного з цих модулів знайдемо кільця ендоморфізмів $S = End_A(E)$, $S_1 = End_{A_1}(E_1)$, $S_2 = End_{A_2}(E_2)$, $S_0 = End_{A_0}(E_0)$. Діаграма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\bar{p}_2"'] & S_1 \arrow[d, "\bar{f}_1"] \\ S_2 \arrow[r, "\bar{f}_2"'] & S_0 \end{tikzcd}$$

є універсальним квадратом, $S = S_1 \times_{S_0} S_2$ і гомоморфізм $\bar{f}_1$ є сюр'єктивним. Замінивши місцями E_1 і E_2 отримаємо, що гомоморфізм $\bar{f}_2$ є сюр'єктивним.

Гомоморфізми $\bar{p}_1$ і $\bar{p}_2$ є теж сюр'єктивними. Модуль E_1 є циклічним правим S_1-модулем, тобто $E_1 = e_1 S_1$ для деякого $e_1 \in E_1$. Крім того, E_1 г правим S-модулем і, оскільки $\bar{p}_1$ – епіморфізм, $E_1 = e_1\bar{p}_1(S)$. Отже, E_1 є циклічним S-модулем. Так само E_2 – циклічний S-модуль.

Враховуючи те, що

$$E = E_1 \oplus E_2/E' \ , \quad \text{де } E' = \{(\varphi_1(x), -\varphi_2(x)) \mid x \in E_0\},$$

отримаємо, що модуль E є скінченно-породженим правим S-модулем, тобто ендоскінченним модулем.

Тепер до діаграми (4), де всі модулі розглядатимемо як праві S-модулі, застосуємо функтор $Hom_S(-, E_S)$. Отримаємо діаграму

$$\begin{tikzcd} Hom_S(E,E) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_S(E_1,E) \arrow[d] \\ Hom_S(E_2,E) \arrow[r] & Hom_S(E_0,E) \end{tikzcd} . \tag{5}$$

Оскільки ін'єктивний котвірний E скруту τ є ендоскінченним модулем, то бікомутатор $Hom_S(E, E)$ модуля E співпадає з кільцем часток $Q_\tau(A)$ кільця A стосовно скруту τ (див. [5]).

За умовою

$$Hom_A(B_E(A_1), E) \cong Hom_A(A_1, E),$$

тому модуль часток $Q_\tau(A_1)$ A-модуля A_1 стосовно скруту τ є ізоморфним до

$$B_E(A_1) = Hom_S(Hom_A(A_1, E), E) = Hom_S(E_1, E).$$

Аналогічним чином отримуємо, що

$$Q_\tau(A_2) \cong Hom_S(E_2, E) \text{ i } Q_\tau(A_0) \cong Hom_S(E_0, E).$$

Отже, ми отримали діаграму

$$\begin{array}{ccc} Q_\tau(A) & \longrightarrow & Q_\tau(A_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_\tau(A_2) & \longrightarrow & Q_\tau(A_0) \end{array},$$

яка завершує доведення теореми.

Автор виражає щиру подяку М.Я. Комарницькому за керівництво роботою.

1. Басс Х. Алгебраическая K-теория. – М., Мир, 1973. – 591 с.
2. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. – М., Мир, 1972. – 259 с.
3. Вовк Р.В. *Абсолютно σ-чистые модули над расслоенным произведением колец* // Тезисы сообщений. VI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Львов. – 1990. – С.33.
4. Вовк Р.В., Комарницький М.Я. *Розшаровані добутки деяких некомутативних нетерових кілець* // Алгебра і топологія. Тематичний збірник наукових праць, Київ. – 1993. – С.26–32.
5. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. – Кишинев, Штиинца, 1983. – 154 с.
6. Ламбек И. Кольца и модули. – М.,Мир, 1971. – 279 с.
7. Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. – М., Мир, 1974.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. т.1 – М., Мир, 1977; т.2 – М., Мир, 1979. – 688 с.
9. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules. – Berlin, Springer-Varlag, 1974. – 339 p.
10. Facchini A. *Fibre product and Morita duality for commutative rings* // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1981. – Vol. 67. – P. 143–156.
11. Facchini A., Vamos P. *Injective modules over pullbacks* // J. London Math. Soc. – 1985. – Vol. 31, N 2. – P. 425–438.
12. Gabriel P. *Des catégories abéliennes* // Bull. Soc. Math. France. – 1962. – Vol. 90. – P. 323–448.
13. Golan J.S. Torsion theories, – New York: J. Willey & Sons, 1986. – 651 p.
14. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings and their applications* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. – Vol. 97. – P. 231–241.

15. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings* // Advanced Studies in Pure Mathematics. – 1987. – Vol. 11. – P. 173–182.

16. Popescu N. Abelian categories with application to rings and modules. – London, Acad. Press, 1973.

17. Stenström B. Rings of quotients. – Berlin, Springer-Verlag, 1975. – 309 p.

18. Wiseman A.N. *Proective modules over pullback rings* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. – Vol. 97. – P. 399–406.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.96