УДК 512.536

ПРО ОСЛАБЛЕННЯ ТОПОЛОГІЇ ПРЯМОЇ СУМИ НА НАПІВГРУПІ БРАКА

О. В. Гутік

Gutik O. V. On a coarsening of a direct sum topology on the Bruck semigroup. The Bruck semigroup of a topological semigroup with a compact ideal admits the only direct sum topology. The method of coarsening of a direct sum topology on the Bruck semigroup of a regular topological inverse semigroup without a minimal idempotent is described.

Нехай S — напівгрупа, $a, b \notin S$. Напівгрупа $\mathcal{C}(S)$ породжується множиною $S \cup \{a, b\}$, та задається такими співвідношеннями $ab = 1$, $as = a$, $sb = b$ для всіх $s \in S$, а також співвідношеннями, що виконуються в S. Одиницею 1 напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ є або одиниця напівгрупи S. якщо $1 \in S$, або ж приєднана звичайним чином до $\mathcal{C}(S)$ одиниця, якщо S не містить одиниці. Напівгрупу $\mathcal{C}(S)$, побудовану таким чином, будемо називати напівгрупою Брака на S. Кожен елемент напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ єдиним чином зображається у вигляді $b^i t a^j$, де $t \in S^1$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Напівгрупа S алгебраїчно вкладається в $\mathcal{C}(S)$ і $\mathcal{C}(S)$ - проста напівгрупа [1], [2, с.139-140], причому, якщо S – інверсна напівгрупа, то $\mathcal{C}(S)$ – інверсна [2, теорема 8.48.]. Довільна топологічна (інверсна) напівгргрупа (S, τ) топологічно ізоморфно вкладається в просту топологічну (інверсну) напівгрупу $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$, де τ^* – топологія прямої суми на $\mathcal{C}(S)$. Напівгрупа $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$ гомеоморфна $\mathbb{Z}_+ \times S^1 \times \mathbb{Z}_+$ з топологією тихоновського добутку, де $\mathbb{Z}_+$ – зліченний дискретний простір [3]. Виявляється, що для топологічних інверсних напівгруп S, які містять мінімальний ідемпотент, топологія прямої суми на $\mathcal{C}(S)$ є єдиною серед топологій τ, що індукують на S вихідну, і таких, що $(\mathcal{C}(S), \tau)$ – топологічна інверсна напівгрупа [3, теорема 2]. Існування мінімального ідемпотента в напівгрупі S є суттєвим.

У даній праці доведено, що топологію прямої суми τ^* на $\mathcal{C}(S)$ можна послабити до напівгрупової лише в точках $b^i a^j$ $i, j \in \mathbb{N}$, а також отримано аналоги теореми 2 з праці [3] для компактних напівгруп, та напівгруп, що містять компактні ідеали.

Надалі будемо вважати, що (S, τ) – довільна гаусдорфова топологічна напівгрупа, $\mathcal{C}(S)$ – напівгрупа Брака на S, $\tilde{\tau}$ – топологія на $\mathcal{C}(S)$, що задовольняє наступні умови:

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22A15; Secondary 20M17.

1) $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа;

2) (S, τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$.

Введемо позначення $S_{i,j} = \{b^i s a^j | s \in S^1\}$, де $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Лема 1. *Для довільного $s \in S_{i,i} \subset \mathcal{C}(S)$, $i \in \mathbb{Z}_+$ існує окіл, що перетинається лише зі скінченною кількістю множин $S_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.*

Доведення. Припустимо, що дане твердження не виконується. Тоді існує елемент $s = b^i t a^i \in S_{i,i}$, довільний окіл якого перетинається з нескінченною кількістю множин $S_{m,n}$. Нехай $f = b^{i+1}a^{i+1}$, тоді $s \cdot f = f$ і $f \cdot s = f$. Оскільки $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа, то існують околи $V(s)$, $V(f)$ і $W(f)$, що задовольняють наступним умовам $V(s)V(f) \subseteq W(f)$, $V(f)V(s) \subseteq W(f)$ і $V(s) \cap V(f) = V(s) \cap W(f) = \emptyset$. За припущенням окіл $V(s)$ перетинається з нескінченною кількістю множин $S_{m,n}$, отже існує $x = b^k p a^l \in V(s)$ $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $p \in S^1$, причому виконується одна з умов : $k > i+1$ або $l > i+1$.

Якщо $k > i+1$ ($l > i+1$), то $fx = b^k p a^l$ ($xf = b^k p a^l$), що суперечить гаусдорфовості $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. Лему доведено.

Лема 2. *Для довільного $s \in S_{i,i} \subset \mathcal{C}(S)$ існує окіл $U(s)$ такий, що $U(s) \subset \cup_{k=0}^{i} S_{k,k}$.*

Доведення. З леми 1 випливає, що існує окіл $O(s)$, що перетинає скінченну кількість множин $S_{k,l}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Покажемо, що для довільного $s \in S_{i,i}$ існує окіл $V(s)$, що перетинає лише множини $S_{k,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Нехай $O(s) \cap S_{m,n} \neq \emptyset$ для деяких $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $m \neq n$. Розглянемо відображення $\phi : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$ означене $\phi(x) = b^{m+n}a^{m+n}x$. Нехай $t \in O(s) \cap S_{m,n}$, тоді $t = b^m t_1 a^n$, $\phi(t) = b^{m+n}a^{m+n}t = b^{m+n}a^{2n}$. Множина $\Phi_{m,n} = \phi^{-1}(b^{m+n}a^{2n})$ замкнена в $\mathcal{C}(S)$, як прообраз точки при неперервному відображенні. Отже, $V(s) = O(s) \backslash (\cup\{\Phi_{m,n} | m, n \in \mathbb{Z}_+, m \neq n \text{ і } O(s) \cap S_{m,n} \neq \emptyset\})$ – окіл точки $s \in S_{i,i}$, що перетинає лише множини $S_{k,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Припустимо, що для довільного околу $V(s)$ існує $x \in V(s) \cap S_{j,j}$ де $j > i$. Нехай $s = b^i s_1 a^i$, тоді $sb^{i+1}a^{i+1} = b^{i+1}a^{i+1}$. Оскільки $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа, то існують околи $V(s)$, $V(b^{i+1}a^{i+1})$, $W(b^{i+1}a^{i+1})$ такі, що $V(s)V(b^{i+1}a^{i+1}) \subseteq W(b^{i+1}a^{i+1})$, $V(s) \cap V(b^{i+1}a^{i+1}) = V(s) \cap W(b^{i+1}a^{i+1}) = \emptyset$. За припущенням існує $x \in V(s) \cap S_{j,j}$ для деякого $j > i$. Тоді $xb^{i+1}a^{i+1} = x$, що суперечить гаусдорфовості $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. Лему доведено.

Лема 3. *Для довільного $i \in \mathbb{N}$ існує окіл $U(b^i a^i)$ такий, що $U(b^i a^i) \subset S_{i,i} \cup S_{i-1,i-1}$.*

Доведення. Нехай $V(b^i a^i)$ – окіл, що задовольняє умови леми 2. Визначимо неперервне відображення $h : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$ наступним чином $h(x) = xb^{i-1}a^{i-1}$. Окіл $U(b^i a^i) = V(b^i a^i) \backslash h^{-1}(b^{i-1}a^{i-1})$ шуканий.

Лема 4. *Для довільного $s \in S_{i,i} \backslash \{b^i a^i\}$ існує окіл $U(s) \subset S_{i,i}$.*

Доведення. Нехай $V(s)$ – окіл, що задовольняє умови леми 2. Визначимо неперервне відображення $l : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$ таким чином $l(x) = xb^i a^i$. Окіл $U(s) = V(s) \backslash l^{-1}(b^i a^i)$ шуканий.

Лема 5. *Для довільного $\tilde{s} \in \mathcal{C}(S)$ існує окіл, що перетинає лише скінченну кількість множин $S_{i,j}$ $i, j \in \mathbb{Z}_+$*

Доведення. Нехай $\tilde{s} = b^i s a^j$. $\tilde{s} \cdot b^j p a^i = b^i s p a^i$, $b^j p a^i \cdot \tilde{s} = b^j p s a^j$, $(p \neq 1_S)$. Для околів $W(b^i s p a^i) \subseteq S_{i,i}$, $W(b^j p s a^j) \subseteq S_{j,j}$ існують околи $U(\tilde{s})$ і $V(b^j p a^i)$ такі, що

1) $U(\tilde{s})V(b^jpa^i) \subseteq W(b^ispa^i)$;
2) $V(b^jpa^i)U(\tilde{s}) \subseteq W(b^jpsa^j)$;
3) $U(\tilde{s}) \cap V(b^jpa^i) = U(\tilde{s}) \cap W(b^ispa^i) = U(\tilde{s}) \cap W(b^jpsa^j) = \emptyset$.

Припустимо, що окіл $U(\tilde{s})$ перетинає нескінченну кількість множин $S_{r,q}$ $r, q \in \mathbb{Z}_+$. Тоді існує $x = b^kta^l \in U(\tilde{s})$ такий, що $l > j$ або $k > i$. Якщо $l > j$, то $b^kta^l \cdot b^jpa^l = b^kta^{l-j+i} \in S_{i,i}$, отже, $k = i$, $l = j$, що суперечить тому, що $l > j$. Якщо $k > i$, то $b^jpa^i \cdot b^kta^l = b^{k-i+j}ta^l \in S_{j,j}$, аналогічно $k = i$, $l = j$. Прийшли до протиріччя. Лему доведено.

Лема 6. *Для довільного $\tilde{s} \in S_{i,j}$ $i, j \in \mathbb{Z}_+$ існує окіл*
$U(\tilde{s}) \subset \cup_{m,n\in\mathbb{Z}_+}\{S_{m,n} | m \leqslant i, n \leqslant j, m - n = i - j\}$.

Доведення. Спочатку покажемо, що для довільного $\tilde{s} \in S_{i,j}$ існує окіл $V(\tilde{s})$, що перетинає скінченну кількість множин $S_{m,n}$, де $m - n = i - j$. Аналогічно як і в лемі 2 доводиться, що множини $M_l(p) = \cup_{k=0}^{p} S_{l+k,k} \cup \{b^{l+p+1}a^{p+1}\}$ і $M_{-l}(p) = \cup_{k=0}^{p} S_{k,l+k} \cup \{b^{p+1}a^{l+p+1}\}$ замкнені в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. За лемою 5 існує окіл $O(\tilde{s})$, що перетинає лише скінченну кількість множин $S_{k,l}$ $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Аналогічно, як і в лемі 2 будується окіл $V(\tilde{s})$, що перетинає лише скінченну кількість множин $S_{m,n}$ таких, що $m - n = i - j$.

Нехай $\tilde{s} = b^isa^j$. Тоді $\tilde{s}b^{j+1}a^{j+1} = b^{i+1}a^{j+1}$. Оскільки $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа, то існують околи $V(\tilde{s})$, $V(b^{j+1}a^{j+1})$, $W(b^{i+1}a^{j+1})$ такі, що

$$V(\tilde{s})V(b^{j+1}a^{j+1}) \subseteq W(b^{i+1}a^{j+1})$$

$$V(\tilde{s}) \cap V(b^{j+1}a^{j+1}) = V(\tilde{s}) \cap W(b^{i+1}a^{j+1}) = V(b^{j+1}a^{j+1}) \cap W(b^{i+1}a^{j+1}) = \emptyset.$$

Нехай $x \in V(\tilde{s}) \cap S_{i+k,j+k}$ $k \in \mathbb{N}$, тоді $xb^{j+1}a^{j+1} = x$, що суперечить гаусдорфовості $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. Лему доведено.

Оскільки, для довільних $l, p \in \mathbb{N}$ множини $M_l(p)$, $M_{-l}(p)$ замкнені в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$, то для довільного $s \in S_{i,j} \backslash \{b^ia^j\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, існує окіл $U(s) \subseteq S_{i,j}$ та для довільних $i, j \in \mathbb{N}$ існує окіл $U(b^ia^j)$ такий, що $U(b^ia^j) \subseteq S_{i,j} \cup S_{i-1,j-1}$. Таким чином доведена

Теорема 1. *Топологію прямої суми на $\mathcal{C}(S)$ можна послабити лише в точках b^ia^j $i, j \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2. *Нехай (S, τ) – гаусдорфова топологічна напівгрупа, що містить компактний лівий, або правий, або двосторонній ідеал, $\mathcal{C}(S)$ – напівгрупа Брака на S. Топологія прямої суми τ^* на $\mathcal{C}(S)$ єдина серед гаусдорфових, для яких (S, τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$.*

Доведення. Нехай J – правий компактний ідеал в S. Покажемо, що в точках b^ia^j послаблення топології прямої суми неможливе. Припустимо, що в точках b^ia^j можна послабити топологію τ^* до напівгрупової $\tilde{\tau}$. Нехай U – довільний окіл b^ia^j, причому $U \cap S_{i-1,j-1} \neq \emptyset$. Покладемо $V = U \backslash b^{i-1}Ja^{j-1}$. Оскільки напівгрупова операція в $\mathcal{C}(S)$ неперервна і $b^{i-1}Ja^{j-1} \cdot b^ia^j = b^ia^j$, то існує окіл $U^*(b^ia^j)$ такий, що $b^{i-1}Ja^{j-1}U^*(b^ia^j) \subseteq V$ і $U^*(b^ia^j) \cap S_{i-1,j-1} \neq \emptyset$. Але $b^{i-1}Ja^{j-1}(U^*(b^ia^j) \cap S_{i-1,j-1}) \subseteq b^{i-1}Ja^{j-1}$, що суперечить тому, що $V \cap b^{i-1}Ja^{j-1} = \emptyset$. У випадку лівого ідеалу доведення аналогічне.

Наслідок 1. *Нехай (S,τ) – компактна гаусдорфова топологічна напівгрупа. $\mathcal{C}(S)$ – напівгрупа Брака на S. Топологія прямої суми τ^* на $\mathcal{C}(S)$ єдина серед таких гаусдорфових, для яких (S,τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S),\tau^*)$.*

З наслідку 1 випливає, що на біциклічній напівгрупі існує лише дискретна топологія [4, наслідок 1.2].

Теорема 3. *Якщо (S,τ) – топологічна інверсна напівгрупа без мінімального ідемпотента, що є регулярним топологічним простором, то на $\mathcal{C}(S)$ можна послабити топологію прямої суми τ^* до напівгрупової інверсної гаусдорфової топології $\tilde{\tau}$ такої, що (S,τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$ і $\tilde{\tau}|_S=\tau$.*

Доведення. Піднапівгрупа ідемпотентів $E(S)$ – регулярний топологічний простір як замкнений підпростір регулярного S. Тоді для довільного околу $U(e)$ ідемпотента e існує окіл $V(e)\subseteq U(e)$ в $E(S)$ такий, що $\overline{V(e)}\subseteq U(e)$. $E(S)\backslash\overline{V(e)}$ – множина відкрита в $E(S)$ для довільних $e\in E(S)$ і $V(e)$, причому $(E(S)\backslash\overline{V(e)})\cap V(e)==\emptyset$. Розглянемо функцію $h(x)=xe$. Покладемо $V_e=\{h^{-1}(f)|f\in V(e)\}$ і $\tilde{V}_e=\{h^{-1}(f)|f\in\overline{V(e)}\}$. V_e – відкрита множина в $E(S)$ і $\tilde{V}_e$ – замкнена в $E(S)$, причому $(E(S)\backslash\tilde{V}_e)\cap V_e=\emptyset$. Покладемо $VO_e=E(S)\backslash\tilde{V}_e$. Зауважимо, що $VO_e\cdot VO_e\subseteq VO_e$.

Топологію $\tilde{\tau}$ на $\mathcal{C}(S)$ задамо таким чином. В точках b^isa^j, a^i, b^i, 1 де $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $s\in S\backslash\{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}$ і τ^* співпадають. Базу топології $\tilde{\tau}$ в точках b^ia^j $i,j\in\mathbb{N}$ задамо таким чином $\mathcal{B}(b^ia^j)=\{M_e(b^ia^j)=b^{i-1}V_e^oa^{j-1}\cup b^iMa^j|M\in\in\mathcal{B}(1),\ V_e^o=\phi^{-1}(VO_e)\cap\psi^{-1}(VO_e)$, де $\phi(x)=xx^{-1}$, $\psi(x)=x^{-1}x$, $e\in E(S)$, $V(e)\in\mathcal{B}(e)\}$, $i,j\in\mathbb{N}$.

Неперервність множення в $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$ достатньо перевірити в трьох наступних випадках:

1) $b^ia^j\cdot b^ka^l$ $i,j,k,l\in\mathbb{N}$;

2) $b^ia^j\cdot b^ksa^l$ $i,j\in\mathbb{N}$, $k,l\in\mathbb{Z}_+$, $s\in S$;

3) $b^isa^j\cdot b^ka^l$ $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $k,l\in\mathbb{N}$, $s\in S$.

1) Нехай $b^ia^j\cdot b^ka^l=\begin{cases} b^{i-j+k}a^l, & j\leqslant k\\ b^ia^{l-k+j}, & j>k.\end{cases}$

Тоді $M_e(b^ia^j)\cdot P_e(b^ka^l)\subseteq R_e(b^ia^j\cdot b^ka^l)$, де M,P,R – околи одиниці в S^1 такі, що $M\cdot P\subset R$.

2) Нехай $b^ia^j\cdot b^ksa^l=\begin{cases} b^{i-j+k}sa^l, & j\leqslant k\\ b^ia^{l-k+j}, & j>k.\end{cases}$

Тоді

а) якщо $j\leqslant k$, то $M_e(b^ia^j)\cdot b^kW(s)a^l\subseteq b^{i+k-j}V(s)a^l$, де $M\cdot W(s)\subseteq V(s)$ і M – окіл 1 в S^1;

б) якщо $j>k$, то для довільного околу $W(s)$ $M_e(b^ia^j)\cdot b^kW(s)a^l\subseteq M_e(b^ia^{j-k+l})$.

3) Нехай $b^isa^j\cdot b^ka^l=\begin{cases} b^{i-j+k}a^l, & j<k\\ b^isa^{l-k+j}, & j\geqslant k.\end{cases}$

Тоді

а) якщо $j<k$, то для довільного околу $W(s)$ $b^iW(s)a^j\cdot M_e(b^ka^l)\subseteq M_e(b^{i-j+k}a^l)$;

б) якщо $j\geqslant k$, то $b^iW(s)a^j\cdot M_e(b^ka^l)\subseteq b^iV(s)a^{j-k+l}$, де $W(s)\cdot M\subseteq V(s)$ і M – окіл 1 в S^1.

Отже, множення неперервне в $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$.

Неперервність інверсії достатньо показати в точках $b^i a^j$ $i, j \in \mathbb{N}$, оскільки лише в них відбувається послаблення топології прямої суми. Якщо $P^{-1} \subseteq M$, де P і M – околи одиниці в S і $e \in E(S)$, тоді $(M_e(b^i a^j))^{-1} \subseteq P_e(b^j a^i)$.

1. Bruck R.H. *A survey of binary systems* // Ergebnisse der Math. – 1958. – Heft 20.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. т.2. – М.: Мир, 1972. – 424 с.
3. Гутик О.В. *Вложение топологических полугрупп в простые* // Математичні студії. – 1994. – N 3. – С. 10-14.
4. Eberhart C., Selden J. *On the closure of the bicyclic semigroup* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 115-126.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.95