УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Г. М. Онишкевич

Onyshkevych G. M. Liapunov's stability of variational inequality for the equation of the type of a plate vibration. The variational inequality for a plate vibration type equation is considered. The class of existence and uniqueness of solutions and some conditions of Liapunov's stability have been obtained for this inequality. This class is defined by coefficients of the inequality.

У праці [1] запропоновано застосування методу Гальоркіна до дослідження стійкості нульового розв'язку одного нелінійного параболічного рівняння Цей підхід є ефективним у тих випадках, коли не працюють теореми типу Ляпунова. Підтвердженням цього є можливість дослідження стійкості нульового розв'язку варіаційних нерівностей. У даній праці розглянуто стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку варіаційної нерівності для рівняння типу коливання пластинки. Наскільки нам відомо, такі результати отримано вперше.

Нехай Ω – довільна обмежена область простору $\mathbb{R}^n$, $S = [0; +\infty)$, $Q = \Omega \times S$, $V = \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, K– замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент. Розглянемо задачу визначення функції $u(x,t)$, що задовольняє нерівність

$$\int_0^T \Big(u_{tt} + A(t)u - f, v - u_t \Big)\, dt \geqslant 0, \tag{1}$$

де T–довільна стала, для довільної $v(x,t)$, $v \in L^2(S;V)$, $v \in K$ майже для всіх $t \in S$; включення

$$u,\ u_t \in L^\infty_{\text{loc}}(S;V),\ u_{tt} \in L^\infty_{\text{loc}}(S;H), \tag{2}$$

$$u_t \in K \text{ майже для всіх } t \in S, \tag{3}$$

а також умови

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x),\ x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega. \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B35; Secondary 35R45.

Дія оператора A визначається рівністю

$$\langle A(t)u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,t) u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_j} v_{x_i} + c(x,t) u_t v + h(x,t) uv \right) dx.$$

Вважатимемо, що виконуються умови

$$\begin{gathered} a_{ij}^{kl} = a_{kl}^{ij},\ b_{ij} = b_{ji},\ \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,t)\eta_{kl}\eta_{ij} \geqslant a_0 \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ij}^2,\ a_0 > 0, \\ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_j\xi_i \geqslant b_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \text{ для довільних } \eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2},\ \xi \in \mathbb{R}^n, \\ b_0 + \frac{a_0\gamma_1}{\varkappa_1} \geqslant \delta_1,\ h(x,t) + \frac{a_0\gamma_2}{\varkappa_0} \geqslant \delta_1,\ c_0 \leqslant c(x,t) \leqslant c^0,\ (x,t) \in Q, \end{gathered} \tag{5}$$

де $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \delta_1-$ додатні сталі, причому $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (5) і, крім того,*

$$\begin{gathered} a_{ij}^{kl},\ a_{ijt}^{kl},\ a_{ijtt}^{kl},\ b_{ij},\ b_{ijt},\ b_{ijtt},\ h,\ h_t,\ h_{tt},\ c,\ c_t \in L^\infty(Q);\ c_0 \geqslant 0,\ u_0 \in V, \\ A(0)u_0 \in H,\ u_1 \in K, \quad \text{а функція } f(x,t) \text{ така, що } f,\ f_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \end{gathered} \tag{6}$$

Тоді нерівність (1) має єдиний розв'язок, який задовольняє включення (2), (3) і умови (4).

Доведення. Зауважимо, що доведення цієї теореми проводиться за схемою доведення теореми 7.1 ([2], с.418). Ми наводимо його для повноти викладу. Візьмемо обмежену область $Q_T = \Omega \times (0;T)$, $T < +\infty$. Розглянемо задачу зі штрафом

$$u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_{\varepsilon t}) = f(x,t),\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ u_{\varepsilon t}(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{7}$$

де $\varepsilon > 0$, $\beta(u) = J(u - P_K(u))$, $J-$ оператор двоїстості між V і V^*, P_K- оператор проектування на K. Очевидно, що $u_{\varepsilon tt}(x,0) = f(x,0) - A(0)u_0$, $u_2(x) = f(x,0) - A(0)u_0 \in H$. Розглянемо задачу, яка отримується з рівняння (7) після формального диференціювання по t:

$$\begin{gathered} u_{\varepsilon ttt} + A(t)u_{\varepsilon t} + A'(t)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon t}) = f_t(x,t), \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ u_{\varepsilon t}(x,0) = u_1(x),\ u_{\varepsilon tt}(x,0) = u_2(x),\ x \in \Omega. \end{gathered} \tag{8}$$

У монографії [2], с. 413 показано, що

$$\int_0^T (\beta'(u_{\varepsilon t}), u_{\varepsilon tt})dt \geqslant 0 \tag{9}$$

і тому задача (8) має єдиний розв'язок u_ε, $u_{\varepsilon t} \in L^\infty(0,T;V)$, $u_{\varepsilon tt} \in L^\infty(0,T;H)$. Помножимо рівняння (7) на $u_{\varepsilon t}$ і зінтегруємо по τ від 1 до t. Тоді отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_t}\Bigg(u_{\varepsilon\tau\tau}u_{\varepsilon\tau} + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,\tau)u_{\varepsilon x_k x_l}u_{\varepsilon\tau x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,\tau)u_{\varepsilon x_j}u_{\varepsilon\tau x_i} + \tag{10}$$

$$+c(x,\tau)(u_{\varepsilon\tau})^2 + h(x,\tau)u_\varepsilon u_{\varepsilon\tau}\Bigg)dx\,d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_t}\beta(u_{\varepsilon\tau})u_{\varepsilon\tau}dx\,d\tau = \int\limits_{Q_t} f(x,\tau)u_{\varepsilon\tau}dx\,d\tau.$$

Оператор штрафу β є монотонним, тобто $(\beta(u_{\varepsilon\tau}), u_{\varepsilon\tau}) \geqslant 0$. Враховуючи умови теореми, з рівності (10) одержимо

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + 2c_0\int\limits_{Q_t}|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t(\beta(u_{\varepsilon\tau}), u_{\varepsilon\tau})d\tau \leqslant |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2 + 2\int\limits_{Q_t} f u_{\varepsilon\tau}dx\,d\tau, \tag{11}$$

де $|v(t)|^2 = \int\limits_\Omega v^2(x,t)dx$, а a_1, b_1, h_1 – такі додатні сталі, що

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,t)\eta_{kl}\eta_{ij} \leqslant a_1\sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}^2,\ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_j\xi_i \leqslant b_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ h(x,t) \leqslant h_1$$

для довільних $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $(x,t) \in Q$. Тоді з нерівності (11) будемо мати оцінку

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leqslant |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2 +$$
$$+\int_0^t|f(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 + \|u_\varepsilon(\tau)\|_V^2\big)d\tau,$$

де $\|v(t)\|_V^2 = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx$. Позначимо $A_1 = \min\{1, a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\}$, $C_1 = |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2 + \int_0^T|f(\tau)|^2 d\tau$. Отже, маємо

$$A_1(|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_V^2) \leqslant C_1 + \int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 + \|u_\varepsilon(\tau)\|_V^2\big)d\tau. \tag{12}$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана до нерівності (12), одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leqslant \frac{C_1}{A_1}\exp\left(\frac{T}{A_1}\right), \quad t \in [0;T]. \tag{13}$$

Згідно з оцінкою (13) маємо, що $u_{\varepsilon t}$ – обмежені в $L^\infty(0,T;H)$, u_ε – обмежені в $L^\infty(0,T;V)$. Помножимо рівняння (8) на $u_{\varepsilon tt}$ і зінтегруємо по τ від 1 до t. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_t}\Big(u_{\varepsilon\tau\tau\tau}u_{\varepsilon\tau\tau}+\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}\,u_{\varepsilon\tau x_k x_l}u_{\varepsilon\tau\tau x_i x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\,u_{\varepsilon\tau x_j}u_{\varepsilon\tau\tau x_i}+$$
$$+c\,(u_{\varepsilon\tau\tau})^2+h\,u_{\varepsilon\tau}u_{\varepsilon\tau\tau}+\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij\tau}^{kl}\,u_{\varepsilon x_k x_l}u_{\varepsilon\tau\tau x_i x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij\tau}\,u_{\varepsilon x_j}u_{\varepsilon\tau\tau x_i}+$$
$$+c_\varepsilon\,u_{\varepsilon\tau}u_{\varepsilon\tau\tau}+h_\varepsilon\,u_\varepsilon u_{\varepsilon\tau\tau}\Big)dx\,d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_t}\beta'(u_{\varepsilon\tau})u_{\varepsilon\tau\tau})dx\,d\tau=\int\limits_{Q_t}f_\tau\,u_{\varepsilon\tau\tau}dx\,d\tau. \qquad (14)$$

Враховуючи нерівність (9), з рівності (14) одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon tt}(t)|^2+a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2\leqslant|u_2|^2+(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_1\|_V^2+$$
$$+\int_0^t\big((1+c^0)|u_{\varepsilon\tau\tau}(\tau)|^2+(a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0)\|u_\varepsilon(\tau)\|_V^2\big)d\tau+$$
$$+c^0\int_0^t|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2d\tau+\int_0^t|f_\tau(\tau)|^2d\tau,$$

де c^0, a_2, b_2, h_2 – такі додатні сталі, що

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ijtt}^{kl}(x,t)\eta_{kl}\eta_{ij}\leqslant a_2\sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}^2,\ \sum_{i,j=1}^{n}b_{ijtt}(x,t)\xi_j\xi_i\leqslant b_2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$
$$h(x,t)\leqslant h_2,\ |c(x,t)|\leqslant c^0$$

для довільних $\eta\in\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(x,t)\in Q$. Покладемо $A_2=\max\{1+c^0,\ a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0\}$, $C_2=|u_2|^2+(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_1\|_V^2+\int_0^T|f_\tau(\tau)|^2d\tau$. Використовуючи оцінку (13), отримаємо нерівність

$$A_1(|u_{\varepsilon tt}(t)|^2+\|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2)\leqslant C_2+A_2\int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau\tau}(\tau)|^2+\|u_{\varepsilon\tau}(\tau)\|_V^2\big)d\tau+$$
$$+(c^0+a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0)\int_0^t\frac{C_1}{A_1}\exp\left(\frac{\tau}{A_1}\right)d\tau.$$

Позначимо $C_3=C_2+(c^0+a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0)C_1\left(\exp\left(\frac{T}{A_1}\right)-1\right)$. Тоді

$$A_1(|u_{\varepsilon tt}(t)|^2+\|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2)\leqslant C_3+A_2\int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau\tau}(\tau)|^2+\|u_{\varepsilon\tau}(\tau)\|_V^2\big)d\tau.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана, одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon tt}(t)|^2 + \|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2 \leqslant \frac{C_3}{A_1}\exp\left(\frac{C_3T}{A_1}\right), \quad t\in[0;T]. \tag{15}$$

Тобто $u_{\varepsilon tt}$– обмежені в $L^\infty(0,T;H)$, $u_{\varepsilon t}$– обмежені в $L^\infty(0,T;V)$. Згідно з оцінками (13) і (15) з послідовності $\{u_\varepsilon\}$ можна виділити таку підпослідовність $\{u^{\varepsilon_k}\}$, що

$$u^{\varepsilon_k}\to u^T,\ u_t^{\varepsilon_k}\to u_t^T * - \text{слабо в } L^\infty(0,T;V),$$
$$u_{tt}^{\varepsilon_k}\to u_{tt}^T * - \text{слабо в } L^\infty(0,T;H),\ \text{при } \varepsilon\to 0.$$

Отже, функція $u^T(x,t)$ задовольняє умови (4). Покажемо, що для $u^T(x,t)$ має місце включення (3). Згідно з рівнянням (7) $\beta(u_{\varepsilon t})=\varepsilon(f-u_{\varepsilon tt}-A(t)u_\varepsilon)$, тобто $\beta(u_{\varepsilon t})\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ в $L^2(0,T;V^*)$. Крім того, використовуючи (9) і (11), отримаємо

$$0\leqslant\int_0^T(\beta(u_{\varepsilon t}),u_{\varepsilon t})dt\leqslant\varepsilon C.$$

Отже, $\beta(u_t^T)=0$, звідки випливає, що $u_t^T(x,t)\in K$ майже скрізь в $S_T=(0;T)$.

Візьмемо $v(x,t)$, $v\in L^2(S;V)$, $v\in K$ майже скрізь. Тоді

$$(u_{tt}^\varepsilon + A(t)u^\varepsilon - f, v-u_t^\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}(\beta(v)-\beta(u_t^\varepsilon),v-u_t^\varepsilon)\geqslant 0 \tag{17}$$

для довільного ε. Зокрема, для $v=u_t^T$ маємо

$$(u_{tt}^\varepsilon + A(t)u^\varepsilon - f, u_t^T-u_t^\varepsilon)\geqslant 0.$$

Звідси отримаємо нерівність

$$(A(t)(u^T-u^\varepsilon),u_t^T-u_t^\varepsilon)\leqslant(A(t)u^T,u_t^T-u_t^\varepsilon)+(u_{tt}^\varepsilon,u_t^T-u_t^\varepsilon)+(f,u_t^T-u_t^\varepsilon). \tag{17}$$

Оцінимо ліву частину нерівності (17) знизу, а саме

$$\int_0^t(A(\tau)(u^T-u^\varepsilon),u_\tau^T-u_\tau^\varepsilon)d\tau\geqslant\frac{1}{2}a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^n(u_{x_ix_j}^T-u_{x_ix_j}^\varepsilon)^2dx. \tag{18}$$

Таким чином, одержали оцінку

$$\frac{1}{2}a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u^T-u^\varepsilon\|_V^2\geqslant\int_0^t(A(\tau)(u^T-u^\varepsilon),u_\tau^T-u_\tau^\varepsilon)d\tau\geqslant A_3$$

для довільного $t\in[0;T]$, де A_3 – це права частина нерівності (18). Очевидно, що $A_3\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Тоді $A(t)(u^T-u^\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ сильно. Отже, можна перейти до границі при $\varepsilon\to 0$ у нерівності (16). Матимемо

$$(u_{tt}^T+A(t)u^T-f,v-u_t^T)\geqslant 0 \text{ для } t\in[0;T].$$

Звідси $u^T(x,t)$ задовольняє нерівність (1), тобто $u^T(x,t)$ є шуканою функцією. Згідно з оцінками (13), (15) існує така підпослідовність $\{u^{i,\varepsilon_k}\}$, що

$$u^{i,\varepsilon_k} \to u^i,\ u_t^{i,\varepsilon_k} \to u_t^i * - \text{ слабо в } L^\infty(S_i;V),$$
$$u_{tt}^{i,\varepsilon_k} \to u_{tt}^i * - \text{ слабо в } L^\infty(S_i;H), \text{ при } \varepsilon_k \to 0.$$

Очевидно, що $u^i \equiv u^{i-1}$ в Q_{i-1}. Продовжимо кожну функцію $u^{i,\varepsilon_k}(x,t)$ нулем на область $Q \setminus Q_i$. Виберемо таку послідовність $u^{m,\varepsilon_k}(x,t)$, що для фіксованого i має місце

$$u^{m,\varepsilon_k} \to u^i,\ u_t^{m,\varepsilon_k} \to u_t^i * - \text{ слабо в } L^\infty(S_i;V),$$
$$u_{tt}^{m,\varepsilon_k} \to u_{tt}^i * - \text{ слабо в } L^\infty(S_i;H), \text{ при } \varepsilon_k \to 0.$$

Позначимо через $u(x,t)$ функцію, яка для кожного i в Q_i співпадає з $u^i(x,t)$. Очевидно, що $u(x,t)$ задовольняє нерівність (1) і включення (2), (3).

Нехай u_1 і u_2 є два можливі розв'язки нерівності (1). Тоді

$$\int_0^T (u_{1tt} + A(t)u_1 - f, v - u_{1t})dt \geqslant 0,\ \int_0^T (u_{2tt} + A(t)u_2 - f, v - u_{2t})dt \geqslant 0.$$

Підставимо у ці нерівності відповідно функції

$$v = \begin{cases} u_{2t} & , t \in [0;\tau]; \\ 0 & , t \in (\tau;+\infty), \end{cases} \qquad v = \begin{cases} u_{1t} & , t \in [0;\tau]; \\ 0 & , t \in (\tau;+\infty), \end{cases}$$

де τ – довільне додатне число, $\tau < T$. Отримаємо:

$$\int_0^T (u_{1tt} + A(t)u_1 - f, u_{2t} - u_{1t})dt \geqslant 0,\ \int_0^T (u_{2tt} + A(t)u_2 - f, u_{1t} - u_{2t})dt \geqslant 0.$$

Додамо дві останні нерівності:

$$-\int_0^T (u_{1tt} - u_{2tt} + A(t)(u_1 - u_2), u_{1t} - u_{2t})dt \geqslant 0.$$

Поклавши $w = u_1 - u_2$, одержимо оцінку

$$-\int_0^T (w_{tt} + A(t)w, w_t)dt \geqslant 0,\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0,\ x \in \Omega. \tag{19}$$

Використовуючи інтегрування частинами, з (19) отримаємо

$$|w_t(\tau)|^2 + \int\limits_{D_\tau}\bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl} w_{x_i x_j} w_{x_k x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} w_{x_i} w_{x_j} + hw^2\bigg)dx + 2c_0 \int\limits_{Q_\tau} w_t^2 dx\,dt \leqslant 0.$$

Звідси

$$|w_t(\tau)|^2 + a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2)\|w(\tau)\|_V^2 + 2c_0 \int_0^\tau |w_t(t)|^2 dt \leqslant 0.$$

Отже, $w \equiv 0$ в Q і теорему 1 доведено.

Зауваження. *Якщо в нерівності (1)* $f(x,t)\equiv 0$, $c_0>0$ *і*

$$\langle A(t)u,v\rangle=\int\limits_{\Omega}\bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}(x)u_{x_kx_l}v_{x_ix_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i}+c(x,t)u_tv+h(x)uv\bigg)dx,$$

то включення (2) для $u(x,t)$ *набудуть вигляду*

$$u,\ u_t\in L^2(S;V),\quad u_{tt}\in L^2(S;H).$$

Доведення. Враховуючи дані припущення, нерівність (11) перепишеться таким чином

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2+a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2+2c_0\int\limits_{Q_t}|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2d\tau\leqslant$$
$$\leqslant|u_1|^2+(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2.$$

Звідси

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2+a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2\leqslant C_4\int_0^t|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2d\tau\leqslant\frac{C_4}{2c_0},\quad t\in S \tag{20}$$

для довільного ε, де $C_4=|u_1|^2+(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2$. Тобто $u_{\varepsilon t}\in L^2(S;H)$ для довільного ε. Зробимо таку оцінку

$$\left|\int_0^T(u_{\varepsilon tt}+A(t)u_\varepsilon,u_{\varepsilon t})dt\right|=\bigg|\frac12|u_{\varepsilon t}(T)|^2-\frac12|u_1|^2+$$
$$+\frac12\int\limits_{D_T}\bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}u_{\varepsilon x_ix_j}u_{\varepsilon x_kx_l}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}u_{\varepsilon x_i}u_{\varepsilon x_j}+hu_\varepsilon^2\bigg)dx-$$
$$-\frac12\int\limits_{D_0}\bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}u_{0x_ix_j}u_{0x_kx_l}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}u_{0x_i}u_{0x_j}+hu_0^2\bigg)dx+$$
$$+\int\limits_{Q_T}c(x,t)u_{\varepsilon t}^2dx\,dt\bigg|\leqslant\frac12|u_{\varepsilon t}(T)|^2+\frac12|u_1|^2+\frac12(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2+$$
$$+\frac12(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_\varepsilon(T)\|_V^2+c_0\int_0^T|u_{\varepsilon t}(t)|^2dt.$$

Використовуючи оцінки (20), отримаємо нерівність

$$\left|\int_0^T(u_{\varepsilon tt}+A(t)u_\varepsilon,u_{\varepsilon t})dt\right|\leqslant C_5$$

для довільних T і ε, де стала C_5 не залежить від T, ε. Тоді

$$\left|\int_0^\infty(u_{\varepsilon tt}+A(t)u_\varepsilon,u_{\varepsilon t})dt\right|=\lim_{T\to\infty}\left|\int_0^T(u_{\varepsilon tt}+A(t)u_\varepsilon,u_{\varepsilon t})dt\right|\leqslant C_5$$

для довільного ε. Отже, отримали оцінку

$$\left| \int_0^\infty (u_{tt} + A(t)u, u_t) dt \right| \leqslant C_5,$$

звідки випливають включення: $u,\ u_t \in L^2(S;V)$, $u_{tt} \in L^2(S;H)$.

Нехай $f(x,t) \equiv 0$ в Q. Введемо позначення

$$\rho(u(x,t)) = \left(\int\limits_\Omega \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова (5) і, крім того,*

$$u_0 \in V,\ A(0)u_0 \in H,\ u_1 \in K;\ c_0 \geqslant 0;$$
$$\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ijt}^{kl}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl} \leqslant 0,\ \sum_{i,j=1}^n b_{ijt}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant 0,\ h_t \leqslant 0$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $(x,t) \in Q$. *Тоді нульовий розв'язок нерівності (1) буде стійким за Ляпуновим. Якщо ж* $c_0 > 0$, *то нульовий розв'язок буде асимптотично стійким і* $\|u\|_V \leqslant \sqrt{A_7} e^{-\lambda t}$ *для майже всіх* $t \in S$, *де* A_7 *і* λ *– додатні сталі.*

Доведення. Побудований розв'язок $u(x,t)$ є граничною точкою послідовності розв'язків задачі (7). Для довільного $\varepsilon > 0$ можна отримати нерівність

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + 2c_0 \int_0^t |u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 d\tau \leqslant$$
$$\leqslant |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2.$$

Нехай $A_4 = \max\{1;\ a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0\}$. Тоді одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leqslant \frac{A_4}{A_1}(|u_1|^2 + \|u_0\|_V^2).$$

Тобто

$$\rho^2(u_\varepsilon(x,t)) \leqslant \frac{A_4}{A_1}\rho^2(u_\varepsilon(x,0)) \leqslant \frac{A_4}{A_1}\rho^2(u(x,0))$$

для $t \in S$ і довільних ε. Отже, існує така додатна стала C_6, яка не залежить від ε і t, що

$$\rho(u_\varepsilon(x,t)) \leqslant C_6 \rho(u(x,0)). \tag{21}$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ в (21), одержимо $\rho(u(x,t)) \leqslant C_6\rho(u(x,0))$ для майже всіх $t \in S$. Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку доведено.

Розглянемо випадок, коли $c_0 > 0$. Асоційовану задачу зі штрафом для u_ε запишемо таким чином

$$u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta((u_{\varepsilon t} + \lambda u_\varepsilon)e^{-\lambda t})e^{\lambda t} = 0, \tag{22}$$

де $\lambda > 0$, а β – оператор штрафу , аналогічно як в задачі (7). Покладемо $u_\varepsilon = we^{-\lambda t}$. Тоді згідно з рівністю (20) одержимо, що

$$w_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \left(a_{ij}^{kl} w_{x_i x_j}\right)_{x_k x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} w_{x_i}\right)_{x_j} + (h + \lambda(\lambda - c))w + (c - 2\lambda)w_t + \frac{1}{\varepsilon}\beta(w_t) = 0. \tag{23}$$

Помножимо рівність (23) на w_t і зінтегруємо по області Q_t. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_t} \Biggl(w_{tt}w_t + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl} w_{x_i x_j} w_{t x_k x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} w_{x_i} w_{t x_j} +$$
$$+ (h + \lambda(\lambda - c))ww_t + (c - 2\lambda)w_t^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (\beta(w_t), w_t)\Biggr) = 0.$$

Після нескладних перетворень одержимо нерівність

$$\int\limits_{D_t} \Biggl(w_t^2 + (a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(\lambda - c^0)) \sum_{i,j=1}^{n} w_{x_i x_j}^2 \Biggr) dx + 2(c_0 - 2\lambda) \int\limits_{Q_t} w_t^2 dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{D_0} \Biggl((1 + \lambda)u_1^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + \varkappa_0(h_1 + \lambda(\lambda + 1))) \sum_{i,j=1}^{n} u_{0x_i x_j}^2 \Biggr) dx.$$

Повертаючись до u_ε, отримаємо оцінку

$$\int\limits_{D_t} \Biggl((1 - \lambda)u_{\varepsilon t}^2 + (a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(2\lambda - c^0 - 1)) \sum_{i,j=1}^{n} u_{\varepsilon x_i x_j}^2 \Biggr) dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{D_0} \Biggl((1 + \lambda)u_1^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + \varkappa_0(h_1 + \lambda(\lambda + 1))) \sum_{i,j=1}^{n} u_{0x_i x_j}^2 \Biggr) dx e^{-2\lambda t}.$$

Виберемо λ так, щоб справджувались умови:

$$c_0 \geqslant 2\lambda,\ a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(2\lambda - c^0 - 1) > 0. \tag{24}$$

Позначимо $A_5 = \min\{1 - \lambda;\ a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(2\lambda - c^0 - 1)\}$, $A_6 = \max\{1 + \lambda;\ a_1 + b_1\varkappa_1 + \varkappa_0(h_1 + \lambda(\lambda + 1))\}$, тоді одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_t} \left(u_{\varepsilon t}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} u_{\varepsilon x_i x_j}^2 \right) dx \leqslant \frac{A_6}{A_5} \int\limits_{D_0} \left(u_1^2 + \sum_{i,j=1}^{n} u_{0x_i x_j}^2 \right) dx\, e^{-2\lambda t}$$

для довільних ε, $t \in [0;T]$, де T – довільне додатне число. Отже, маємо нерівність

$$\|u_\varepsilon\|_V^2 \leqslant \frac{A_6}{A_5} \int\limits_{D_0} \left(u_1^2 + \sum_{i,j=1}^{n} u_{0x_i x_j}^2 \right) dx\, e^{-2\lambda t} = A_7 e^{-2\lambda t}$$

для довільних ε і $t \in S$, що й завершує доведення теоеми 2.

1. Лавренюк С.П., Онишкевич Г.М. *Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку одного нелінійного параболічного рівняння*// Доп. НАН України. – 1996. – N 6. – С. 10-12.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., Мир, 1972. – 588 с.

Стаття надійшла до редколегії ***20.09.96***