УДК 517.95

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ БЕЗТИПНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І. О Бобик , О. І. Бобик, Б. Й. Пташник

Bobyk I. O., Bobyk O. I., Ptashnyk B. Yo. Boundary value problem for a higher-order equation. Well-posed of a problem with the local two-point conditions on time and periodic conditions on space variables for general (type independent) equations with partial derivatives with constant complex coefficients is investigated. Solvability of a problem is connected with a question of the small denominations. Metric method is used to obtain the low estimations of denominations.

1. Задачі з даними на всій границі обмеженої області для загальних (у тому числі гіперболічних) диференціальних операторів з частинними похідними є, взагалі, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і є нестійкою відносно малих змін області та коефіцієнтів рівнянь і граничних умов (див. [1,2]). У даній роботі, яка є продовженням і розвитком праць [3,4], досліджено коректність задачі з локальними двоточковими крайовими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за $x_1, ..., x_p$ для загальних (незалежно від типу) рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Значне місце в роботі займає метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, які мають складну нелінійну конструкцію.

Нижче використовуватимемо позначення введені в праці [4], а також такі функціональні простори: $B_\delta(\Omega^p)$ $(\delta > 0)$ – простори 2π-періодичних за $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних функцій $v(x) = \sum\limits_{|k|\geqslant 0} v_k \exp(i(k,x))$, для яких є обмеженою норма

$$\|v(x)\|_{B_\delta(\Omega^p)} = \sum_{|k|\geqslant 0} |v_k| \exp(\delta\|k\|);$$

$C^n\Big([0,T], B_\delta(\Omega^p)\Big)$ – простір таких функцій $g(t,x)$, що $\dfrac{\partial^r g(t,x)}{\partial t^r} \in B_\delta(\Omega^p)$, $t \in [0;T]$, $r = 0, 1, ..., n$ і неперервні за t в нормі $B_\delta(\Omega^p)$,

$$\|g(t,x)\|_{C^n([0;T],B_\delta(\Omega^p))} = \sum_{j=1}^{n} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left\| \frac{\partial^j g(t,x)}{\partial t^j} \right\|_{B_\delta(\Omega^p)};$$

Γ – простір тригонометричних многочленів, а Γ' – простір лінійних неперервних функціоналів над Γ з відповідними топологіями (простір Γ' співпадає з простором формальних

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G15.

© І. О Бобик , О. І. Бобик, Б. Й. Пташник, 1997

тригонометричних рядів [5, гл. 2]); $C^n([0;T],\Gamma)$ $(C^n([0;T],\Gamma'))$ – простір функцій $u(t,x)$ таких, що $\dfrac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} \in \Gamma(\Gamma')$, $j = 0, 1, ..., n$ для довільного $t \in [0;T]$.

2. В області D^p, що є декартовим добутком відрізка $0 \leqslant t \leqslant T$ на p-вимірний тор Ω^p, розглянемо задачу

$$\sum_{|s|=n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1} ... \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{s_p} u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{j_1-1}u}{\partial t^{j_1-1}}\right|_{t=0} = \varphi_{j_1}(x), \quad \left.\frac{\partial^{j_2-1}u}{\partial t^{j_2-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{m+j_2}(x), \tag{2}$$

де $j_1 = 1, \dots, m$; $j_2 = 1, \dots, n-m$; $1 \leqslant m \leqslant n-1$; A_s – комплексні числа; $A_{n,0,\dots,0} \neq 0$ (не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $A_{n,0,\dots,0} = 1$). Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за $x_1, \dots, x_p$ на функції $u(t,x)$ та $\varphi_q(x)$, $q = 1, \dots, n$. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \geqslant 0} u_k(t) \exp(i(k,x)). \tag{3}$$

Підставляючи ряд (3) у рівняння (1) та умови (2), для визначення кожної з функцій $u_k(t)$ отримаємо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння

$$\sum_{|s|=n} A_s k_1^{s_1} ... k_p^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{4}$$

$$U_{j_1}[u_k(t)] \equiv \left.\frac{\partial^{j_1-1}u_k(t)}{\partial t^{j_1-1}}\right|_{t=0} = \varphi_{j_1,k}, \quad U_{m+j_2}[u_k(t)] \equiv \left.\frac{\partial^{j_2-1}u}{\partial t^{j_2-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{m+j_2,k}, \tag{5}$$

де $j_1 = 1, \dots, m$; $j_2 = 1, \dots, n-m$; $1 \leqslant m \leqslant n-1$; $\varphi_{j,k}$ – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$.

Зауважимо, що при $k = (0)$ завжди існує єдиний розв'язок $u_{(0)}(t)$ задачі (4), (5), який є многочленом степеня $n-1$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$ фундаментальна система розв'язків рівняння (4) має вигляд $u_{k,q,r_q}(t) = t^{r_q-1}\exp(\|k\|\lambda_q(k)t)$, $q = 1, ..., \ell$; $r_q = 1, ..., m_q$, де $\lambda_q(k)$ – корені рівняння

$$\sum_{|s|=n} A_s \left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p} \lambda^{s_0} = 0, \tag{6}$$

з кратностями m_q відповідно, $m_1 + \dots + m_\ell = n$ (для спрощення викладок будемо вважати, що кратності коренів не залежать від k). Зауважимо, що корені рівняння (6) є рівномірно обмежені відносно k; тому $|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)| \leqslant C$, $j = 1, ..., \ell$, де стала C не залежить від k. Характеристичний визначник задачі (4),(5) має вигляд

$$\triangle(k) = \det\Big\| U_j[u_{k,q,r_q}(t)] \Big\|_{j;q;r_q=1}^{n;\ell;m_q} = \|k\|^{\alpha} \triangle_1(k),$$

де $\alpha = \dfrac{2m^2 - 2mn + n^2 - n}{2} - \sum\limits_{j=1}^{\ell} \dfrac{m_j(m_j-1)}{2}$, а визначник $\triangle_1(k)$ обчислюється за формулою

$$\triangle_1(k) = \sum_{g \in G^{m,\ell}} P_g\big(\|k\|T\big)\exp\Big[\|k\|(\lambda(k), g)T\Big],$$

де $G^{m,\ell} = \{g = (g_1, \ldots, g_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell : g_r \leqslant m_r (r = 1, \ldots, \ell), |g| = n - m\}$; $P_g(\xi)$ – многочлен степеня $f(g) = \sum\limits_{r=1}^{\ell} g_r(m_r - g_r)$, коефіцієнти якого поліноміально залежать від координат вектора $\lambda(k) = (\lambda_1(k), \ldots, \lambda_\ell(k))$, $(\lambda(k), g) = \sum\limits_{\nu=1}^{\ell} \lambda_\nu(k) g_\nu$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^n([0;T], \Gamma')$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\triangle_1(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}. \tag{7}$$

Доведення випливає з єдиності розвинення в ряд Фур'є функції з класу Γ'.

При виконанні умов (7) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок задачі (4), (5), а розв'язок задачі (1), (2) формально зображається у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_{(0)}(t) + \sum_{|k|>0} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{\ell} \sum_{r_q=1}^{m_q} \frac{\triangle_{j,q,r_q}(k)}{\triangle(k)} u_{k,q,r_q}(t) \varphi_{j,k} \right\} \exp(i(k,x)), \tag{8}$$

де $\triangle_{j,q,r_q}(k)$ – алгебраїчне доповнення елемента j-го рядка і стовпця з номером $m_1 + \cdots + m_{q-1} + r_q$ у визначнику $\triangle(k)$.

На підставі формули (8) отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (7) і нехай $\varphi_j(x) \in \Gamma(\Gamma')$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді існує розв'язок задачі (1), (2), який належить простору $C^n\big([0;T], \Gamma\big)$ $\big(C^n([0;T], \Gamma')\big)$.*

Існування розв'язку розглядуваної задачі в інших функціональних просторах пов'язане з проблемою малих знаменників, бо величина $|\triangle(k)|$, що відмінна від нуля, може ставати як завгодно малою для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ $\mathrm{Re}\, \lambda_j(k) \leqslant \mathrm{Re}\, \lambda_{j+1}(k)$, $j = 1, \ldots, \ell - 1$. Позначимо через $\tilde{\lambda}_r(k)$, $r = 1, \ldots, n$ всі корені рівняння (6), враховуючи їх кратність; при цьому $\widetilde{\lambda}_{m_1 + \cdots + m_{q-1} + j}(k) = \lambda_q(k)$ $\quad q = 1, \ldots, \ell$, $r_q = 1, ..., m_q$; $\widetilde{m} = \min\{m; n - m\}$,

$$\beta_1 = \begin{cases} 2\widetilde{m} + 1, & \text{якщо} \quad n < 2m, \\ 2\widetilde{m}, & \text{якщо} \quad n \geqslant 2m, \end{cases} \qquad \beta_2 = \begin{cases} 2\widetilde{m} + 1, & \text{якщо} \quad n > 2m, \\ 2\widetilde{m}, & \text{якщо} \quad n \leqslant 2m. \end{cases}$$

Теорема 3. *Нехай існують* $M > 0$ *і* $\chi \in \mathbb{Z}$ *такі, що для довільного* $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K$ *виконуються нерівності*

$$|\triangle_1(k)| > M\|k\|^{-\chi} \exp\left(\|k\| \sum_{j=1}^{n-m} \widetilde{\lambda}_j(k)T\right) \tag{9}$$

і нехай $\varphi_{j_1}(x) \in B_{\delta_1}(\Omega^p)$, $j_1 = 1, \ldots, m$; $\varphi_{m+j_2}(x) \in B_{\delta_2}(\Omega^p)$, $j_2 = 1, ..., n-m$, *де* $\delta_i > \beta_i CT$, $i = 1, 2$.

Тоді існує розв'язок задачі (1), (2), який належить простору $C^n\big([0;T],\, B_\delta(\Omega^p)\big)$ $\big(\delta < \min\limits_{r=1,2}\{\delta_r - \beta_r T\}\big)$ *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Доведення. Для довільного $t \in [0;T]$ справедливі нерівності

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} \triangle_{j_1,q,r_q}(k) u_{k,q,r_q}(t)\right| \leqslant C_1 |k|^{h_r - j_1} \exp\Big[\|k\|\big(\mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_m(k)t + \sum_{j=m+1}^{n} \mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_j(k)T\big)\Big], \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} \triangle_{m+j_2,q,r_q}(k) u_{k,q,r_q}(t)\right| \leqslant C_2 |k|^{h_r - j_2} \exp\Big[\|k\|\big(\mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_{m+1}(k)t + \sum_{j=m+2}^{n} \mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_j(k)T\big)\Big].$$

де $r = 0, 1, ..., n$, $q = 1, \ldots, \ell$; $r_q = 1, \ldots, m_q$; $j_1 = 1, \ldots, m$; $j_2 = 1, \ldots n - m$; $h_r = r + \alpha + \max\limits_{g \in G^{m,\ell}} \big\{f(g) + \max\limits_{i=1,\ldots,\ell}(m_i - g_i)\big\}$. На підставі формули (8), оцінок (9), (10) та елементарної нерівності $q^\nu \leqslant D(\nu)\exp(\varepsilon q)$, яка справедлива для довільного $\varepsilon > 0$ і для всіх $q > 0$ і $\nu \geqslant 0$, отримуємо, що

$$\begin{aligned} &\big\|u(t,x)\big\|_{C^n([0;T],\, B_\delta(\Omega^p))} \leqslant C_3 \sum_{|k|>0} \Bigg\{ \sum_{j_1=1}^{m} \|k\|^{\chi + h_n - j_1} \big|\varphi_{j_1,k}\big| \exp\Big(\|k\|\beta_1 CT\Big) + \\ &+ \sum_{j_2=1}^{n-m} \|k\|^{\chi + h_n - j_2} \big|\varphi_{m+j_2,k}\big| \exp\Big(\|k\|\beta_2 CT\Big) \Bigg\} \exp\Big(\delta\|k\|\Big) \leqslant \\ &\leqslant C_4 \Bigg\{ \sum_{j_1=1}^{m} \|\varphi_{j_1}(x)\|_{B_{\delta_1}(\Omega^p)} + \sum_{j_2=1}^{n-m} \|\varphi_{m+j_2}(x)\|_{B_{\delta_2}(\Omega^p)} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{11}$$

де $C_4 = C_4(C_1, C_2, M, m, n, T, A_s)$. З нерівності (11) випливає доведення теореми.

3. Дослідимо можливість виконання оцінок (9). Позначимо $y = (y_1, \ldots, y_{pn})$, де $y_{jn+r} = \mathrm{Re}\ A_{n-r,\underbrace{0,\ldots,0}_{j},r,0,\ldots,0}$ $j = 0, \ldots, p-1$; $r = 1, \ldots, n$.

Лема 1. *Нехай* $B \equiv B\big(\tilde{\lambda}_1(k), \ldots, \tilde{\lambda}_n(k)\big)$ – *симетричний многочлен степеня* q *щодо кожної зі змінних* $\tilde{\lambda}_1(k), \ldots, \tilde{\lambda}_n(k)$. *Тоді для майже всіх (щодо міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^{pn}$*) векторів* y *виконуються нерівності*

$$|B| \geqslant \|k\|^{-pq-\varepsilon_1},\ k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| > K_1(y), \quad \varepsilon_1 > 0. \tag{12}$$

Доведення. При доведенні леми будемо вважати, що $y \in Y$, де Y – довільний паралелепіпед розмірності pn, оскільки простір $\mathbb{R}^{pn}$ можна представити у вигляді зліченного об'єднання pn-вимірних паралелепіпедів.

З основної теореми про симетричні многочлени [6] випливає, що

$$B = \sum_{\chi \in K} b_\chi \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{|\hat{s}|=j} A_{n-j,\hat{s}} \left(\frac{k_1}{\|k\|} \right)^{s_1} \cdots \left(\frac{k_p}{\|k\|} \right)^{s_p} \right)^{\chi_j},$$

де $\hat{s} = (s_1, ..., s_p)$, $K = \left\{ \chi = (\chi_1, ..., \chi_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum\limits_{j=1}^{n} j\chi_j = q \right\}$, $b_\chi \in \mathbb{C}$ не всі дорівнюють нулю. Нехай, наприклад, $\operatorname{Re} b_{\tilde{\chi}} \neq 0$. Зафіксуємо вектор $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.

Нехай $|k_\alpha| = \max\limits_{j=1,\dots,p} |k_j|$. Тоді

$$\left| \frac{\partial^{|\tilde{\chi}|} \operatorname{Re} B}{\partial y_{(\alpha-1)n+1}^{\tilde{\chi}_1} \cdots \partial y_{\alpha n}^{\tilde{\chi}_n}} \right| = \left| \operatorname{Re} b_{\tilde{\chi}} \right| \left(\frac{|k_\alpha|}{\|k\|} \right)^q \geqslant \frac{\left| \operatorname{Re} b_{\tilde{\chi}} \right|}{p^{q/2}},$$

де $|\tilde{\chi}| = \tilde{\chi}_1 + \cdots + \tilde{\chi}_n \leqslant q$. Нехай $Y = Y_n \times Y_{n(p-1)}$, де $Y_n \ni (y_{(\alpha-1)n+1}, ..., y_{\alpha n})$. Використовуючи лему 2.3 з [2, гл.1] і нерівність $|\operatorname{Re} B| \leqslant |B|$, знайдемо, що міра множини $M_1(k)$ тих векторів $(y_{(\alpha-1)n+1}, \dots, y_{\alpha n})$ з Y_n (при фіксованих решта компонентах вектора Y), для яких справджується нерівність

$$|B| < \|k\|^{-pq-\varepsilon_1}, \tag{13}$$

має оцінку

$$\operatorname{mes} M_1(k) \leqslant d_1 \|k\|^{-(pq+\varepsilon_1)/|\tilde{\chi}|}. \tag{14}$$

Інтегруючи оцінку (14) по паралелепіпеду $Y_{n(p-1)}$ отримуємо, що міра множини $M_2(k)$ векторів $y \in Y$, для яких виконується (13), має оцінку, аналогічну до (14), тільки з іншою сталою, тобто $\operatorname{mes} M_2(k) \leqslant d_2 \|k\|^{-(pq+\varepsilon_1)/|\tilde{\chi}|}$. Оскільки ряд $\sum\limits_{|k|>0} \|k\|^{-(pq+\varepsilon_1)/|\tilde{\chi}|}$ збігається, то, застосовуючи лему Бореля-Кантеллі (див. [7], розд. 1, § 1) маємо, що для майже всіх векторів $y \in Y$ виконуються нерівності (12). Лему 1 доведено.

У багатьох випадках оцінку (12) можна покращити, коли відомо явне зображення симетричного многочлена B через коефіцієнти рівняння (6). Підтвердженням сказаного є таке твердження.

Лема 2. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^p$*) векторів* y *виконуються нерівності*

$$\prod_{1 \leqslant j < r \leqslant n} \left| \tilde{\lambda}_j(k) - \tilde{\lambda}_r(k) \right| \geqslant \|k\|^{-\frac{p(n-1)}{2} - \varepsilon_2}, \ k \in \mathbb{Z}^p, \ |k| > K_2(y), \ \varepsilon_2 > 0.$$

Доведення базується на ідеї доведення теореми 6 в [8].

Теорема 4. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^{pn}$*) векторів* y *і для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівності (9) виконуються при* $\chi > p(\omega+\sigma-1)$*, де* $\sigma = C_n^m$, $\omega = \dfrac{n-1}{2} + v$, $v = \sum\limits_{\ell=2}^{\tilde{m}} C_{n-1}^{\ell-1} C_{n-\ell}^{\ell}$, $\tilde{m} = \min\{m,\, n-m\}$.

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що $0 \leqslant t_1 \leqslant T \leqslant t_2 < \infty$, а y належить деякому паралелепіпеду Y розмірності pn. З леми 2 випливає, що для майже всіх векторів $y \in Y$ і для довільного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ всі корені рівняння (6) є різні, тобто $\ell = n$. У такому випадку визначник $\triangle_1(k)$ зображається у вигляді

$$\triangle_1(k) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} (-1)^{\theta_{r_\nu}} V_{r_{\nu,1},\dots,r_{\nu,n-m}}(k) V_{r_{\nu,n-m+1},\dots,r_{\nu,n}}(k) \exp\Big[\|k\|\big(\lambda(k), g^{(\nu)}\big)T\Big],$$

де

$$\theta_{r_\nu} = n(n-m) + \frac{m(m-1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-m} r_{\nu,j},$$

$g^{(\nu)} \in G^{m,n}$, $r_\nu = (r_{\nu,1}, \dots, r_{\nu,n})$ – така перестановка чисел $(1, \dots, n)$, що $g^{(\nu)}_{r_{\nu,1}} = \dots = g^{(\nu)}_{r_{\nu,n-m}} = 1$, $g^{(\nu)}_{r_{\nu,n-m+1}} = \dots = g^{(\nu)}_{r_{\nu,n}} = 0$, $\nu = 1, \dots, \sigma$, $V_{j_1,\dots,j_s}(k) = \prod\limits_{1 \leqslant \xi < \eta \leqslant s} \big(\lambda_{j_\xi}(k) - \lambda_{j_\eta}(k)\big)$.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що

$$\Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k), g^{(\nu)}\Big) \leqslant \Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k), g^{(\nu+1)}\Big),\ \nu = 1, 2, ..., \sigma - 1, \tag{15}$$

звідки, зокрема, $g^{(1)} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}, 0, \dots, 0)$.

Розглянемо функції

$$\begin{gathered} F_1\big(\lambda(k), T\big) = \exp\Big[-\|k\|\big(\lambda(k), g^{(1)}\big)T\Big] \triangle_1(k), \\ F_\nu\big(\lambda(k), T\big) = \frac{1}{\|k\|} \exp\Big[\|k\|\big(\lambda(k), g^{(\nu-1)} - g^{(\nu)}\big)T\Big] \frac{dF_{\nu-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \end{gathered} \tag{16}$$

$(\nu = 2, \dots, \sigma)$. Зауважимо, що для $F_\sigma(\lambda(k), T)$ справедлива оцінка

$$\Big|F_\sigma\big(\lambda(k), T\big)\Big| \geqslant \alpha_1 |V_{1,\dots,n}(k)| \Phi\big(\lambda(k)\big)|, \tag{17}$$

де $\Phi^2\big(\lambda(k)\big)$ – симетричний многочлен степеня $2\sum\limits_{\ell=2}^{\tilde{m}} C_{n-1}^{\ell-1} C_{n-\ell}^{\ell}$. З нерівності (17) та лем 1, 2 випливає, що для майже всіх векторів $y \in Y$

$$\Big|F_\sigma\big(\lambda(k), T\big)\Big| \geqslant a_1 \|k\|^{-p\omega-\delta_1},\ a_1 > 0,\ \ \delta_1 > 0 \tag{18}$$

для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. З формул (16) та нерівностей (15), (17) отримуємо, що для майже всіх векторів $y \in Y$ і для довільного $T \in [t_1; t_2]$ при досить великих $|k|$ виконується нерівність

$$\left| \frac{dF_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \right| \geqslant a_1 \|k\|^{-p\omega+1-\delta_1}. \tag{19}$$

Для довільних фіксованих $y \in Y$ і $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що справедлива оцінка (19), відрізок $[t_1; t_2]$ розбивається на підмножини (які, можливо, перетинаються) $G_1(k)$ та $H_1(k)$ такі, що

$$\forall T \in G_1(k) \; \left| \mathrm{Re}\, \frac{dF_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \right| \geqslant \frac{a_1}{\sqrt{2}} \|k\|^{-p\omega+1-\delta_1}, \tag{20}$$

$$\forall T \in H_1(k) \; \left| \mathrm{Im} \frac{dF_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \right| \geqslant \frac{a_1}{\sqrt{2}} \|k\|^{-p\omega+1-\delta_1}. \tag{21}$$

Покажемо, що для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \big\{(0)\big\}$ множина $G_1(k)$ (як і $H_1(k)$) складається з інтервалів, число яких не перевищує $d_{1,\sigma-1}\|k\|$, де стала $d_{1,\sigma-1}$ не залежить від k. На підставі теореми Ролля на кожному з інтервалів (крім, можливо, двох крайніх), де виконується (20), функція $\mathrm{Re}\frac{d^2F_{\sigma-1}(\lambda(k),T)}{dT^2} = y_{\sigma-1}(\|k\|T) \equiv y_{\sigma-1}(z)$ має хоча б один нуль. Зауважимо, що $y_{\sigma-1}(z)$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + 2\Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k), g^{(\sigma)} - g^{(\sigma-1)}\Big) \frac{d}{dz} + \Big| \Big(\lambda(k), g^{(\sigma)} - g^{(\sigma-1)}\Big) \Big|^2 \right) y = 0. \tag{22}$$

Згідно з теоремою Валле-Пуссена (див. [9], розд. 4) існує стала $h_{\sigma-1} > 0$ така, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння (22) має на інтервалі довжиною $h_{\sigma-1}$ не більше одного нуля. Отже, на відрізку $\Big[\|k\|t_1; \|k\|t_2\Big]$ функція $y_{\sigma-1}(z)$ може мати не більше, ніж $\Big[(t_2 - t_1)\|k\|/h_{\sigma-1}\Big] + 1$ нулів, де $[a]$ – ціла частина a.

Застосовуючи на кожному з інтервалів множини $G_1(k)$ лему 2 з [8] маємо, що міра множини значень T, для яких

$$|\mathrm{Re} F_{\sigma-1}(\lambda(k), T)| < \|k\|^{-p(\omega+1)-\delta_2}, \tag{23}$$

не перевищує $d_{2,\sigma-1}\|k\|^{-p-1-\delta_2+\delta_1}$. Отже, нерівність (23) виконується для множини значень $T \in G_1(k)$, міра якої не перевищує $d_{3,\sigma-1}\|k\|^{-p-\delta_2+\delta_1}$, де $d_{3,\sigma-1} = d_{1,\sigma-1} \cdot d_{2,\sigma-1}$.

На підставі оцінки (21) аналогічно доводиться, що міра множини тих значень $T \in H_1(k)$, для яких

$$\Big|\mathrm{Im}\ F_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)\Big| < \|k\|^{-p(\omega+1)-\delta_2}, \tag{24}$$

також не перевищує величини $d_{3,\sigma-1}\|k\|^{-p-\delta_2+\delta_1}$. З нерівностей (23), (24) випливає, що міра множини $D_1(k)$ тих значень $T \in [t_1; t_2]$, для яких виконується нерівність $\Big|F_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)\Big| \geqslant \|k\|^{-p(\omega+1)-\delta_2}$, має оцінку mes $D_1(k) \geqslant t_2 - t_1 - 2d_{3,\sigma-1}\|k\|^{-p-\delta_2+\delta_1}$.

Аналогічними міркуваннями, переходячи послідовно від оцінки функції $F_j\big(\lambda(k),T\big)$ до оцінки $F_{j-1}\big(\lambda(k),T\big)$ $(j=\sigma-1,\dots,2)$, отримаєм, що нерівність

$$\big|\triangle_1(k)\big| \geqslant \|k\|^{-p(\omega+\sigma-1)-\delta_\sigma} \exp\Big(\|k\|(\mathrm{Re}\ \lambda(k),g^{(1)})T\Big) \tag{25}$$

може не виконуватись лише для множини $D_\sigma(k)=[t_1;t_2]\setminus D_{\sigma-1}(k)$ значень T такої, що

$$\mathrm{mes}\ D_\sigma(k) \leqslant 2\sum_{j=1}^{\sigma-1} d_{3,\sigma-j}\|k\|^{-p-\delta_{j+1}+\delta_j}.$$

Покладемо $\delta_j=\varepsilon/(\sigma+1-j)$, $j=1,\dots,\sigma$; $\varepsilon>0$. Тоді ряд $\sum\limits_{|k|>0} d_{3,\sigma-j}\|k\|^{-p-\delta_{j+1}+\delta_j}$ збігається. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі міра Лебега множини значень $T\in[t_1;t_2]$, для яких нерівність (25) не виконується для нескінченної множини значень $k\in\mathbb{Z}^p$, дорівнює нулю. Оскільки $\Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k),g^{(1)}\Big)=\mathrm{Re}\ \lambda_1(k)+\ldots+\mathrm{Re}\ \lambda_{n-m}(k)$, то з нерівності (25) випливає твердження теореми.

З теорем 3, 4 випливає, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{pn}$) векторів y і для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з класу $C^n(D^p)$.

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев, Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференцииальных уравнений с частными производными. – Киев, Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. Пташник Б.И., Штабалюк П.И. *Краевая задача для гиперболичеиских уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным*// Диференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, N 4. – С. 669–678.
4. Бобик І.О., Пташник Б.Й. *Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами* // Укр. матем. журн. – 1994. – Т. 46, N 7. – С. 795–802.
5. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев, Наук. думка, 1984. – 283 с.
6. Завало С.Т. Курс алгебри. – Київ, Вища школа. Головне вид-во, 1985. – 503 с.
7. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. – М., Наука, 1977. – 143 с.
8. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. *Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами*// Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, N 4. – С. 637–645.
9. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М., Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.

Стаття надійшла до редколегії 21.10.95