УДК 517.95

КОРЕКТНІСТЬ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

М. М. Бокало

Bokalo M. M. Well-posedness of first boundary value problems for some quasi-linear elliptic equations in unbounded domains without conditions at infinity. The conditions are obtained when the first boundary problem for a second order quasi-linear elliptic equations at unbounded domains has a unique weak solution without assumptions about its behaviour and increasing of initial data at infinity. The estimation of the weak solution is obtained and its continuous dependence is discovered in this case.

Вступ. Для лінійних і багатьох нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь єдиність розв'язків крайових задач в необмежених областях має місце в класах функцій з кваліфікованою поведінкою на нескінченності, а існування доводиться при певних припущеннях про зростання на нескінченності вихідних даних або зв'язку зростання вихідних даних з геометрією області ([1-3]). Але серед нелінійних рівнянь існують такі, для яких розв'язки відповідних крайових задач єдині без будь-яких обмежень на їх поведінку на нескінченності і існують при вихідних даних з довільним зростанням на нескінченності([4-9]). У даній праці описані нові еліптичні рівняння, для яких справедливі результати такого роду стосовно першої крайової задачі. Крім того, доведена неперервна залежність узагальненого розв'язку розглянутої задачі від правої частини рівняння. При цьому використано методику праць [5,9].

1.Формулювання задачі і основний результат. Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$. Позначимо $S = \partial\Omega$.

Розглядається задача

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, \delta u) + a_0(x, \delta u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) \quad \text{в} \quad \Omega\ , \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad S\ . \tag{2}$$

Тут і далі використано позначення $\delta u = (u, \nabla u)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35J65.

Ця робота частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження". Грант N APU 061007

Припустимо, що:

(A) функції $a_i(x,\xi), i=\overline{1,n}$, визначені для $x\in\Omega$, $\xi=(\xi_0,\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ і каратеодорівські, тобто вимірні за x для всіх ξ і неперервні по ξ для майже всіх x;

(B) для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{n+1}$

$|a_i(x,\xi)-a_i(x,\eta)|\leqslant A_i\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j-\eta_j|,\quad A_i=\mathrm{const}>0,\ a_i(x,0)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ i=\overline{1,n};$

(C) для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}$

$|a_0(x,\xi)|\leqslant b_1(x)\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^{2(p-1)/p}+b_2(x)|\xi_0|^{p-1}+b_3(x),$

де $b_1,b_2\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $b_3\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\quad p>2,\ 1/p+1/p'=1$;

(D) для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{n+1}$

$\sum\limits_{i=0}^{n}(a_i(x,\xi)-a_i(x,\eta))(\xi_i-\eta_i)\geqslant K_1\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2+K_2|\xi_0-\eta_0|^2+K_3|\xi_0-\eta_0|^p,$

де $K_1,K_3=\mathrm{const}>0$, а $K_2=\mathrm{const}\geqslant 0$, якщо $p\in(2;2n/(n-1))$,
і $K_2=\mathrm{const}>0$, якщо $p\in[2n/(n-1);+\infty)$.

(E) $f_0(x)\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\quad f_i(x)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\quad i=\overline{1,n}$.

Під $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $q\geqslant 1$ розуміємо простір визначених і вимірних на Ω функцій, звуження яких на довільну обмежену вимірну множину $\Omega'\subset\Omega$ належать простору $L^q(\Omega')$. Через $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначимо простір функцій $v(x)$ з $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, що мають узагальнені похідні $v_{x_1},...,v_{x_n}$ з $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, а через $\overset{o}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначимо підпростір функцій з простору $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, які мають рівний нулеві слід на S.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) назвемо функцію $u(x)\in\overset{o}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i(x,\delta u)\psi_{x_i}+a_0(x,\delta u)\psi\right\}dx=\iint\limits_{\Omega}\left\{f_0\psi-\sum_{i=1}^{n}f_i\,\psi_{x_i}\right\}dx \tag{3}$$

для довільних $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Зауваження 1. *У тотожності (3) можна взяти за пробну функцію ψ будь-яку функцію $\tilde{\psi}(x)\in H^1(\Omega)\bigcap L^p(\Omega)$ таку, що $\tilde{\psi}=0$ на $\partial\Omega$ і поза деякою (залежною від ψ) обмеженою областю.*

Щоб переконатися в цьому, досить вибрати послідовність $\{\psi_m(x)\}\subset C_0^\infty(\Omega)$, яка збігається до $\tilde{\psi}(x)$ в $H^1(\Omega)\bigcap L^p(\Omega)$, підставити ψ_m замість ψ в (3) і перейти до границі, коли $m\to\infty$. Граничний перехід гарантується умовами (A)–(E).

Означення 2. *Говоритимемо, що задача (1),(2) коректна, якщо її узагальнений розв'язок 1) існує для будь-яких $f_0(x)\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), f_i(x)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\quad i=\overline{1,n}$; 2) єдиний ; 3) неперервно залежить від правої частини рівняння (1), тобто, якщо для будь-яких послідовностей $\{f_{0,k}(x)\}\subset L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\{f_{i,k}(x)\}\subset L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ таких, що $f_{0,k}(x)\to f_0(x)$ в $L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$,*

$f_{i,k}(x) \to f_i(x)$ в $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, відповідна послідовність $\{u_k(x)\}$ узагальнених розв'язків задач, які відрізняються від задачі (1),(2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) записано $f_{0,k}$, $f_{i,k}$ замість f_0, f_i ,збігається в $\overset{o}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ до узагальненого розв'язку u задачі (1),(2).

Нагадаємо,що $f_k(x) \to f(x)$ в $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ ($\overset{o}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$) при $k \to +\infty$, якщо для довільної обмеженої області $\Omega' \subset \Omega$ $f_k(x) \to f(x)$ в нормі $L^q(\Omega')$ $(\overset{o}{H}{}^1(\Omega'))$.

Перейдемо до формулювання основного результату. Спочатку введемо деякі позначення. Будемо вважати, що точка $x = 0$ належить Ω. Нехай для довільного числа $R > 0$ Ω_R – зв'язна компонента множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, яка містить точку $x = 0$. Тоді, очевидно, $\Omega_R \subset \Omega_{R_1}$ для будь-яких $R < R_1$.

Теорема. *Нехай виконуються умови $(A)-(E)$. Тоді задача (1),(2) коректна. Крім того, для довільних чисел R_1, R_2 таких, що $1 \leqslant R_1 < R_2$, справедлива оцінка*

$$\int\limits_{\Omega_{R_1}} \{|\nabla u|^2 + |u|^p\}\, dx \leqslant \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)^{\kappa} \left(C_1 R_2^{-\gamma} + C_2 \iint\limits_{\Omega_{R_2}} \{|f_0|^{p'} + \sum_{i=1}^n |f_i|^2\}\, dx \right), \tag{4}$$

де κ, γ – додатні сталі, які залежать тільки від n, p, K_2; C_1, C_2 – додатні сталі, які залежать тільки від $n, p, K_i (i = 1, 2, 3), A_i (i = \overline{1, n})$.

2. Допоміжна лема. Перш ніж доводити теорему, покажемо справедливість такого твердження .

Лема. *Нехай $u(x)$ – узагальнений розв'язок задачі (1),(2), $\tilde{u}(x)$ – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (1),(2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) замість f_0, f_i стоять $\tilde{f}_0, \tilde{f}_i$. Тоді для довільних чисел R_0, R таких, що $1 \leqslant R_0 < R$, справедлива оцінка*

$$\int\limits_{\Omega_R} \{|\nabla(u - \tilde{u})|^2 + |u - \tilde{u}|^p\}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^s \left(B_1 R^{n - \frac{q}{q-2}} + B_2 \int\limits_{\Omega_R} \left\{ |f_0 - \tilde{f}_0|^{p'} + \sum_{i=1}^n |f_i - \tilde{f}_i|^2 \right\} dx \right), \tag{5}$$

де $q = p$, якщо $K_2 = 0$, і $q \in (2; p]$, якщо $K_2 > 0$; s – довільне число таке, що $s > 2q/(q-2)$; B_1, B_2 – додатні сталі, які залежать тільки від $n, p, s, K_i (i = 1, 2, 3), A_i (i = \overline{1, n})$.

Доведення. Нехай $R > 1$ – довільне число. Визначимо функцію $\zeta(x)$ за правилом: $\zeta(x) = \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2)$, коли $|x| \leqslant R$, і $\zeta(x) = 0$, коли $|x| > R$.

Віднімемо від інтегральної тотожності (3) для u аналогічну інтегральну тотожність для $\tilde{u}$ і візьмемо (див. зауваження 1) в отриманій тотожності $\psi = w\zeta^s$, де $w = u - \tilde{u}$, $s > 0$ – поки що довільне достатньо велике додатне число. Тоді отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))w_{x_i}\zeta^s+s\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))w\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}+$$

$$+(a_0(x,\delta u)-a_0(x,\delta\tilde{u}))w\zeta^s\Big\}\,dx=\int\limits_{\Omega_R}\Big\{(f_0-\tilde{f}_0)w\zeta^s-\sum_{i=1}^{n}(f_i-\tilde{f}_i)(w\zeta^s)_{x_i}\Big\}\,dx. \qquad (6)$$

Перепишемо (6) у вигляді

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))(u_{x_i}-\tilde{u}_{x_i})+(a_0(x,\delta u)-a_0(x,\delta\tilde{u}))(u-\tilde{u})\Big\}\zeta^s\,dx= \qquad (7)$$

$$-s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))w\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\,dx+\int\limits_{\Omega_R}\Big\{(f_0-\tilde{f}_0)w\zeta^s-\sum_{i=1}^{n}(f_i-\tilde{f}_i)(w\zeta^s)_{x_i}\Big\}\,dx.$$

Використовуючи умови (A)–(D) та оцінку $|\zeta'|\leqslant 2$, з (7) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\{K_1|\nabla w|^2+K_2|w|^2+K_3|w|^p\}\zeta^s\,dx\leqslant 2s\int\limits_{\Omega_R}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)(|\nabla w|+|w|)|w|\zeta^{s-1}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_R}\{|f_0-\tilde{f}_0|\,|w|\zeta^s+2s\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||w|\zeta^{s-1}+\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||\nabla w|\zeta^s\}\,dx. \qquad (8)$$

Тепер зауважимо, що

$$K_2|w|^2+2^{-1}K_3|w|^p\geqslant K_4|w|^q, \qquad (9)$$

де $q=p$ і $K_4=K_3/2>0$, якщо $K_2=0$, та q – довільне число з відрізка $[2;p]$ і $K_4=\min\{K_2,K_3/2\}>0$, якщо $K_2>0$. З (8) і (9) маємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\{K_1|\nabla w|^2++\frac{1}{2}K_3|w|^p+K_4|w|^q\}\zeta^s\,dx\leqslant 2sA\int\limits_{\Omega_R}w^2\zeta^{s-1}\,dx+2sA\int\limits_{\Omega_R}|\nabla w||w|\zeta^{s-1}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_R}\{|f_0-\tilde{f}_0|\,|w|\zeta^s+2s\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||w|\zeta^{s-1}+\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||\nabla w|\zeta^s\}\,dx, \qquad (10)$$

де $A=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

Оцінимо члени правої частини (10). Для цього використаємо нерівність Юнга $ab\leqslant\varepsilon a^p+M(\varepsilon,p)b^{p'}$, де $\varepsilon>0$ – довільне число, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$, $M(\varepsilon,p)$ – стала, яка залежить від ε і p.

Взявши в нерівності Юнга $a = w^2\zeta^{2s/q}$, $b = \zeta^{s(q-2)/q-1}$, матимемо оцінку першого члена нерівності (10)

$$\int\limits_{\Omega_R} w^2\zeta^{s-1}\,dx \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{\Omega_R} |w|^q\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_1, q)\int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{q}{q-2}}\,dx, \tag{12}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ – довільне число.

Аналогічно оцінимо решту членів правої частини (10)

$$\int\limits_{\Omega_R} |\nabla w||w|\zeta^{s-1}\,dx \leqslant \varepsilon_2 \int\limits_{\Omega_R} |\nabla w|^2\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_2, 2)\int\limits_{\Omega_R} |w|^2\zeta^{s-2}\,dx, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} (f_0 - \tilde{f}_0)w\zeta^s\,dx \leqslant \varepsilon_3 \int\limits_{\Omega_R} |w|^p\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_3, p)\int\limits_{\Omega_R} |f_0 - \tilde{f}_0|^{p'}\zeta^s\,dx, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i||w|\zeta^{s-1}\,dx \leqslant \varepsilon_4 \int\limits_{\Omega_R} |w|^2\zeta^{s-2}\,dx + M(\varepsilon_4, 2)\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i|^2\zeta^s\,dx, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i||\nabla w|\zeta^s\,dx \leqslant \varepsilon_5 \int\limits_{\Omega_R} |\nabla w|^2\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_5, 2)\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i|^2\zeta^s\,dx, \tag{16}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} |w|^2\zeta^{s-2}\,dx \leqslant \varepsilon_6 \int\limits_{\Omega_R} |w|^q\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_6, q)\int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{2q}{q-2}}\,dx, \tag{17}$$

де $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0$ – довільні числа.

Вибираючи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ досить малими, з (10), (12)-(17) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \{|\nabla w|^2 + |w|^p\}\zeta^s\,dx \leqslant C_3 \int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{2q}{q-2}}\,dx + C_4\int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{q}{q-2}}\,dx +$$

$$+ C_5 \int\limits_{\Omega_R} \{|f_0 - \tilde{f}_0|^{p'} + \sum_{i=1}^{n} |f_i - \tilde{f}_i|^2\}\zeta^s\,dx. \tag{18}$$

Нехай R_0 – довільне число з проміжку $[1, R)$. Враховуючи те, що $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, $R - R_0 \leqslant \zeta(x)$, коли $|x| \leqslant R_0$, і вибираючи $s > \frac{2q}{q-2}$, з (18) легко отримуємо (5).

3.Доведення основного результату.

Існування. Виберемо послідовність областей $\{\Omega^m\}$ таку, що $\Omega_m \subset \Omega^m$, $\mathrm{dist}(\partial\Omega^m \setminus \partial\Omega, \partial\Omega^{m+1} \setminus \partial\Omega) > 0$, $\partial\Omega^m$ – кусково-гладка поверхня. Очевидно, що $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \Omega^m = \Omega$, $\mathrm{dist}(O, \partial\Omega^m \setminus \partial\Omega) > m$, де O – початок координат. Позначимо $S^m = \partial\Omega^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо сім'ю крайових задач

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, \delta u_m) + a_0(x, \delta u_m) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) \quad \text{в} \quad \Omega^m, \tag{1_m}$$

$$u_m = 0 \quad \text{на} \quad S^m. \tag{2_m}$$

Означення 3. *Узагальненим розв'язком задачі* $(1_m), (2_m)$ *назвемо функцію* $u_m(x) \in \overset{o}{H}{}^1(\Omega^m) \cap L^p(\Omega^m)$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{\Omega^m} \{a_i(x, \delta u_m)\psi_{x_i} + a_0(x, \delta u_m)\psi\}\, dx = \iint\limits_{\Omega^m} \{f_0\psi - \sum_{i=1}^{n} f_i\psi_{x_i}\}\, dx \qquad (3_m)$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(\Omega^m)$ *таких, що* $\psi = 0$ *на* $\partial\Omega^m$.

З [11] випливає, що існує єдиний узагальнений розв'язок u_m задачі $(1_m), (2_m)$. Довизначимо u_m нулем на $\Omega \setminus \Omega_m$ і отриману функцію позначимо знову через u_m. Послідовність $\{u_m\}$ є фундаментальною в нормі $H^1(\Omega_k) \bigcap L^p(\Omega_k)$, де k – будь-яке фіксоване натуральне число. Покажемо це.

Нехай m, l, ν, k – довільні натуральні числа такі, що $m, l > \nu > 2k$. Оскільки $\Omega^m \supset \Omega_\nu, \Omega^l \supset \Omega_\nu$, $\partial\Omega^m \bigcap \partial\Omega \supset \partial\Omega_\nu \bigcap \partial\Omega, \partial\Omega^l \bigcap \partial\Omega \supset \partial\Omega_\nu \bigcap \partial\Omega$, то справедлива нерівність (5) з $u = u_m, \tilde{u} = u_l, R_0 = k, R = \nu, \tilde{f}_i = f_i, i = \overline{0,n}$ (щоб показати це, досить повторити доведення леми). Звідси

$$\iint\limits_{\Omega_k} (|\nabla(u_m - u_l)|^2 + |u_m - u_l|^p)\, dx \leqslant B_1^*\ \nu^{n-q/(q-2)}, \qquad (19)$$

де $B_1^* = \mathrm{const} > 0$, яка не залежить від ν.

Виберемо $q \in (2; 2n/(n-1))$. Тоді $n - q/(q-2) < 0$ і праву частину (19) можна зробити як завгодно малою за рахунок вибору досить великого значення ν. Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\nu \in \mathbb{N}$ ($\nu > 2k$) таке, що коли $m, l > \nu$, то ліва частина (19) менша за ε, тобто послідовність $\{u_m\}$ – фундаментальна в нормі $H^1(\Omega_k) \cap L^p(\Omega_k)$, де k – довільне натуральне число. Отже, існує функція $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ така, що

$$u_m \to u \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{в} \quad H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (20)$$

Звідси і з умови (B) маємо, що

$$a_i(x, \delta u_m) \to a_i(x, \delta u) \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i = \overline{1, N}. \qquad (21)$$

З (20) та умов (A) і (C) випливає існування підпослідовності $\{u_{m_\mu}\}$ послідовності $\{u_m\}$ такої, що

$$u_{m_\mu}(x) \to u(x), \quad \nabla u_{m_\mu}(x) \to \nabla u(x), \qquad (22)$$

$$a_0(x, \delta u_{m_\mu}(x)) \to a_0(x, \delta u(x)) \qquad (23)$$

при $\mu \to \infty$ майже всюди в Ω,

$$a_0(x, \delta u_{m_\mu}(x)) \to \chi^*(x) \quad \text{при } \mu \to \infty \text{ слабо в } L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (24)$$

З (23),(24) та леми [10,ст.25] отримаємо

$$a_0(x, \delta u_{m_\mu}) \to a_0(x, \delta u) \quad \text{при } \mu \to \infty \text{ слабо в } L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (25)$$

Тепер покажемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (1),(2).Нехай $\psi(x)$ – довільна функція з $C_0^\infty(\Omega)$. Тоді для будь-яких $\mu \in \mathbb{N}$ таких, що $\mathrm{supp}\psi \subset \Omega^{m_\mu}$, маємо (див.($3_m$))

$$\int\limits_{\Omega} \{a_i(x, \delta u_{m_\mu})\psi_{x_i} + a_0(x, \delta u_{m_\mu})\psi\}\, dx = \iint\limits_{\Omega} f\psi\, dx.$$

Перейдемо в цій рівності до границі, спрямувавши μ до ∞. Врахувавши (20),(21), (25), отримаємо (3). Існування узагальненого розв'язку задачі (1),(2) встановлено.

Оцінка розв'язку випливає з (5), врахувавши, що, коли $\tilde{f}_i = a_i(x, 0), i = \overline{0, n}$, то $\tilde{u} = 0$ є розв'язком відповідної задачі.

Єдиність. Нехай $u_1(x), u_2(x)$ – два розв'язки задачі (1),(2). З леми, поклавши $R = 2R_0$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} (|\nabla w|^2 + |w|^p)\, dx \leqslant B_3 R_0^{n-q/(q-2)}, \tag{26}$$

де $w = u_1 - u_2$, а B_3 – додатна стала, яка не залежить від R_0. Виберемо $q \in (2; \frac{2n}{n-1})$, що можна зробити згідно з умовою (D) і твердженням леми. Тоді $n - q/(q-2) < 0$. Враховуючи це, перейдемо в (26) до границі, спрямувавши R_0 до $+\infty$. Тоді отримаємо $w = 0$ майже всюди на Ω, що й треба було показати.

Неперервна залежність. Нехай $\{f_{0,k}\} \subset L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\{f_{i,k}\}, \subset L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), i = \overline{1, n}$, – такі послідовності, що $f_{0,k} \to f_0$ в $L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $f_{i,k} \to f_i$ в $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, а $\{u_k\}$ – послідовність узагальнених розв'язків відповідних задач. Покажемо, що тоді $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – будь-яке число, а Ω' – довільна обмежена підобласть області Ω. Тоді існують таке число $R_0 \geqslant 1$, що $\Omega' \subset \Omega_{R_0}$. Візьмемо $R > 2R_0$. З леми маємо

$$\int\limits_{\Omega'} (|\nabla(u - u_k)|^2 + |u - u_k|^p)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega_{R_0}} (|\nabla(u - u_k)|^2 + |u - u_k|^p)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^s \left(B_1\ R^{n-q/(q-2)} + B_2 \iint\limits_{\Omega_R} \{|f_0 - f_{0,k}|^{p'} + \sum_{i=1}^n |f_i - f_{i,k}|^2\}\, dx\right). \tag{27}$$

Виберемо $q \in (2; 2n/(n-1))$. Тоді $n - q/(q-2) < 0$. Звідси випливає, що існує таке R, для якого

$$2^s\ B_1 \cdot R^{n-q/(q-2)} < \varepsilon/2. \tag{28}$$

Зафіксуємо це значення R. З того, що $f_{0,k} \to f_0$ в $L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $f_{i,k} \to f_i$ в $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), i = \overline{1, n}$, маємо існування такого $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$2^s\ B_2 \iint\limits_{\Omega_R} \{|f_0 - f_{0,k}|^{p'} + \sum_{i=1}^n |f_i - f_{i,k}|^2\}\, dx < \varepsilon/2 \quad \forall k \geqslant k_0. \tag{29}$$

Очевидно,

$$\frac{R}{R-R_0} = \frac{R-R_0+R_0}{R-R_0} = 1 + \frac{R_0}{R-R_0} \leqslant 2. \tag{30}$$

На підставі (28)-(30) отримаємо, що права частина (27) менша за ε для всіх $k \geqslant k_0$, тобто те, що потрібно було показати. Теорему доведено.

1. Тихонов А.Н. *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Матем. сб. – 1935. – N 2. – С. 199-216.
2. Oleinik O.A. Some asymptotic problems of the theory of partial differential equations. Lezioni Lincei.Accad.naz.Lincei. Cambridge University Press, 1995.
3. Калашников А.С. *О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9, N 4. – С. 682-691.
4. Brezis H. *Semilinear equations in R^N without condition at infinity* // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12. – P. 271-282.
5. Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity* // Arch. Ration Mech. and Anal. – 1989. – Vol. 106, N 3. – P. 217-241.
6. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. М., Изд-во Моск. ун-та. – 1989. – Вып. 14. – С. 3-44.
7. Diaz J.I.,Oleinik O.A. *Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of their solutions*// C.R.Acad.Sci.Paris. Ser.1. – 1992. – Vol. 315. – P. 787-792.
8. Гладков А.Л. *Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением* // Сиб.мат. журн. – 1993. – Т.34, N 1. – С. 47-64.
9. Бокало М.М. *Коректність задачі Фур'є для деяких квазілінійних параболічних рівнянь у необмежених по просторових змінних областях без умов на нескінченності* // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.– Чернівці, Рута. – 1995. – С. 31-41.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., Мир, 1972.
11. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., Наука, 1964.

Стаття надійшла до редколегії 15.10.96