УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Н. М. Задорожна

Zadorohna N. M. Nonlocal boundary value problem for systems of parabolic equaions of arbitrary order. The problem with nonlocal time conditions and periodic conditions in space variables for the system of Shilov's parabolic equations of arbitrary order with constant coefficients is studied. Conditions of existence and uniqueness of a solution of the problem are established. The metric theorems on lower bounds of small denominators which appear in the construction of a solution in the form of series of orthogonal functions, are proved.

Коректність нелокальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчали багато авторів (див., наприклад, [1-5]). Так у працях [2,5] за допомогою перетворення Фур'є для систем параболічних рівнянь 1-го порядку досліджено нелокальні за часовою координатою крайові задачі у шарі.

У даній праці встановлено умови коректності задачі з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовими змінними для систем параболічних за Г.Є.Шиловим рівнянь довільного порядку зі сталими коефіцієнтами. Аналогічні задачі для систем гіперболічних та безтипних рівнянь вивчалися в працях [1,3].

Такі задачі є умовно-коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемами малих знаменників, для аналізу яких застосовується метричний підхід.

1. Будемо використовувати такі позначення:

$$x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p; \quad k = (k_1, ..., k_p) \in \mathbb{Z}^p; \quad |k| = |k_1| + \cdots + |k_p|;$$

$(k, x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$; $(k, k) = \|k\|^2$; $\Omega - p$-вимірний тор $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \leqslant x_r \leqslant 2\pi, \quad r = \overline{1,p}\}$; $D = [0, T] \times \Omega$; $A_s^\beta (s > 0, \beta > 0)$ – простір 2π-періодичних функцій

$$\phi(x) = \sum_{|k|\geqslant 0} \phi_k exp(ik, x) \quad \text{зі скінченною нормою} \quad \|\phi\|_{s,\beta} = \sum_{|k|\geqslant 0} |\phi_k \mid \exp(s \mid k \mid^\beta);$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K50.

Робота профінансована Фондом підтримки фундаментальних досліджень Західного наукового центру НАН України

$\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)$ – банахів простір вектор-функцій $u(t,x)$ $(u(t,x) = (u_1(t,x),\dots,u_m(t,x))$ з нормою

$$\|u\|_{\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|s|\leqslant q,\, s_0\leqslant n_j} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right|, \quad \bar{n} = (n_1, \dots, n_m).$$

Легко показати, що $A_s^\beta \subset G_{1/\beta}$, де $G_{1/\beta}$– клас Жевре 2π– періодичних функцій порядку $1/\beta$ типу Берлінга [6].

2. В області D розглянемо задачу

$$L_j\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_j} u_j + \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_r = 0, \tag{1}$$

$$M_{jl}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_j \equiv \sum_{|s|\leqslant q,\, s_0\leqslant n_j-1} b_{j\hat{s}}^l \frac{\partial^s}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} \left(\left.\frac{\partial^{s_0} u_j}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{s_0} u_j}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=T} \right) = f_{jl}(x), \tag{2}$$

де $l = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, m}$; $P_{jr}(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_p)$ – поліном з дійсними коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1, \dots, \xi_p$ не перевищує числа q, а за змінною λ – не перевищує $(n_j - 1)(q \geqslant \max n_j)$; $b_{j\hat{s}}^l \in \mathbb{C}$; $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; $n_1 + \dots + n_m = n$.

Припустимо, що система (1) параболічна за Г.Є. Шиловим, тобто корені $\lambda_i(\eta)$, $i = \overline{1,n}$ рівняння

$$\det P(\lambda(\eta)) \equiv \det \|P_{jr}(\lambda, i\eta_1, \dots, i\eta_p) + \lambda^{n_j}\delta_{jr}\|_{j,r=\overline{1,m}} = 0 \tag{3}$$

для довільного дійсного вектора η задовольняють нерівність

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{Re}\lambda_i(\eta) \leqslant -c_1|\eta|^h + c_2; \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad h > 0. \tag{4}$$

Розв'язок задачі (1),(2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_k(t) \exp(ik, x), \tag{5}$$

де $u(t,x) = \mathrm{colon}(u_1(t,x), \dots, u_m(t,x))$, а вектор-функція $u_k(t) = \mathrm{colon}(u_{k1}(t), \dots, u_{km}(t))$ є розв'язком відповідної задачі

$$L_j\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_k(t) = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{6}$$

$$M_{j,l}\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_{kj}(t) = f_{k,j,l}, \quad l = \overline{1,n_j}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{7}$$

а $f_{k,j,l}$, $\;k \in \mathbb{Z}^p$– коефіцієнти Фур'є функції $f_{j,l}(x)$.

Припустимо, що при $\eta = k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j(k) \equiv \lambda_j$, $\;j = \overline{1,n}$, рівняння (3) попарно різні і відмінні від нуля. Тоді система (6) має таку фундаментальну матрицю розв'язків:

$$Y = \|Y_{r\nu}\|_{r=\overline{1,m},\, \nu=\overline{1,n}}, \quad Y_{r\nu} = \gamma_r(\lambda_\nu)\exp(\lambda_\nu t), \tag{8}$$

де $\gamma_r(\lambda_\nu)$, $\quad r = \overline{1,m}$ визначаються з системи лінійних алгебраічних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{m}(P_{jr}(\lambda_\nu, ik) + \lambda_\nu^{n_j}\delta_{jr})\gamma_r(\lambda_\nu) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Визначником системи (9) є $\det P(\lambda_\nu(k))$. Оскільки всі корені $\lambda_\nu(k)$, $\quad \nu = \overline{1,n}$, є простими, то $\mathrm{rang} P(\lambda_\nu(k)) = m-1$, $\quad \nu = \overline{1,n}$, тобто один з мінорів $(m-1)$-го порядку визначника $\det P(\lambda_\nu(k))$ відмінний від нуля. Не обмежуючи загальності припустимо, що $\det \|P_{jr}(\lambda_\nu, ik) + \lambda_\nu^{n_j}\delta_{jr}\|_{j,r=\overline{1,m-1}} \equiv D_m(\lambda_\nu) \neq 0$. Тоді

$$\gamma_m(\lambda_\nu) = D_m(\lambda_\nu) \equiv \sum_{l=0}^{n-n_m} B_{ml}(k)\lambda_\nu^{n-n_m-l}, \tag{10}$$

$$\gamma_r(\lambda_\nu) = D_r(\lambda_\nu) \equiv \sum_{l=0}^{n-n_r-1} B_{rl}(k)\lambda_\nu^{n-n_r-l-1}, \quad r = \overline{1,m-1}, \tag{11}$$

де $D_r(\lambda_\nu)-$ визначник, який отримується з визначника $D_m(\lambda_\nu)$ шляхом заміни $r-$ стовпця на стовпець $(P_{1m}(\lambda_\nu, ik), \dots, (P_{m-1,m}(\lambda_\nu, ik))$. Відомо [4], що однорідна крайова задача, яка відповідає задачі (6),(7), має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник $\Delta(k)$ матриці $\|M_{j,l}(Y_{j\nu})\|_{l=\overline{1,n_j};j=\overline{1,m};\nu=\overline{1,n}}$ дорівнює нулеві.

Легко бачити, що

$$\Delta(k) \equiv \prod_{s=1}^{n}(1 - \mu\exp(\lambda_s T)) \prod_{1\leqslant\gamma<\alpha\leqslant n}(\lambda_\alpha - \lambda_\gamma)\prod_{j=1}^{m}\beta_j(k)B(k), \tag{12}$$

$$\text{де} \quad \beta_j(k) \equiv \det\left\| \sum_{|s|\leqslant q} b_{j,\hat{s}}^{l} i^{|s|} k_1^{s_1}\dots k_p^{s_p} \right\|_{l=\overline{1,n_j};s_0=\overline{0,n_j-1}}, \quad j = \overline{1,m},$$

$$B(k) = \begin{vmatrix} \underbrace{0\dots0}_{n_1-1} & B_{1,n-n_1-1} & \dots & B_{11} & B_{10} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{1,n-n_1-1} & \dots & B_{12} & B_{11} & B_{10} & \underbrace{0\dots0}_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{0\dots0}_{n_m-1} & B_{m,n-n_m} & \dots & B_{m2} & B_{m1} & B_{m0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m,n-n_m} & \dots & B_{m2} & B_{m1} & B_{m0} & \underbrace{0\dots0}_{n_m-1} \end{vmatrix}.$$

Зауваження 1. *Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник $B(k)$ відмінний від нуля, бо він входить співмножником у вираз вронскіана $W(k)$ фундаментальної системи розв'язків (8), який дорівнює*

$$W(k) = (-1)^{\omega} \prod_{1 \leqslant \gamma < \alpha \leqslant n} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma) B(k) \exp(t \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha(k)),$$

де

$$\omega = 1/2 \left(\sum_{r=1}^{m-2} (n_{r+1} - n_{r+2})(n_{r+1} + n_{r+2} - 1) + (m-1)(n_m - 1)n_m + \sum_{r=1}^{m} n_r(n_r - 1) \right).$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення $\Delta(k)$:

$$\Delta_{h_{\delta\sigma},l}(k) = (-1)^{h_{\delta\sigma}+l} \prod_{s=1,\, s\neq l}^{n} (1 - \mu \exp(\lambda_s T)) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{m} \sum_{\chi=1}^{n_\delta} \sum_{j=1,\, j\neq\delta}^{m} \beta_j(k) \times$$
$$\times (\beta_\delta)_{\sigma,\chi} B_{h_{\delta,\chi},\nu}(k) S^l_{n-\nu} \prod_{1 \leqslant \gamma < \alpha \leqslant n,\, \alpha\neq l,\, \gamma\neq l} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma), \tag{13}$$

де $h_{\delta\sigma} = n_1 + \cdots + n_{\delta-1} + \sigma$; $B_{l,r}(k)$, $(\beta_\delta)_{l,r}$ – визначники, які отримуються з визначників $B(k), \beta_\delta(k)$ шляхом викреслення l–го рядка і r–го стовпця; $S^l_{n-\nu}$ – сума всіх можливих добутків елементів $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq l$, взятих у кількості $(n-\nu)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1),(2) в просторі $\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)$ **необхідно і достатньо**, щоб рівняння*

$$1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T) = 0, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{14}$$
$$\beta_\delta(k) = 0, \qquad \delta = \overline{1,m} \tag{15}$$

не мали розв'язків в цілих числах $k_1, \ldots, k_p$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 4.1 [5. гл.2] і випливає з теореми про єдиність розвинення періодичної функції у ряд Фур'є.

3. Припустимо, що має місце єдиність розв'язку задачі (1).(2). Тоді для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує розв'язок задачі (6),(7), який на основі формул (8)-(13) зображується у вигляді

$$u_{kj}(t) = \sum_{l,\nu=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{m} \sum_{\chi,\sigma=1}^{n_\delta} (-1)^{n-h_{\delta,\sigma}} \exp(\lambda_l t) \gamma_j(\lambda_l) (\beta_\delta)_{\sigma,\chi} B_{h_{\delta,\chi},\nu}(k) \times$$
$$\times S^l_{n-\nu} f_{k,\delta,\sigma} \Big(\prod_{\alpha=1,\, \alpha\neq l}^{n} (\lambda_l - \lambda_\alpha) \beta_\delta(k) B(k) (1 - \mu \exp(\lambda_l T)) \Big)^{-1}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{16}$$

Компоненти розв'язку задачі (1),(2) формально зображуються рядами

$$u_j(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_{kj}(t) \exp(ik, x), \qquad j = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Ряд (17), де функції $u_{kj}(t)$ визначені формулами (16), взагалі кажучи, є розбіжний, бо вирази $|\lambda_l(k)-\lambda_\alpha(k)|$, $|B(k)|$, $|\beta_\delta(k)|$, будучи відмінними від нуля, можуть приймати як завгодно малі значення для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому питання існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Легко бачити, що для довільного $a \in (0,1)$ при $|k| > K_1$, де

$$K_1^h = C_1^{-1}(C_2 + T^{-1}\ln(|\mu|/(1-a))),$$

справджується оцінка

$$|1-\mu\exp(\lambda_j(k)T)| \geqslant a. \tag{18}$$

З вигляду рівняння (3) випливає, що

$$|\lambda_j(k)| \leqslant \omega|k|^q, \quad k \in \mathbb{Z}^p\backslash 0. \tag{19}$$

Теорема 2. *Нехай існують додатні сталі $s_1, s_2, s_3, C_3, C_4, C_5$ такі, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p, |k| > K_2$, виконуються нерівності*

$$\prod_{\alpha=1,\,\alpha\neq l}^{n} |\lambda_l(k)-\lambda_\alpha(k)| \geqslant C_3|k|^{-s_1}, \quad l=\overline{1,n}; \tag{20}$$

$$|B(k)| \geqslant C_4|k|^{-s_2}; \tag{21}$$

$$|\beta_\nu(k)| \geqslant C_5|k|^{-s_3}, \quad \nu=\overline{1,m}. \tag{22}$$

Якщо $f_{\delta,\sigma}(x) \in C^\gamma(\Omega)$, $\gamma > q(2n+m(2n-m-1)/2)+p+\sum_{i=1}^3 s_i$, $\delta=\overline{1,m}$; $\sigma=\overline{1,n_\delta}$, то в просторі $\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)$ існує розв'язок задачі (1),(2), який неперервно залежить від $f_{\delta,\sigma}(x)$, $\delta=\overline{1,m}$; $\sigma=\overline{1,n_\delta}$.

Доведення. Зауважимо, що при $k \in \mathbb{Z}^p\backslash 0$ справджуються оцінки

$$|B_{h_{\delta,\chi},\nu}(k)| \leqslant C_6|k|^{q(m-1)(n-1-m/2)}, \tag{23}$$

$$|(\beta_\delta)_{\sigma,\chi}(k)| \leqslant C_7|k|^{q(n_\delta-1)}, \quad \delta=\overline{1,m}. \tag{24}$$

З формул (5),(16),(17) та оцінок (18)-(24) випливає, що

$$\|u\|_{\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)} \leqslant C_8\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n_\delta}\Bigg(\sum_{|k|\leqslant K}|f_{k,\delta,\sigma}| + \sum_{|k|>K}\|k\|^\eta|f_{k,\delta,\sigma}|\Bigg) \leqslant C_9\sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n_\delta}\|f_{\delta,\sigma}\|_{C^\gamma(\Omega)},$$

де $K=\max K_1,K_2$; $\eta = q(2n+m(2n-m-1)/2)+\sum_{i=1}^3 s_i$. Теорему доведено.

Зауваження 2. *Якщо $f_{\delta,\sigma}(x) \in A_s^q$, $s > \omega T$, $\delta=\overline{1,m}$, $\sigma=\overline{1,n_\delta}$, то при виконанні всіх інших умов теореми 2 розв'язок задачі (1),(2) належить до простору $\bar{C}^{\bar{n}}([0,T],A_\epsilon^q)$, $0<\epsilon<s-\omega T$.*

Дослідимо, коли виконуються оцінки (20)-(22). Позначимо через $y=(y_1,...,y_\gamma)$ вектор, складений з коефіцієнтів рівняння (3), де γ – число всіх коефіцієнтів.

Теорема 3. *Для майже всіх (за Лебегом) векторів у нерівності (20) виконуються при* $s_1 > (n-1)(p-q+q(n-2))/2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення. Доведення теореми базується на тому, що дискримінант $D(P)$ характеристичного полінома

$$\det P(\lambda(k)) \equiv \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i A_i(k)$$

з (3) можна зобразити як через коефіцієнти $A_i(k)$ у вигляді

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} n^n A_0^{n-1}(k) + F, \tag{25}$$

де F містить степені коефіцієнта $A_0(k)$ менші за $n-1$, так і через корені $\lambda_j(k)$, $\quad j = \overline{1,n}$ полінома $\det P(\lambda(k))$ за формулою [4]

$$D(P) = \prod_{1 \leqslant l < q \leqslant n} (\lambda_q(k) - \lambda_l(k))^2. \tag{26}$$

Доведемо, що для майже всіх векторів y, які належать до деякого паралелепіпеда $P_\gamma = [\alpha_1, \beta_1] \times P_{\gamma-1} \subset \mathbb{R}^\gamma$, для $D(P)$ виконується оцінка

$$|D(P)| \geqslant |k|^{-s_4} \tag{27}$$

при досить великих $|k|$. Позначимо через E множину тих y, для яких протилежна нерівність

$$|D(P)| < |k|^{-s_4} \tag{28}$$

справджується для нескінченного числа векторів k, а через E_k- множину тих векторів y, для яких нерівність (28) є правильною при фіксованому k. Не порушуючи загальності вважатимемо, що

$$|k_1| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |k_i|, \quad \alpha = P_{11}(0, q, 0, ..., 0) \neq 0$$

і, використавши (25) і те, що $A_0(k)$ лінійно залежить від α, знайдемо

$$\left| \frac{\partial^{n-1} D(P)}{\partial \alpha^{n-1}} \right| = n^n (n-1)! \quad |k_1|^{q(n-1)}.$$

На підставі леми 2.2 [4] одержуємо, що міра множини E_k^1 тих значень $\alpha \in [\alpha_1, \beta_1]$, які задовольняють (28) (коли решта коефіцієнтів рівняння (3) фіксовані), має таку оцінку:

$$|E_k^1| \leqslant C_{10} |k|^{-(s_4/(n-1)+q)}. \tag{29}$$

Інтегруючи (29) по паралелепіпеду $P_{\gamma-1}$, маємо

$$|E_k| \leqslant C_{11} |k|^{-(s_4/(n-1)+q)}.$$

Оскільки ряд $\sum_{|k|\geqslant 0}|E_k|$ збігається при $s_4 > (p-q)(n-1)$, то згідно з лемою 2.1 [4] міра множини E дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх (за Лебегом) векторів y виконується нерівність (27) для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. На підставі формули (26) та оцінок (19) дістаємо нерівності (20) при $s_1 > (n-1)(p-q+q(n-2))/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Теорему доведено.

Розглянемо нерівність (21). Зобразимо значення визначника $B(k)$ у вигляді

$$B(k) \equiv \sum_{|s|\leqslant q(m-1)(n-m/2)} B_s k_1^{s_1}...k_p^{s_p}$$

і позначимо через $b^{(1)} = (b_1^{(1)},...,b_h^{(1)}),\quad b^{(2)} = (b_1^{(2)},...,b_h^{(2)})-$ вектори, складені відповідно з дійсних і уявних частин коефіцієнтів B_s, де $h-$ кількість цілочислових розв'язків нерівності $|s| \leqslant q(m-1)(n-m/2)$. Зокрема, $b_1^{(1)} = ReB_0,\quad b_1^{(2)} = \mathrm{Im}B_0$.

Теорема 4. *Для майже всіх (за Лебегом) векторів $b^{(1)}$ і для всіх векторів $b^{(2)}$ (або для всіх $b^{(1)}$ та майже всіх $b^{(2)}$) нерівність (21) виконується при $s_2 > p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Доведення. Оскільки $|B(k)| \geqslant \max\{\mathrm{Re}|B(k)|, \mathrm{Im}|B(k)|\}$, то для доведення (21) нам досить довести виконання нерівності

$$\mathrm{Re}|B(k)| \geqslant C_4|k|^{-s_2}. \tag{30}$$

Позначимо через D множину тих векторів $b^{(1)}$, які належать до деякого $h-$ вимірного паралелепіпеда $P_h = [\alpha_1,\beta_1]\times P_{h-1} \subset \mathbb{R}^h$, для яких нерівність

$$\mathrm{Re}|B(k)| < |k|^{-s_2} \tag{31}$$

має нескінченне число розв'язків $k = (k_1,...,k_p) \in \mathbb{Z}^p$. Зафіксуємо k і $b_j^{(1)},\quad j = 2,...,h$. Тоді для $D_k(b_2^{(1)},...b_h^{(1)})$ множини тих $b_1^{(1)} \in [\alpha_1,\beta_1]$, для яких виконується нерівність (31), правильна оцінка

$$|D_k(b_2^{(1)},...,b_h^{(1)})| < 2|k|^{-s_2}, \tag{32}$$

де $|B|-$ міра множини B. Інтегруючи (32) по паралелепіпеду P_{h-1}, знаходимо, що міра множини $D(k)$ тих векторів $b^{(1)} \in P_h$, для яких виконується (31) при фіксованому k, задовольняє оцінку

$$|D(k)| < 2C|k|^{-s_2},$$

де $C-$ об'єм P_{h-1}. Оскільки ряд $\sum_{|k|\geqslant 0} 2C|k|^{-s_2}$ збігається при $s_2 > p$, то згідно з лемою 2.1 [4] $|D| = 0$. Отже, для майже всіх $b^{(1)} \in P_h$ та для всіх $b^{(2)}$ виконується нерівність (21) при$s_2 > p$. Теорему доведено.

Переходячи до нерівностей (22) відзначимо, що значення визначників $\beta_\nu(k),\quad \nu = \overline{1,m}$, зображаються у вигляді

$$\beta_\nu(k) = \sum_{|s|\leqslant qn_\nu} a_{\nu s}k_1^{s_1}...k_p^{s_p},\quad \nu = \overline{1,m}.$$

Позначимо через $A_\nu^{(1)}$ і $A_\nu^{(2)}$ вектори з компонентами $\mathrm{Re}\, a_{\nu s}$ і $\mathrm{Im}\, a_{\nu s}$ відповідно, а через $z_\nu-$ число невід'ємних розв'язків у цілих числах $s_1,...,s_p$ нерівності $|s| \leqslant qn_\nu$.

Теорема 5. *Для майже всіх (за Лебегом) векторів* $A_\nu^{(1)}$ *і для всіх* $A_\nu^{(2)}$ *(або для майже всіх векторів* $A_\nu^{(2)}$ *і для всіх* $A_\nu^{(1)}$*) кожна з оцінок (21) виконується при* $s_3 > p$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 4 з урахуванням того, що

$$|\beta_\nu(k)| \geqslant \max\left\{|\mathrm{Re}\sum_{|s|\leqslant qn_\nu} a_{\nu s}k_1^{s_1}...k_p^{s_p}|, |\mathrm{Im}\sum_{|s|\leqslant qn_\nu} a_{\nu s}k_1^{s_1}...k_p^{s_p}|\right\}, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

1. Ильків В.С., Пташник Б.Й. *Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами* // Дифференц.уравнения. — 1984. — Т.20, N 6. — С. 1012-1023.
2. Корбут Л.І., Матійчук М.І. *Про нелокальну параболічну крайову задачу*// Тези допов. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь." — Дрогобич: Інститут матем-ки НАН України, 1994. — С. 72.
3. Полищук В.Н. *Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболической системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*// Докл.АН УССР, Сер.А. — 1979. — N 3. — С.171-175.
4. Пташник Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - К., Наук. думка, 1984. — 264 с.
5. Савченко Г.Б. *О корректности одной нелокальной задачи*// Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, N 8. — С. 1450-1453.
6. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально- операторных уравнений.- К., Наук.думка, 1984. — 284 с.
7. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. - М., Наука, 1977. — 143 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.05.94