УДК 517.95

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. В. Волошин

Voloshin V. V. Periodic problem for a system of the first order hyperbolic differential equations with a small parameter. The asymptotic expansion of a solution of the periodic problem for the singular hyperbolic first order system is obtained employing the boundary layer method.

Ця праця є певним продовженням досліджень періодичних задач, проведених в [1], стосовно гіперболічного рівняння другого порядку з малим параметром та результатів автора з вивчення системи першого порядку з малим параметром, що вироджується у систему звичайних диференціальних рівнянь за змінною t [2].

Тут при відповідних припущеннях побудовано асимптотичне розвинення розв'язку сингулярно збуреної системи у випадку її повного виродження (вироджена система є системою алгебраїчних рівнянь). При дослідженні задачі використано метод, описаний у працях [3], [4], і результати праці [5].

У смузі $G = \Big\{(x,t) : 0 < x < \ell, -\infty < t < +\infty\Big\}$, де $0 < \ell < \infty$, розглянемо систему з малим параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial x}\right) + A(x,t)u(x,t,\varepsilon) = f(x,t), \tag{1}$$

де $u(x,t,\varepsilon) =$ colon $\{\, u_1(x,t,\varepsilon),\ u_2(x,t,\varepsilon),\ \ldots,\ u_n(x,t,\varepsilon)\}$; $f(x,t) =$ $=$ colon $\{\, f_1(x,t),\ f_2(x,t),\ \ldots,\ f_n(x,t)\,\}$; $A(x,t)$ – $n \times n$ симетрична матриця з елементами $a_{jm}(x,t)$, $j = \overline{1,n}$, $m = \overline{1,n}$; $\Lambda(x,t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t)\}$, причому перші $k (0 \leqslant k \leqslant n)$ величин додатні, решта $(n-k)$ від'ємні всюди в G.

Для системи (1) задаємо умови періодичності за t

$$u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+2\pi,\varepsilon), \tag{2}$$

та граничні умови

$$u_j(0,t,\varepsilon) = 0,\ j = \overline{1,k};\ u_j(\ell,t,\varepsilon) = 0,\ j = \overline{k+1,n}. \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35L50; Secondary 35B25.

Нехай $N \geqslant 1$ – задане натуральне число і виконані наступні умови:

1) функції $\lambda_j(x,t)$ неперервно диференційовні за сукупністю змінних x, t до $(N+1)$ порядку в G, функції $a_{jm}(x,t)$, $f_j(x,t)$ – неперервно диференційовні за сукупністю змінних x, t до $N+2$ порядку в G;

2) функції $\lambda_j(x,t)$, $a_{jm}(x,t)$, $f_j(x,t)$ періодичні за t з періодом 2π;

3) матриця $A(x,t)$ з діагональним переважанням, тобто для деякого $\mu > 0$ в G справедлива нерівність

$$a_{jj}(x,t) \geqslant \sum_{m=1}^{n}(1-\delta_{jm})|a_{jm}(x,t)| + \mu,$$

δ_{jm} – символ Кронекера;

4) якщо матриці $Z(t)$ та $Z^*(t)$ такі, що зводять матриці $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$ та $\Lambda^{-1}(\ell,t)A(\ell,t)$ відповідно до діагонального вигляду, причому в отриманих матрицях у першому випадку перші k елементів додатні, а в другому останні $(n-k)$ від'ємні, то $\det Z_{11}(t) \neq 0$, $\det Z^*_{22}(t) \neq 0$, де $Z_{11}(t)$ та $Z^*_{22}(t)$ – матриці (блоки) розмірів $k \times k$, $(n-k)\times(n-k)$ відповідно матриць

$$Z(t) = \begin{pmatrix} Z_{11}(t) & Z_{12}(t) \\ Z_{21}(t) & Z_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad Z^*(t) = \begin{pmatrix} Z^*_{11}(t) & Z^*_{12}(t) \\ Z^*_{21}(t) & Z^*_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що стовпчики матриць $Z(t)$ і $Z^*(t)$ є власними векторами матриць $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$ та $\Lambda^{-1}(\ell,t)A(\ell,t)$ відповідно і їх можна завжди розмістити в такому порядку, який забезпечує відповідний порядок додатних і від'ємних елементів в отриманих діагональних матрицях.

Зауважимо, що при виконанні цих умов для кожного фіксованого ε задача (1)-(3) однозначно розв'язна [6].

Асимптотичне розвинення розв'язку цієї задачі шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Big(u^i(x,t) + \Pi^i(\xi,t) + Q^i(\eta,t)\Big) + \varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \tag{4}$$

де $u^i(x,t)$ – функції регулярної частини асимптотики, $\Pi^i(\xi,t)$, $Q^i(\eta,t)$ – функції примежевого шару, $\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon)$ – зилишковий член асимптотики; $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $\eta = \dfrac{\ell - x}{\varepsilon}$ – регуляризуючі перетворення в околах $x = 0$ та $x = \ell$ відповідно.

Якщо в (1) формально покласти $\varepsilon = 0$, то система вироджується в систему алгебраїчних рівнянь. При виродженні маємо втрату крайових умов (3). Тому в околах $x = 0$ та $x = \ell$ виникають примежеві шари.

Стандартним способом отримуємо задачі для функцій розвинення (4). Зокрема, для функцій регулярної частини асимптотики маємо такі системи алгебраїчних рівнянь

$$A(x,t)u^i(x,t) = F^i(x,t), \ i = \overline{0,N}, \tag{5}$$

де

$$F^0(x,t) = f(x,t), \ F^i(x,t) = -\Lambda(x,t)\frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial t}, \ i = \overline{1,N},$$

до яких додаються умови

$$u^i(x,t) = u^i(x,t+2\pi),\ i = \overline{0,N}. \tag{6}$$

Для функцій примежевого шару задачі мають такий вигляд

$$\frac{\partial\, \Pi^i(\xi,t)}{\partial \xi} + \Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)\,\Pi^i(\xi,t) = \Psi^i(\xi,t),\ i = \overline{0,N}, \tag{7}$$

де $\Psi^0(\xi,t) \equiv 0$, $\Psi^i(\xi,t)$ $(i = \overline{1,N})$ лінійно виражаються через $\Pi^m(\xi,t)$ та їх похідні за ξ та t з періодичними коефіцієнтами $(m = \overline{0,i-1})$,

$$\Pi^i_j(0,t) = -u^i_j(0,t),\ j = \overline{1,k},\ i = \overline{0,N}, \tag{8}$$

$$\Pi^i(\xi,t) = \Pi^i(\xi,t+2\pi),\ i = \overline{0,N}, \tag{9}$$

$$\lim_{\xi\to\infty} \Pi^i(\xi,t) = 0,\ i = \overline{0,N} \tag{10}$$

та

$$\frac{\partial Q^i(\eta,t)}{\partial \eta} - \Lambda^{-1}(\ell,t)A(\ell,t)Q^i(\eta,t) = \Phi^i(\eta,t),\ i = \overline{0,N}, \tag{11}$$

де $\Phi^0(\eta,t) \equiv 0$, $\Phi^i(\eta,t)$ $(i = \overline{0,N})$ лінійно виражаються через $Q^m(\eta,t)$ та їх похідні за η та t з періодичними коефіцієнтами $(m = \overline{0,i-1})$,

$$Q^i_j(0,t) = -u^i_j(\ell,t),\ j = \overline{k+1,n},\ i = \overline{0,N}, \tag{12}$$

$$Q^i(\eta,t) = Q^i(\eta,t+2\pi),\ i = \overline{0,N}, \tag{13}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} Q^i(\eta,t) = 0,\ i = \overline{0,N}. \tag{14}$$

Розглянемо системи (5) для визначення функцій регулярної частини асимптотики.

Зауважимо, що оскільки матриця $A(x,t)$ з діагональним переважанням, то з теореми Леві - Десплaнка [7] отримуємо додатну визначеність цієї матриці. Звідси випливає, що $\det A(x,t) \neq 0$ і ця властивість забезпечує існування матриці $A^{-1}(x,t)$.

Тому розв'язок систем (5) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &u^0(x,t) = A^{-1}(x,t)f(x,t), \\ &u^i(x,t) = A^{-1}(x,t)\left[-\Lambda(x,t)\frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial t}\right],\ i = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{15}$$

Періодичність цих розв'язків, тобто виконання умов (6), легко довести методом математичної індукції, враховуючи періодичність та відповідну гладкість $A(x,t)$ та $f(x,t)$.

Для функцій примежевого шару отримали систему звичайних диференціальних рівнянь за ξ (t входить параметром) з відповідними умовами. Для прикладу розглянемо задачі, що підправляють розв'язок в околі $x = 0$.

Оскільки матриця $\Lambda^{-1}(0,t)$ симетрична, а матриця $A(0,t)$ симетрична і додатно визначена, то існує [8] невироджена матриця $Z(t)$, що зводить матрицю $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$ до діагонального вигляду, тобто

$$Z^{-1}(t)\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)Z(t) = D(t) = \mathrm{diag}\{d_1(t), d_2(t), \ldots, d_n(t)\}.$$

Далі, оскільки матриця $A(0,t)$ додатно визначена, k елементів діагональної матриці $\Lambda^{-1}(0,t)$ додатні, а решта $(n-k)$ від'ємні, то матриця $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$, а отже і $D(t)$, мають k додатних і $(n-k)$ від'ємних власних значень [9]. Зазначимо, що матрицю $Z(t)$ можна вибрати 2π-періодичною і такою, що $d_j(t) > 0$, $j = \overline{1,k}$, $d_j(t) < 0$, $j = \overline{k+1,n}$ та всі $d_j(t)$ періодичні з періодом 2π.

Зробимо заміну $\Pi^i(\xi,t) = Z(t)P^i(\xi,t)$ та домножимо (7) зліва на $Z^{-1}(t)$. Система зведеться до вигляду

$$\frac{\partial P_j^i(\xi,t)}{\partial \xi} + d_j(t)P_j^i(\xi,t) = \sum_{m=1}^{n} z_{jm}^{-1}(t)\Psi_m^i(\xi,t),\ j = \overline{1,n}, i = \overline{0,N},$$

де $z_{jm}^{-1}(t)$ – елементи матриці $Z^{-1}(t)$. Розв'язуючи цю систему, отримаємо

$$P_j^i(\xi,t) = \left(C_j^i(t) + \int\limits_{a_j}^{\xi} \sum_{m=1}^{n} z_{jm}^{-1}(t)\Psi_m^i(s,t)\exp(d_j(t)s)ds\right)\exp(-d_j(t)\xi), \tag{16}$$

$j = \overline{1,n}$, $i = \overline{0,N}$, де $a_j = 0$, $j = \overline{1,k}$, $a_j = +\infty$, $j = \overline{k+1,n}$. Щоб визначити функції та встановити властивості розв'язків (16), використаємо результати, викладені в роботі [10].

Оскільки повинні виконуватися умови (10), то $C_j^i(t) \equiv 0$, $j = \overline{k+1,n}$, $i = \overline{0,N}$. Враховуючи, що $\det Z_{11}(t) \neq 0$, решта $C_j^i(t)$ однозначно визначаємо з умов (8). Доведемо методом математичної індукції експоненціальну оцінку та періодичність цих розв'язків. Для $P_j^0(\xi,t)$ маємо

$$P_j^0(\xi,t) = C_j^0(t)\mathrm{e}^{-d_j(t)\xi},\ j = \overline{1,k},\ P_j^0(\xi,t) \equiv 0,\ j = \overline{k+1,n}, \tag{17}$$

де

$$\mathrm{colon}\{C_1^0(t), C_2^0(t), \ldots, C_k^0(t)\} = -Z_{11}^{-1}(t)\ \mathrm{colon}\{u_1^0(t), u_2^0(t), \ldots, u_k^0(t)\}.$$

Враховуючи періодичність $C_j^0(t)$, $d_j(t)$, $j = \overline{1,k}$ та додатність $d_j(t)$, $j = \overline{1,k}$, маємо періодичність та експоненціальну оцінку. Зауважимо, що з представлення (17) випливає, що й похідні $P_j^0(\xi,t)$ (а отже і $\Pi^0(\xi,t)$) за ξ й t до порядку, що визначається гладкістю коефіцієнтів системи, періодичні й експоненціально спадні за ξ.

Далі, припускаючи періодичність і експоненціальну оцінку для функцій $\Pi^q(\xi,t)$, $q = \overline{0,i-1}$ та їх похідних, доведемо оцінку для $P^i(\xi,t)$. Для цього звернемося до зображення (16). Зауважимо, що оскільки, $\Psi_m^i(\xi,t)$ експоненціально спадні за ξ, коефіцієнти $z_{jm}^{-1}(t)$ обмежені, то у випадку $j = \overline{k+1,n}$ інтеграли у правій частині збіжні. Використовуючи умови (10) і (8), визначаємо функції $C_j^i(t)$. Внаслідок періодичності $C_j^i(t)$, $z_{jm}(t)$, $\Psi_m^j(\xi,t)$, $d_j(t)$ та експоненціального спадання $\Psi_m^i(\xi,t)$, з [10] випливає, що й $P_j^i(\xi,t)$ періодичні за t та експоненціально спадні за ξ. Тому $\Pi^i(\xi,t) = Z(t)P^i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$ є розв'язком задачі (7)-(10) типу примежевого шару.

Задачі (11)-(14) для функцій $Q^i(\eta,t)$, $i = \overline{0,N}$ подібні до розглянутих. Аналогічно доводимо, що й $Q^i(\eta,t)$, $i = \overline{0,N}$ типу примежевого шару. Отже, усі функції $u^i(x,t)$, $\Pi^i(\xi,t)$, $Q^i(\eta,t)$, $(i = \overline{0,N})$ знайдені, тобто знайдено формальну асимптотику розв'язку задачі (1)-(3).

Для доведення асимптотичної коректності розвинення розв'язку вихідної задачі необхідно отримати оцінку залишкового члена. Щоб отримати задачу для залишкового члена, підставимо в (1) замість $u(x,t,\varepsilon)$ вираз (4), причому на кожен доданок подіємо оператором з урахуванням відповідного регуляризуючого перетворення. Оскільки функції $u^i(x,t)$ є розв'язками систем (5), функції $\Pi^i(\xi,t)$ та $Q^i(\eta,t)$ – розв'язки систем (7), (11) відповідно, то $R_N(x,t,\varepsilon)$ є розв'язком системи

$$\varepsilon\left(\frac{\partial R_N}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial R_N}{\partial x}\right) + A(x,t)R_N = F_N(x,t,\varepsilon), \tag{18}$$

де $F_N(x,t,\varepsilon)$ легко виписується в явному вигляді, причому елементи цієї вектор-функції обмежені за ε. Підставляючи (4) у (2) і (3), враховуючи співвідношення (6), (9), (13) та (8), (14), (12), (10), отримаємо умови

$$R_N(x,t,\varepsilon) = R_N(x,t+2\pi,\varepsilon), \tag{19}$$

$$R_{N_j}(0,t,\varepsilon) = \chi_j(t,\varepsilon),\ j = \overline{1,k},\ R_{N_j}(\ell,t,\varepsilon) = \chi_j(t,\varepsilon),\ j = \overline{k+1,n}, \tag{20}$$

де $\chi_j(t,\varepsilon)$, $(j = \overline{1,n})$ обмежені за ε і легко виписуються у явному вигляді.

Розв'язок задачі (18)-(20) можна шукати у вигляді суми двох функцій γ_1 та γ_2. Причому перша з них є достатньо гладкою і повинна задовольняти умови (19), (20), а друга, відповідно, буде розв'язком системи (18) з можливо зміненою правою частиною, яку позначимо $f_N(x,t,\varepsilon) = \mathrm{colon}\{f_{N_1}, f_{N_2}, \ldots, f_{N_n}\}$ (порядок малості за ε збережеться), з умовами (19) та нульовими умовами (20). За першу функцію можна взяти, наприклад, стовпчик $\chi_j(t), j = \overline{1,n}$, що задовольняє вказаним умовам. Тому, не обмежуючи загальності, можна розглядати задачу для залишкового члена з нульовими умовами (20). Встановимо оцінку розв'язку цієї задачі методом інтегралів енергії [5]. Для цього домножимо j-те рівняння (18) (зі зміненою правою частиною) на $R_{N_j}(x,t,\varepsilon)$, підсумуємо всі рівняння по j, результат зінтегруємо по області $D = \Big\{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\Big\}$. Після очевидних перетворень отримаємо

$$\varepsilon \int_0^{\ell} \sum_{j=1}^{n} R_{N_j}^2(x,0,\varepsilon)dx - \varepsilon \int_0^{\ell} \sum_{j=1}^{n} R_{N_j}^2(x,2\pi,\varepsilon)dx + \varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\ell,t) R_{N_j}^2(\ell,t,\varepsilon)dt -$$
$$-\varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(0,t) R_{N_j}^2(0,t,\varepsilon)dt + 2 \iint_D \sum_{j,m=1}^{n} a_{jm}(x,t) R_{N_m} R_{N_j} dxdt =$$
$$= 2 \iint_D \sum_{j=1}^{n} f_{N_j} R_{N_j} dxdt + \varepsilon \iint_D \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_j(x,t)}{\partial x} R_{N_j}^2 dxdt.$$

Враховуючи періодичність $R_N(x,t,\varepsilon)$, додатну визначеність $A(x,t)$, знак функцій $\lambda_j(x,t)$, $j=\overline{1,n}$, при достатньо малому ε отримаємо оцінку

$$\iint_D \sum_{j=1}^{n} R_{N_j}^2 dxdt \leqslant M \iint_D \sum_{j=1}^{n} f_{N_j}^2 dxdt, \tag{21}$$

де стала M не залежить від ε. Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1)-4). Тоді розв'язок задачі (1)-(3) при достатньо малих ε зображається у вигляді (4), де $u^i(x,t)$ – розв'язки задач (5), (6), функції примежевого шару $\Pi^i(\xi,t)$, $Q^i(\eta,t)$ – розв'язки задач (7)-(10) та (11)-(14) відповідно, $R_N(x,t,\varepsilon)$ задовольняє (21).*

1. Васильева А.Б., Сайдаматов М.М. *О периодическом решении сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа* // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1986. – N 2. – С. 9-14.

2. Волошин В.В. *Періодична задача для сингулярно збуреної системи гіперболічних диференціальних рівнянь першого порядку* // Праці Всеукраїнськоі конференції молодих вчених. Математика. - Київ, 1994. – С. 121-129.

3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, N 5. – С. 3-122.

4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М., Высшая школа, 1990. – 208 с.

5. Курант Р. Уравнения с частными производными.- М., Мир, 1964. – 830 с.

6. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Краевая задача без начальных условий для линейной одномерной системы уравнений гиперболического типа* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, N 3. – С. 463-469.

7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М., Мир, 1989. – 655 с.

8. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре.- М., Наука, 1984. – 416 с.

9. Wielandt Helmut. *On the eigenvalues of $A+B$ and AB* // Journal of research of the National Poured of Standards. Mathematical Sciences.– 1973. – Vol. 77B, N. 182, January - June. – P. 61-63.

10. Еругин М.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Минск, 1979. – 744 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.94