УДК 517.95

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

М. І. Іванчов

Ivanchov M. I. On an inverse problem for parabolic equation. The inverse problem for finding unknown time-dependent factor of major coefficient in parabolic equation is considered. The existence and uniqueness conditions of solution of the problem are established.

У даній праці досліджено можливість ідентифікації старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні у випадку, коли він є добутком двох функцій різних аргументів, одна з яких є відомою, а друга підлягає визначенню. Подібні задачі розглядались у працях [1,2].

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)b(x)u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)$, початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Розв'язком даної задачі будемо вважати пару функцій $(a(t), u(x,t))$, яка належить до класу $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ [3], $a(t) > 0,\ t \in [0,T]$ і задовольняє умови (1)–(4).

Припустимо, що виконуються такі умови:

$(\mathbf{A_1})$ $b(x), \varphi(x) \in C^1[0,h];\ \mu_i(t) \in C^1[0,T], i = 1,2,\ \mu_3(t) \in C[0,T];$
$f(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T);$

$(\mathbf{A_2})$ $b(x) > 0, b'(x) \leqslant 0, \varphi'(x) > 0, x \in [0,h]; \mu_1'(t) - f(0,t) \leqslant 0,$
$\mu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0, \mu_3(t) > 0, t \in [0,T];\ f_x(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in \overline{Q}_T;$

$(\mathbf{A_3})$ $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(h) = \mu_2(0).$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

Вважаючи заданою неперервну на $[0,T]$ функцію $a(t)>0$, подамо розв'язок прямої задачі (1)–(3) у вигляді

$$u = u_0 + v, \tag{5}$$

де

$$u_0(x,t) = \int\limits_0^h G_0(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \sqrt{b(0)}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{b(\xi)}G_0(x,t,\xi,\tau)\right)\Big|_{\xi=0}\times$$

$$\times a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau - \sqrt{b(h)}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{b(\xi)}G_0(x,t,\xi,\tau)\right)\Big|_{\xi=h} a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_0(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{6}$$

$$G_0(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha(t)-\alpha(\tau))b(\xi)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) - \exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right),$$

$$\alpha(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau, \quad \beta(x) = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{b(\xi)}}, \quad H = \beta(h). \tag{7}$$

Легко перевірити, що функція $u_0(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_{0t} = a(t)b(x)u_{0xx} + \frac{1}{2}a(t)b'(x)u_{0x} + f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T \tag{8}$$

і задовольняє умови (2), (3), а функція $v(x,t)$ визначається з рівняння

$$v_t = a(t)b(x)v_{xx} - \frac{1}{2}a(t)b'(x)u_{0x}, \quad (x,t)\in Q_T \tag{9}$$

і умов

$$v(x,0) = 0, \quad x\in[0,h], \tag{10}$$

$$v(0,t) = v(h,t) = 0, \quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

Позначаючи через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (9)–(11) [3], функцію $v(x,t)$ знаходимо у вигляді

$$v(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau)a(\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{12}$$

Підставляючи (6) і (12) в (5), знаходимо розв'язок прямої задачі (1)–(3). Для того, щоб задовольнити умову перевизначення (4), обчислимо похідні від функцій $u_0(x,t)$ і $v(x,t)$. Похідна від $v(x,t)$ знаходиться з формули (12) безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла [4]. Для знаходження похідної від функції $u_0(x,t)$ позначимо доданки, що входять до неї, через $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,4}$, так що

$$u_0(x,t)=\sum_{i=1}^{4} u_i(x,t).$$

Зобразимо $u_1(x,t)$ у вигляді

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{b(\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{b(\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi$$

і проведемо заміни змінних в інтегралах, відповідно:

$$\frac{\beta(x)-\beta(\xi)+2nH}{2\sqrt{\alpha(t)}}=z,\quad \frac{\beta(x)+\beta(\xi)+2nH}{2\sqrt{\alpha(t)}}=\zeta. \tag{13}$$

Диференціюючи після цього отримані вирази по x і проводячи зворотні заміни, знаходимо

$$u_{1x}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\left(\varphi(0)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)-\right.$$
$$-\varphi(h)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4\alpha(t)}\right)+\frac{1}{2}\int_0^h\varphi'(\xi)\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)\right)d\xi\right).$$

Функцію $u_2(x,t)$ запишемо у вигляді

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{a(\tau)\mu_1(\tau)}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\beta(x)+2nH)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau=-\sqrt{\frac{b(x)}{\pi}}\int\limits_0^t a(\tau)\mu_1(\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right)d\tau.$$

Враховуючи співвідношення

$$\frac{a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\left(b(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}b'(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right),$$

інтегруванням частинами знаходимо

$$u_{2x}(x,t)=-\frac{\mu_1(0)}{\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau.$$

Аналогічно отримуємо

$$u_{3x}(x,t)=\frac{\mu_2(0)}{\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4\alpha(t)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_2'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau.$$

Для обчислення $u_{4x}(x,t)$ проведемо заміну, аналогічну до (13). Тоді матимемо

$$u_{4x}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\left(f(0,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)-\right.$$

$$\left.-f(h,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\int\limits_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)+\right.$$

$$+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)f_\xi(\xi,\tau)d\xi.$$

З отриманих формул маємо

$$u_{0x}(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\int\limits_0^h\varphi'(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)+$$
$$+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)\Bigg)d\xi-\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)+$$
$$+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)d\xi. \tag{14}$$

Підставляючи (14) і (12) в умову перевизначення (4), приходимо до такого рівняння стосовно $a(t)$:

$$a(t)=\mu_3(t)\sqrt{\pi b(0)}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\int\limits_0^h\varphi'(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^t\frac{\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2H^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2H^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\xi-$$
$$-\frac{\sqrt{\pi b(0)}}{2}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau\int\limits_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi\Bigg)^{-1},\quad t\in[0,T].$$

(15)

Оцінимо розв'язки рівняння (15). Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int\limits_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{b(\xi)}} = 1, \tag{16}$$

і те, що для функції Гріна $G_x(0,t,\xi,\tau) \geqslant 0$, маємо

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

де

$$A_1 = \frac{\sqrt{b(0)}\max\limits_{[0,T]}\mu_3(t)}{\sqrt{b(h)}\min\limits_{[0,h]}\varphi'(x)}.$$

Для отримання оцінки $a(t)$ знизу, установимо оцінки зверху кожного доданка, що входить до знаменника правої частини (15). Перший доданок оцінюється за допомогою рівності (16). Для оцінки наступних двох доданків попередньо встановлюємо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2z^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n-1}^{n} e^{-t^2z^2}dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2z^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}, \ z > 0. \tag{18}$$

Маючи (18), отримуємо

$$-\int\limits_0^t \frac{\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2H^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[0,T]}(f(0,t)-\mu_1'(t))\left(\frac{\sqrt{\pi}}{H}+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\right) \leqslant C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{\min\limits_{[0,T]}a(t)}},$$

$$\int\limits_0^t \frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2H^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau \leqslant C_3 \tag{19}$$

зі сталими $C_i > 0, i = 1,2,3$, що не залежать від $a(t)$.

Співвідношення (16) використовується і для оцінки такого виразу:

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\xi \leqslant C_4 \tag{20}$$

Аналогічно оцінюючи вирази, що входять до формули (14), отримуємо

$$u_{0x}(x,t) \leqslant C_5 + C_6 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}. \tag{21}$$

Перш ніж установити оцінку похідної функції Гріна $G_x(x,t,\xi,\tau)$, зауважимо, що заміною $\theta = \alpha(t)$ рівняння (9) зводиться до вигляду

$$\hat{v}_\theta = b(x)\hat{v}_{xx} - \frac{1}{2}b'(x)\hat{u}_{0x}, \ x \in [0,h], \ \theta \in [0, A_1T], \tag{22}$$

де значком $\hat{}$ позначені функції, утворені після вказаної заміни. Згідно з [3], для похідної функції Гріна справджується оцінка

$$\left|\hat{G}_x(x,\theta,\xi,\sigma)\right| \leqslant \frac{C_7}{\theta-\sigma}\exp\left(-\frac{C_8(x-\xi)^2}{\theta-\sigma}\right).$$

Повертаючись до старих змінних, маємо

$$|G_x(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{C_7}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\exp\left(-\frac{C_8(x-\xi)^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right), \tag{23}$$

де сталі $C_7, C_8 > 0$ не залежать від $a(t)$. Використовуючи (21), (23), отримуємо

$$-\frac{1}{2}\int_0^t a(\tau)d\tau \int_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi \leqslant C_9 \int_0^t \frac{a(\tau)}{\alpha(t)-\alpha(\tau)} \times$$
$$\times \left(C_5 + C_6\int_0^\tau \frac{d\sigma}{\sqrt{\alpha(\tau)-\alpha(\sigma)}}\right) d\tau \int_0^h \exp\left(-\frac{C_8\xi^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right) d\xi. \tag{24}$$

Проводячи заміну змінної $\zeta = \dfrac{\sqrt{C_8}\xi}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}$, враховуючи рівність

$$\int_\sigma^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\tau))(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}} = \pi$$

та оцінку $a(t)$ зверху (17), з (24) знаходимо

$$-\frac{1}{2}\int_0^t a(\tau)d\tau \int_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi \leqslant C_{10}. \tag{25}$$

Тоді з (19)–(21), (25) отримаємо

$$\min_{[0,T]} a(t) \geqslant \frac{C_{11}}{C_{12} + C_{13}(\min\limits_{[0,T]} a(t))^{-1/2}}$$

зі сталими $C_{11}, C_{12}, C_{13} > 0$, що залежать тільки від вихідних даних задачі. Звідси приходимо до оцінки $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant A_0 > 0, \quad t \in [0,T], \tag{26}$$

де стала A_0 не залежить від $a(t)$.

При наявності оцінок (17), (26) до рівняння (15) можна застосувати теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора за схемою, що викладена в [5,6]. Звідси отримуємо існування розв'язку $a(t) \in C[0,T]$ рівняння (15). Підставляючи його в (6), (12) і (5), знаходимо $u(x,t)$. Отже, має місце теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_3})$. *Тоді розв'язок задачі (1)-(4) існує.*

Установимо єдиність розв'язку задачі (1)–(4). Припускаючи, що $(a_i(t), u_i(x,t))$, $i = 1,2$ — два різних розв'язки даної задачі, знаходимо, що їх різниця $d(t) = a_1(t) - a_2(t), w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$w_t = a_1(t)b(x)w_{xx} + d(t)b(x)u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{27}$$

$$w(x,0) = 0, \ x \in [0,h], \ w(0,t) = w(h,t) = 0, \ t \in [0,T], \tag{28}$$

$$a_1(t)w_x(0,t) = -d(t)u_{2x}(0,t), \ t \in [0,T]. \tag{29}$$

Знаходячи за допомогою функції Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ роз'язок задачі (27)–(28) і підставляючи його в умову (29), отримаємо

$$a_1(t)\int_0^t d(\tau)d\tau \int_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b(\xi)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi = -d(t)u_{2x}(0,t). \tag{30}$$

Припустимо, що справджуються умови $(\mathbf{A_1}), (\mathbf{A_3})$ і умова

$$\mu_3(t) > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{31}$$

Тоді $u_{2x}(0,t) > 0$ і рівняння (30) є однорідним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду з ядром, що має інтегровну особливість. Звідси $d(t) \equiv 0$ і, отже, $w(x,t) \equiv 0$ як розв'язок однорідної задачі вигляду (27), (28).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A_1}), (\mathbf{A_3})$, *(31). Тоді розв'язок задачі (1)-(4) єдиний.*

1. Jones B.F. *Various methods for finding unknown coefficients in parabolic equation* // Comm. on Pure and Applied Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33–44.

2. Lorenzi A. *Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation* // Ric. Mat. – 1983. – Vol. 32, N 2. – P. 263–284.

3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., Наука, 1967. – 736 с.

4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М., Мир, 1968. – 428 с.

5. Иванчов Н.И. *Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости* // Сиб. мат. журнал. – 1994. – Т. 35, N 3. – С. 612–621.

6. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – Препринт; Київ, 1995. – 84 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.96