УДК 517.512

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР'Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗНАЧЕННЯМИ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Я. Г. Притула

Prytula Ya. G. Convergence of the Fourier series of almost periodic functions with values from Banach space. For the almost periodic functions with values from Banach space the sufficient conditions of convergence of the series made from the Fourier coefficients are proved. These results are the generalization of Sasa and Zigmund properties of absolutely convergence of Fourier series.

Нехай B – банахів простір, $f:\mathbb{R}^1\to B$ – неперервна функція.

Означення 1. *Множина $E\subset\mathbb{R}^1$ називається відносно щільною, якщо $\exists l>0$, що в кожному інтервалі $(\alpha,\alpha+l)$ міститься хоча б одне число з E.*

Означення 2. *Неперервна функція $f:\mathbb{R}^1\to B$ називається рівномірно майже періодичною функцією, якщо для $\forall\varepsilon>0$ $\left\{\tau|\sup\limits_t||f(t+\tau)-f(t)||<\varepsilon\right\}$ – відносно щільна множина.*

Означення 3. *Функція $f:[a,b]\to B$ називається функцією з обмеженою сильною варіацією, якщо має місце*

$$V([a,b],f)=\sup_p\sum_{i=1}^n||f(t_i)-f(t_{i-1})||<\infty$$

для довільних розбиттів p відрізка $[a,b]$.

Означення 4. *Рівномірно майже періодична (р.м.п.) функція $f:\mathbb{R}^1\to B$ називається функцією сильної обмеженої варіації, якщо*

$$\exists M\ \exists L\ \forall a\ V([a,a+L],f)\leqslant M.$$

Введемо поняття модулів неперервності для р.м.п. функцій f таким чином:

$$\omega(\sigma,f)\overset{\text{def}}{=}\sup_{|h|\leqslant\delta}||f(t+h)-f(t)||,\tag{1}$$

$$\omega_2(\sigma,f)\overset{\text{def}}{=}\sup_{|h|<\delta}\Big(M\{||f(t+h)-f(t)||^2\}^{1/2}\Big),\tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 42A16.

© Я. Г. Притула, 1997

де $M\{f\}$ – середнє значення р.м.п. функції.

Будемо розглядати рівномірно майже періодичні функції, спектр яких має єдину точку згущення на ∞. Ряд Фур'є у цьому випадку будемо записувати у симетричній формі

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n t} \tag{3}$$

$$(\lambda_{-n} = -\lambda_n;\ n > 0,\ \lambda_n < \lambda_{n+1};\ |A_n| + |A_{-n}| > 0).$$

Теорема 1. *Нехай $f : \mathbb{R}^1 \to H$ – р.м.п. функція з рядом Фур'є (3), H – гільбертів простір. Тоді із збіжності ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

випливає абсолютна збіжність ряду Фур'є функції f, тобто $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n|| < \infty$.

Доведення. Розглянемо ряд Фур'є $f(t+h) - f(t) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n(e^{i\lambda_n h} - 1)e^{i\lambda_n t}$. З рівності Парсеваля отримуємо $M\{||f(t+h) - f(t)||^2\} = 2\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n||^2(1 - \cos\lambda_n h)$, а з (2) маємо

$$\begin{aligned}\omega_2^2(\pi/\lambda_n, f) = \sup_{|h|\leqslant\pi/\lambda_n} 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n||^2(1-\cos\lambda_n h) \geqslant \\ \geqslant \sup_{|h|\leqslant\pi/\lambda_n} 2\sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2(1-\cos\lambda_k h) \geqslant \\ \geqslant 2\sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2 - \inf_{|h|\leqslant\pi/\lambda_n} 2\sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2 \cos\lambda_k h.\end{aligned}$$

Оскільки ([1] ст. 91)

$$\inf_{|h|\leqslant\pi/\lambda_n} 2\sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2\cos\lambda_k h \leqslant 0,$$

то

$$2\sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2 \leqslant \omega_2^2(\pi/\lambda_n, f). \tag{5}$$

Використовуючи нерівність Буняковського і (5) одержимо

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n|| = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\lambda_{2^{n-1}}\leqslant|\lambda_k|<\lambda_{2^n}} ||A_k||\Big) \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum ||A_k||^2 \sum 1^2\Big)^{1/2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_2\big(\pi/\lambda_{2^{n-1}}, f\big)2^{(n-1)/2}.\end{aligned} \tag{6}$$

За критерієм Коші збіжності ряду з монотонними коефіцієнтами, збіжність останнього ряду еквівалентна збіжності ряду (4).

Наслідок. *Нехай $f : \mathbb{R}^1 \to H$ – р.м.п. функція обмеженої сильної варіації і виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{n\lambda_n}} < \infty.$$

Тоді

$$\sum_{n-1}^{\infty} ||A_n|| < \infty.$$

Доведення. Методом, аналогічним як в [2], можна отримати нерівність

$$\omega_2^2(h, f) = C\ h\omega(h, f). \tag{7}$$

Тоді

$$\forall n \qquad \frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{\sqrt{n}} \leqslant C\sqrt{\frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{n\lambda_n}}, \tag{8}$$

а звідси на підставі теореми 1 випливає доведення наслідку.

Теорема 2. *Нехай $f : \mathbb{R}^1 \to B$ – р.м.п. функція обмеженої сильної варіації, B – секвенціально слабо повний простір і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{n\lambda_n}} < \infty. \tag{8}$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ – сильно безумовно збіжний.

Доведення. Нехай $x^\star \in B^\star$, де $B^\star$ – спряжений простір. Тоді $x^\star(f) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$ – р.м.п. функція Бора з рядом Фур'є

$$x^\star(f) \sim \sum_n x^\star(A_n)\mathrm{e}^{i\lambda_n t}.$$

З рівності Парсеваля маємо

$$2\sum |x^\star(A_k)|^2 |1 - \cos\lambda_k h|^2 = \\ = M\{|x^\star(f(t+h) - f(t))|^2\} \leqslant M\{||f(t+h) - f(t)||^2\}.$$

Міркуючи аналогічно як при доведенні теореми 1, прийдемо до нерівності

$$2\sum_{|k|\geqslant n} |x^\star(A_k)|^2 \leqslant \omega_2^2(\pi/\lambda_n, f),$$

а далі з нерівностей (6) та (8) і умови (9) маємо

$$\sum_n |x^\star(A_n)| < \infty.$$

З слабої безумовної збіжності ряду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ одержимо його сильну безумовну збіжність ([3] ст. 75).

Теореми 1, 2 та наслідок є узагальненнями ознак абсолютної збіжності Саса і Зігмунда [4] для рядів Фур'є періодичних функцій. Для майже періодичних функцій $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$ вони розглядались у працях Е.А. Бредихіної [5] та Н.П.Купцова [6]. У випадку періодичних функцій $f : \mathbb{R}^1 \to B$ ці результати отримані в праці [7].

1. Притула Я.Г. *О неравенстве Джексона для B^2 - почти периодических функций* // Изв. вузов сер. матем. – 1972. – N 8 (3). – С. 9-13.
2. Притула Я.Г. *Признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций ограниченой вариации* // Укр. мат. журн. – 1981. – Т. 33, N 1. – С. 28-32.
3. Хиллс Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М., Изд. ин. лит., 1962, 829 с.
4. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М., Физ.,мат., 1961.
5. Бредихина Е.А. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций* // Док. АН СССР. – 1968. – Т. 179, N 5. – С. 1023-1026.
6. Купцов Н.П. *Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти периодических функций* // Мат. сб. – 1956. – Т. 40. – С. 157-178.
7. Kandil A.M. *Convergence of Fourier coefficients series for vector valuez functions* // Atti Accad. Naz. dei Lincei. Rend. – 1979. – Vol. 67, N 5. – C. 289-294.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.96