УДК 517.97

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В. А. Козицький

Kozitskiy V. A. On a problem of convex programming. The method of finding of a solution for one problem of convex programming in the space l_2 with the Noether operator in constrains is proposed.

У багатьох випадках розв'язання задач теорії антен [1] і теорії дискретних сигналів [2] зводиться до дослідження нескінченних алгебраїчних систем типу згортки та екстремальних задач для послідовностей. У цій праці запропоновано метод дослідження однієї задачі опуклого програмування. Розглянемо задачу на мінімум для послідовностей.

Нехай $\mathbb{U}$-банахів простір, $\mathbb{U} \subseteq l_2$, $K : \mathbb{U} \to l_2$ – нетерів оператор, $K^* : l_2 \to \mathbb{U}^*$ – спряжений оператор до K. Позначемо через $\alpha = \dim \operatorname{Ker} K$, $\beta = \dim \operatorname{Coker} K = \dim \operatorname{Ker} K^*$, $\operatorname{ind} K = \alpha - \beta$. Нехай задано послідовності $\varphi^i \in l_2$, $i = 0, \ldots, s$; $p, q \in l_2$ та числа $\delta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, s$. Символом $< \cdot, \cdot >$ позначимо скалярний добуток в l_2.

1. Розглянемо задачу відшукання послідовності $u \in \mathbb{U}$, яка задовольняє умови

$$J(u) =< \varphi^0, u > \to \inf, \tag{1}$$

$$J_i(u) =< \varphi^i, u >= \delta_i, \;\; i = 1, \ldots, s, \tag{2}$$

$$p_n \leqslant K(u)_n \leqslant q_n, \;\; n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Введемо позначення

$$K(u) = v, \;\; v \in l_2. \tag{4}$$

Рівняння (4) є рівнянням з оператором нетера K. Відомо [3], що коли $< v, \psi^i >= 0$ ($i = 1, \ldots, \beta$), де ψ^i – лінійно незалежні розв'язки рівняння $K^*(\psi) = 0$, то розв'язок рівняння (4) існує і його можна зобразити у вигляді

$$u = Av + \sum_{k=1}^{\alpha} c_k \omega_k, \tag{5}$$

де $A : l_2 \to \mathbb{U}$ – лінійний неперервний оператор; ω_k ($k = 1 \ldots, \alpha$) – лінійно незалежні розв'язки рівняння $K(\omega) = 0$; c_k – довільні дійсні числа.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 49M45.

Підставляючи (5) в (1) і (2), та враховуючи позначення (4), приходимо до еквівалентної задачі опуклого програмування знаходження послідовності $v \in l_2$ і чисел c_k $(k = 1, \ldots, \alpha)$ з умов

$$J(v) =< A^* \varphi^0, v > + \sum_{k=1}^{\alpha} c_k < \varphi^i, \omega_k > \to \inf, \tag{6}$$

$$J_i(v) =< A^* \varphi^i, v > + \sum_{k=1}^{\alpha} c_k < \varphi^i, \omega_k > -\delta_i = 0,\ i = 1, \ldots, s, \tag{7}$$

$$\tilde{J}_i(v) = < \psi^i, v >= 0,\ i = 1, \ldots, \beta, \tag{8}$$

$$p_v \leqslant v_n \leqslant q_n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

де $A^* : \mathbb{U}^* \to l_2$ – спряжений до A оператор.

Умови екстремума для задач опуклого програмування сформульовані в теоремі Куна-Такера [4, с.76], яка обгрунтовує для цих задач принцип Лагранжа. Ми розглянемо випадок, коли множник Лагранжа $\lambda_0 = 1$. Тоді функція Лагранжа задачі (6)–(9) матиме вигляд

$$L(v, \lambda, \gamma) = J(v) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i J_i(v) + \sum_{i=1}^{\beta} \gamma_i \tilde{J}_i(v).$$

Нехай $\alpha = 0$. Тоді з принципу мінімума

$$\min_{p_n \leqslant v_n \leqslant q_n,\, n \in Z} L(v, \lambda, \gamma) = L(v^*, \lambda, \gamma)$$

випливає, що

$$v_n^*(\lambda, \gamma) = \begin{cases} p_n, & (A^*\varphi^0 + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i A^* \varphi^i + \sum\limits_{i=1}^{\beta} \gamma_i \psi^i)_n > 0, \\ q_n, & (A^*\varphi^0 + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i A^* \varphi^i + \sum\limits_{i=1}^{\beta} \gamma_i \psi^i)_n \leqslant 0,\ n \in Z. \end{cases}$$

Знайдену послідовність $v^*(\lambda, \gamma)$ підставляємо в (7) та (8) і знаходимо множники Лагранжа λ_i $(i = 1, \ldots, s); \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, \beta)$. Якщо множники знайдені, то підставляючи $v^*(\lambda, \gamma)$ в (5), знаходимо розв'язок задачі (1)–(3).

Нехай $\alpha > 0$. Припустимо, що ранг матриці $B = (< \varphi^i, \omega_k >)$ дорівнює α. В іншому випадку задача (1)-(3) не матиме розв'язку. Тоді з (7) знаходимо c_k $(k = 1 \ldots, \alpha)$ і підставляємо в (6). Отримана при цьому задача матиме той самий вигляд, що і у випадку $\alpha = 0$.

2. Формулювання задачі. У просторі $\mathbb{U} = \{r, 1\} = \{u_n \in l_2 : r^n u_n \in l_2,\ r \in (0, 1)\}$

знайти послідовність $u = \{u_n\}$ з умов

$$J(u) =< \varphi, u >\to \inf, \tag{10}$$

$$J_i(u) =< \varphi^i, u >= \delta_i, \ \ i = 1, \ldots, s, \tag{11}$$

$$p_n \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}u_k + \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-n-k}u_k \leqslant q_n, \ n = 0, 1, 2, ...,$$

$$p_n \leqslant r^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k}u_k + \mu r^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{-n-k}u_k \leqslant q_n, \ n = -1, -2, ..., \tag{12}$$

де $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm 1$; $a, \{r^n b_n\} \in l_1$; $p, q \in l_2$;

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n L[a_n](t) \neq 0, \ \ b(rt) = L[r^n b_n](t) \neq 0, \ \ |t| = 1,$$

а L – оператор Лорана.

3. Дослідження задачі (10)-(12). Введемо нові невідомі послідов ності $g \in l_2$ і $h \in l_2$, $\{r^n h_n\} \in l_2$:

$$\begin{gathered} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}u_k + \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-n-k}u_k = g_n + \lambda g_{-n}, \ n = 0, 1, 2, ..., \\ r^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k}u_k + \mu r^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{-n-k}u_k = r^n h_n + \mu r^{-n} h_{-n}, \ n = -1, -2, ... \end{gathered} \tag{13}$$

З системи (13) знайдемо послідовність u через послідовності g, h. За допомогою оператора L та очевидних перетворень, система (13) набере вигляду

$$\begin{gathered} u(t) + \lambda A(t) u(t^{-1}) = g_\lambda(t), \\ u(rt) + \mu B(rt) u(rt^{-1}) = h_\mu(rt), \ \ |t| = 1, \end{gathered} \tag{14}$$

де $A(t) = a^{-1}(t)a(t^{-1})$, $B(rt) = b^{-1}(rt)b(rt^{-1}) \in \mathbb{W}(|t| = 1)$; $g_\lambda(t) = a^{-1}L[g_n + \lambda g_{-n}](t)$, $h_\mu(rt) = b^{-1}(rt)L[r^n h_n + \mu r^{-n} h_{-n}](t) \in \mathbb{L}_2(|t| = 1)$, невідома функція $u(t) \in \{\{r, 1\}\}$.

Тут $\{\{r, 1\}\}$ – простір функцій $F(z)$, голоморфних в кільці $r < |z| < 1$, для яких існує стала $c > 0$ така, що для будь-якого $s \in [r, 1]$ виконується нерівність $\int_{-\pi}^{\pi} |F(se^{i\varphi})|^2 \, d\varphi < c$; $\mathbb{W}$ – вінерівський простір функцій $A(t)$, коефіцієнти Лорана a_n яких задовольняють умову $a_n \in l_1$.

Відомо [5], що оператор L встановлює ізоморфізм між просторами $\{r, 1\}$ і $\{\{r, 1\}\}$. Систему (14) будемо розглядати як задачу Карлемана зі зворотним зсувом для області $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ [6]. Системи (13) і (14) еквівалентні, а їх розв'язки зв'язані рівністю

$$u_n = L^{-1}[u(t)]_n = (2\pi i)^{-1} \int_{|t|=1} u(t) t^{-n-1} \, dt, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Легко бачити, що виконуються тотожності:

$$\begin{gathered} A(t^{-1})g_\lambda(t) - \lambda g_\lambda(t^{-1}) \equiv 0, \qquad A(t^{-1})A(t) \equiv 1, \\ B(rt^{-1})h_\mu(rt) - \mu h_\mu(rt^{-1}) \equiv 0, \quad B(rt^{-1})B(rt) \equiv 1, \ |t| = 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Ці тотожності усувають перевизначеність задачі Карлемана.

4. Задача про стрибок. Знайдемо функцію $F(t) \in \{\{r, 1\}\}$ з умови

$$F(t) + \lambda F(t^{-1}) = S_\lambda(t), \ F(rt) + \mu F(rt^{-1}) = M_\mu(rt), \ |t| = 1, \tag{16}$$

де $\lambda = \pm 1$; $\mu = \pm 1$; $S_\lambda(t)$, $M_\mu(rt)$ – відомі функції з $\mathbb{L}_2(|t| = 1)$, які задовольняють умови

$$S_\lambda(t) - \lambda S_\lambda(t^{-1}) \equiv 0, \ M_\mu(rt) - \mu M_\mu(rt^{-1}) \equiv 0, \ |t| = 1. \tag{17}$$

Застосувавши до (16) оператор L^{-1}, отримаємо

$$\begin{gathered} f_n + \lambda f_{-n} = s_n^\lambda, \quad n = 0, 1, ..., \\ r^n f_n + \mu r^{-n} f_{-n} = m_n^\mu, \quad n = -1, -2, ... \end{gathered}$$

a) Нехай $\lambda = \mu = 1$. У цьому випадку задача (16) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_{|t|=1} S_1(t) t^{-1}\, dt = \int\limits_{|t|=1} M_1(rt) t^{-1}\, dt, \ (s_0^1 = m_0^1). \tag{18}$$

b) Якщо $\lambda = -\mu = \pm 1$, то однорідна задача (16) має тривіальний розв'язок, а неоднорідна задача має безумовний і єдиний розв'язок

$$\begin{gathered} F(t) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{rt}{\tau}\right) M_\mu(r\tau)\tau^{-1}\, d\tau + \\ +(2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{t}{\tau}\right) S_\lambda(\tau)\tau^{-1}\, d\tau, \ |t| = 1, \end{gathered} \tag{19}$$

де $\Omega(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{r^{2n}+1}$ є голоморфною в кільці $D = \{z \in \mathbb{C} : r^2 < |z| < 1\}$ функцією, граничне значення якої є узагальненою функцією. Інтеграл (19) розуміємо як границю

$$\lim_{D \ni z \to t} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{z}{\tau}\right) S(\tau)\tau^{-1}\, d\tau = \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{t}{\tau}\right) S(\tau)\tau^{-1}\, d\tau, \ |t| = 1.$$

c) У випадку $\lambda = \mu = -1$ однорідна задача (16) має один лінійно незалежний розв'язок, а неоднорідна задача має безумовний (за рахунок умови (18)) розв'язок.

Розв'язок задачі (16) для випадків **а)** і **с)** має вигляд

$$F(t) = c + (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{rt}{\tau}\right) M_\mu(r\tau)\tau^{-1}\, d\tau - \\ -(2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{t}{\tau}\right) S_\lambda(\tau)\tau^{-1}\, d\tau, \ \ |t| = 1, \tag{20}$$

де $\Omega(z) = \sum\limits_{n\neq 0} \dfrac{z^n}{r^{2n}-1}$. Для випадку **а)** $2c = s_0^1 = m_0^1$.

Зауважимо, що задачу (16) можна роз'язати в просторі $\mathbb{W}$ і формули (19),(20) залишаться ті самі.

5. Факторизація при нульовому індексі. Нагадаємо, що $A(t) \neq 0$, $B(rt) \neq 0$, $|t| = 1$; $A(t), B(rt) \in \mathbb{W}$. Нехай $\operatorname{ind} A(t) = (2\pi)^{-1}[\arg A(t)]_{|t|=1} = 0$, $\operatorname{ind} B(rt) = 0$, $|t| = 1$. Факторизацію будуємо у вигляді

$$A(t) = X(t)X^{-1}(t^{-1}), \quad B(rt) = X(rt)X^{-1}(rt^{-1}), \ \ |t| = 1,$$

де $X(z)$ – не дорівнює нулю, голоморфна всередині і неперервна у замкненій області D^+ функція, граничне значення якої належить $\mathbb{W}$. Перейдемо до логарифмів

$$\ln X(t) - \ln X(t^{-1}) = \ln A(t), \ \ \ln X(rt) - \ln X(rt^{-1}) = \ln B(rt), \ \ |t| = 1. \tag{21}$$

Відомо [7], що при зроблених припущеннях $\ln A(t), \ln B(rt) \in \mathbb{W}$. Отже, (21) є задачею про стрибок у просторі $\mathbb{W}$. Невідома функція $\ln X(t)$ знаходиться за формулою (20).

6. Факторизація коефіцієнтів при довільному індексі. Нехай $\operatorname{ind} a(t) = \varkappa_1, \operatorname{ind} b(rt) = \varkappa_2$, $|t| = 1$. Тоді $\operatorname{ind} A(t) = -2\varkappa_1$, $\operatorname{ind} B(rt) = -2\varkappa_2$, $\varkappa = -2(\varkappa_1 + \varkappa_2)$, $|t| = 1$, число $z_0 \in D^+$. Функції

$$A_0(t) = A(t)(t - z_0)^{-\varkappa/2} t^{-\varkappa_2} (t^{-1} - z_0)^{\varkappa/2} t^{-\varkappa_2},$$
$$B_0(rt) = B(rt)(rt - z_0)^{-\varkappa/2}(rt)^{-\varkappa_2}(rt^{-1} - z_0)^{\varkappa/2}(rt^{-1})^{\varkappa_2}, \ \ |t| = 1,$$

задовольняють умовам п.5. Отже,

$$A(t) = [(t - z_0)^{\varkappa/2} t^{\varkappa_2} X(t)][(t^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2} t^{-\varkappa_2} X^{-1}(t^{-1})], \\ B(rt) = [(rt - z_0)^{\varkappa/2}(rt)^{\varkappa_2} X(rt)][(rt^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2}(rt^{-1})^{-\varkappa_2}) X^{-1}(rt^{-1})]. \tag{22}$$

7. Розв'язування задачі (14). За допомогою факторизації (22) задачу (14) зведемо до вигляду (16). Розглянемо випадки, які можуть виникнути.

А) Нехай $\varkappa \geqslant 0$. Тоді в (16)

$$S_\lambda(t) = (t - z_0)^{-\varkappa/2}[t^{-\varkappa_2} X^{-1}(t) g_\lambda(t) - P_{\varkappa/2-1}(t)] - \lambda(t^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2} P_{\varkappa/2-1}(t^{-1}),$$
$$M_\mu(rt) = (rt - z_0)^{-\varkappa/2}[(rt)^{-\varkappa_2} X^{-1}(rt) h_\mu(rt) - P_{\varkappa/2-1}(rt)] - \\ -\mu(rt^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2} P_{\varkappa/2-1}(rt^{-1}), \ \ |t| = 1.$$

Якщо $\lambda = \mu = 1$, то задача (14) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова (18). З цієї умови визначається один з коефіцієнтів многочлена $P_{\varkappa/2-1}(t)$ степеня $\varkappa/2-1$. Безумовний розв'язок у $\{\{r,1\}\}$ задачі (14) має вигляд

$$u(t) = (t-z_0)^{\varkappa/2} t^{\varkappa_2} X(t)[F(t) + (t-z_0)^{-\varkappa/2} P_{\varkappa/2-1}(t)],\ |t| = 1, \tag{23}$$

де $F(t)$ визначається формулою (20) (випадок **a)**) і залежить від $\varkappa/2-1$ довільних дійсних сталих.

Якщо $\lambda = -\mu = \pm 1$, то задача (14) має безумовний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (23), де $F(t)$ задається формулою (19), який залежить від $\varkappa/2$ довільних дійсних сталих.

Якщо $\lambda = \mu = -1$, то задача (14) має безумовний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (23), де $F(t)$ задається формулою (20) (випадок **c)**), який залежить від $\varkappa/2+1$ довільних дійсних сталих.

В) Нехай $\varkappa < 0$. Тоді в (14)

$$S_\lambda(t) = (t-z_0)^{-\varkappa/2} t^{-\varkappa_2} X^{-1}(t) g_\lambda(t),$$
$$M_\mu(rt) = (rt-z_0)^{-\varkappa/2} (rt)^{-\varkappa_2} X^{-1}(rt) h_\mu(rt),\ \ |t| = 1.$$

Якщо $\lambda = \mu = 1$, то при виконані $1 - \varkappa/2$ умов

$$\begin{gathered} s_0^1 = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|t|=1} S_1(t) t^{-1}\,dt = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|t|=1} M_1(rt) t^{-1}\,dt = m_0^1, \\ \pi i (s_0^1)^{(j)} + r^j \int\limits_{|t|=1} \Omega^{(j)}\left(\frac{r z_0}{t}\right) M_\mu(rt) t^{-j-1}\,dt - \\ - \int\limits_{|t|=1} \Omega^{(j)}\left(\frac{z_0}{t}\right) S_\lambda(t) t^{-j-1}\,dt = 0,\ j = 0, \ldots, \frac{|\varkappa|}{2} - 1 \end{gathered} \tag{24}$$

задача (14) має у $\{\{r,1\}\}$ єдиний розв'язок

$$u(t) = (t-z_0)^{\varkappa/2} t^{\varkappa_2} X(t) F(t),\ |t| = 1, \tag{25}$$

де $F(t)$ задається формулою (20) (випадок a)).

Якщо $\lambda = \mu = \pm 1$, то задача (14) має єдиний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (25), де $F(t)$ задається формулою (19) при виконані $|\varkappa|/2$ умов (24); $s_0^1 = 0$.

У випадку $\lambda = \mu = -1$ задача (14) має єдиний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (25), де $F(t)$ задається формулою (20) (випадок b)) при виконані $|\varkappa|/2 - 1$ умов (24), а замість s_0^1 стоїть довільна дійсна стала.

В усіх випадках розв'язок задачі (14) не залежить від довільної точки z_0 (доведення аналогічне доведенню в [6]).

Нехай θ^- – подвоєне число від'ємних значень, яких набувають λ і μ; $K : \{r,1\} \to l_2$ – оператор, визначений лівою частиною системи (13).

Таким чином, справедлива теорема.

Теорема. *Нехай* $a(t) \neq 0$, $b(rt) \neq 0$, $|t| = 1$. *Тоді оператор* $K : \{r, 1\} \to l_2$ *нетерів і* $\alpha = \dim \operatorname{Ker} K = \max\{(\varkappa + \theta^-)/2 - 1; 0\}$, $\beta = \dim \operatorname{Coker} K = \max\{1 - (\varkappa + \theta^-)/2; 0\}$, $\operatorname{ind} K = \alpha - \beta$.

Враховуючи, що системи (13) і (14) еквівалентні, а їх розв'язки зв'язані рівністю

$$u_n = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|t|=1} u(t) t^{-n-1}\, dt, \ \ n \in \mathbb{Z},$$

де $u(t)$, в залежності від випадку, визначається формулою (23) або (25), отримуємо

$$u_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{n,m} v_m + \sum_{k=0}^{\alpha} c_k \omega_{n,k}, \ \ n \in \mathbb{Z} \tag{26}$$

і умови розв'язності

$$< v, \psi_k >= 0, \ \ k = 1, \ldots, \beta. \tag{27}$$

У рівностях (26),(27) $\{w_{n,m}\}$, $\{\omega_{n,k}\}$, $\psi_k \, (k = 1, \ldots, \beta)$ – відомі послідовності, $c_k \, (k = 1 \ldots, \alpha)$ – довільні дійсні сталі,

$$v_m = \begin{cases} g_m^\lambda, & m = 0, 1, 2, ... \\ h_m^\mu, & m = -1, -2, ..., \end{cases}$$

$g_m^\lambda = g_m + \lambda g_{-m}$, $h_m^\mu = r^m h_m + \mu r^{-m} h_{-m}$.
Наприклад, якщо $\alpha = 0$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, то

$$w_{n,m} = \begin{cases} \omega_{n,m}^1 + \omega_{n,-m}^1, & m = 1, 2, ..., \\ \omega_{n,0}^1, & m = 0, \\ \omega_{n,m}^2 - \omega_{n,-m}^2, & m = -1, -2, ..., \end{cases}$$

$$\omega_{n,m}^1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{y_{n-k} A_{k-m}}{r^{2k} + 1}, \ \ y_n = L^{-1}[t^{\varkappa_2} X(t)]_n,$$

$$A_n = L^{-1}[t^{-\varkappa_2} X^{-1}(t) a^{-1}(t)]_n, \ \omega_{n,m}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^k y_{n-k} B_{k-m}}{r^{2k} + 1},$$

$$B_n = L^{-1}[(rt)^{-\varkappa_2} X^{-1}(rt) b^{-1}(rt)]_n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Далі дослідження задачі (10)-(12) проводиться за схемою п.1.

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свёртки. – М., Наука,1978. – 275 с.

2. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – М., Наука, 1974. – 475 с.

3. Крейн М. Г. *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов*// Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 13, N 5. – С. 3-120.

4. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегальние уравнения со сдвигом.– М.,Наука,1977. – 448 с.

5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М., Наука,1968. – 511 с.

6. Рабинер Л.,Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.– М.,Мир, 1978. – 448 с.

7. Рогожин В. С. Теория операторов нетера. – Ростов, Изд. Ростовского у-та, 1973. – 81 с.

8. Чаплин А. Ф. *Теория эквидистантных решеток с периодически меняющимися параметрами излучателей* //Сб. "Волны и дифракция". – 1981. – С. 105-110.

Стаття надійшла до редколегії 9.02.94