УДК 515.12

КОНСТРУКЦІЯ ГАРТМАНА-МИЦЄЛЬСЬКОГО В КАТЕГОРІЇ k_ω-ПРОСТОРІВ

Є. Я. Пенцак

Pentsak E. Y. Hartman-Mycielski construction in the category of k_ω-spaces. For a k_ω-space X we endow the Hartman-Mycielski construction $HM(X)$ with a k_ω-topology. This topology is described completely for certain "nice" strongly countable dimensional k_ω-spaces.

1. Нехай (X,d) - метричний компакт і $n \in \mathbb{N}$. Через $HM_n(X)$ позначимо множину відображень $\alpha : [0;1] \to X$, що задовольняють умову: існує розбиття $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1$ відрізка $[0;1]$ таке, що α є сталою на кожному з півінтервалів $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, i-1$. Множину $HM_n(X)$ наділямо метрикою $\widehat{d}$: $\widehat{d}(\alpha, \beta) = \int_0^1 d(\alpha(t), \beta(t))dt$. Зауважимо, що такий вигляд метрики дозволяє ігнорувати значення відображення α на скінченній підмножині відрізка $[0;1]$.

Простір $HM(X) = \cup_{n=1}^{\infty} HM_n(X)$ фактично введений Гартманом і Мицельським в [1] і застосований до задачі вкладення топологічних груп у зв'язні топологічні групи.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через Δ^n n-вимірний симплекс

$$\Delta^n = \left\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \lambda_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n+1, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що відображення $q_n : \Delta^{n-1} \times X^n \to HM_n(X)$, визначене умовою $q_n((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (x_1, \ldots, x_n))(t) = x_i$, якщо $i = \min\{j | t \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j\}$, є неперервним і сюр'єктивним. Звідси випливає, що $HM_n(X)$ є метризовним компактом і що топологія на $HM_n(X)$ не залежить від конкретного вибору сумісної метрики на X.

Для кожного неперервного відображення $f : X \to Y$, де X, Y - метризовні компакти, означимо відображення $HM_n(f) : HM_n(X) \to HM_n(Y)$ формулою $HM_n(f)(\alpha) = f \circ \alpha$. Очевидно, що HM_n є функтором в категорії $MComp$ метризовних компактів.

Надалі ми використовуватимемо термінологію теорії функторів у топологічних категоріях з [2].

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54B30; Secondary 54F45.

© Є. Я. Пенцак, 1997

Твердження 1. *HM_n є неперервним мономорфним функтором степеня n, що зберігає перетини.*

Доведення. Властивості мономорфності та збереження перетинів перевіряються безпосередньо; ці властивості дають змогу означити для функтора HM_n поняття носія supp. За означенням, для кожного $\alpha \in HM_n(X)$ маємо $\mathrm{supp}(\alpha) = \{x \in X | \alpha^{-1}(x)$ містить невироджений півінтервал $\}$. Очевидно, що $|\mathrm{supp}(\alpha)| \leqslant n$ для кожного α, а тому степінь функтора HM_n дорівнює n.

Неперервність функтора HM_n може бути перевірена стандартними міркуваннями.

Твердження 2. *Для кожного метризовного ANR-компакта (відповідно, AR-компакта) X простір $HM_n(X)$ є ANR-компактом (відповідно, AR-компактом).*

Доведення. Доведення випливає з загального результату В.Басманова [3] про збереження функторами класів $A(N)R$-компактів, твердження 1 і з того факту, що $HM_n(n) \in ANR$ (останній факт є наслідком того, що $HM_n(n)$ є CW-комплексом).

Нагадаємо, що метричний простір називається зліченновимірним, якщо він є об'єднанням зліченної сім'ї скінченновимірних підпросторів.

Твердження 3. *Функтор HM_n зберігає клас зліченновимірних метризовних компактів.*

Доведення. Нехай X - зліченновимірний метричний компакт, $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, де всі X_i є скінченновимірними просторами та $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$. Для кожного $i \in \mathbb{N}$ нехай

$$\Delta_i^n = \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \Delta^n | \lambda_j \geqslant \frac{1}{i} \text{ для всіх } j = 1, \ldots, n+1\right\}.$$

Легко бачити, що відображення $q_n|\Delta_i^{n-1} \times X_j^n$ є вкладенням для кожних $i, j \in \mathbb{N}$, а тому $HM_n(X) = \cup_{k=1}^{n} \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} q_k(\Delta_i^{k-1} \times X_j^n)$ – зліченновимірний простір.

2. Нехай $X = \varinjlim X_i$, де X_i – метричні компакти. Приймемо $HM_\infty(X) = \varinjlim HM_i(X_i)$. Легко бачити, що топологія простору $HM_\infty(X)$ не залежить від конкретного вибору послідовності $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X$. Простір $HM_\infty(X)$ називатимемо модифікованою конструкцією Гартмана-Мицельського.

Ми використовуємо стандартне позначення ind для трансфінітного розширення вимірності Менгера-Урисона (див. [4]). Нехай $\mathcal{C}(\alpha) = \{X -$ метризовний компакт, $\mathrm{ind}\, X < \alpha\}$ і $\mathcal{C}(\alpha)^\infty = \{X = \varinjlim X_i \mid X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ і $X_i \in \mathcal{C}(\alpha)$ для всіх $i\}$. Простір $X \in \mathcal{C}(\alpha)^\infty$ називається сильно $\mathcal{C}(\alpha)$- універсальним, якщо для кожної пари (A, B), де $A \in \mathcal{C}(\alpha)$, і кожного вкладення $f : B \to X$ існує вкладення $g : A \to X$ таке, що $g|B = f$.

Автор довів, що для кожного зліченного ординала β існує зліченний ординал $\alpha \geqslant \beta$ і сильно $\mathcal{C}(\alpha)$-універсальний простір I_α; нижче ми будемо використовувати властивості простору I_α, доведені в [5].

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема. *Простір $HM_\infty(I_\alpha)$ є гомеоморфний I_α.*

Доведення. Нагадаємо, що $\mathrm{ind}\, X$ означене для метричного компакта X, якщо і тільки якщо X є зліченновимірним [4]. Тому з твердження 3 і властивостей простору I_α випливає, що $HM_\infty(I_\alpha) \in \mathcal{C}(\alpha)^\infty$. Нам залишається довести сильну $\mathcal{C}(\alpha)$-універсальність простору $HM_\infty(I_\alpha)$.

Зауважимо, що $I_\alpha = \varinjlim X_i$, де $X_i \in \mathcal{C}(\alpha)$ і $X_i \in AR$. Нехай $B \subset A$, $A, B \in \mathcal{C}(\alpha)$ і $f : B \to HM_\infty(I_\alpha)$ - вкладення. Оскільки $HM_n(X_n)$ є стягуваний ANR в $HM_{2n}(X_n) \subset HM_{2n}(X_{2n})$; відповідне стягування $Q : HM_n(X_n) \times HM_n(X_n) \to HM_{2n}(X_n)$ можна задати формулою

$$Q(f,g)(t)(x) = \begin{cases} g(x), & \text{якщо } x < t, \\ f(x), & \text{якщо } x \geqslant t, \end{cases}$$

то кожне відображення $f : B \to HM_n(X_n)$ можна неперервно продовжити до відображення $g : A \to HM_{2n}(X_{2n})$, де B є замкненою підмножиною метризовного простору A (див. [6]). А отже, $HM_\infty(I_\alpha) \in AE$. Нехай тепер $\overline{f} : A \to HM_\infty(I_\alpha)$ - неперервне продовження відображення f. За компактністю простору A маємо $\overline{f}(A) \subset HM_n(X_n)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Нехай $i : A \to X_m$ - таке вкладення, що $i(A) \subset X_m \backslash X_n$ для деякого $m > n$.

Існує неперервна функція $\phi : A \to [0;1]$, для якої $\phi^{-1}(0) = B$. Означимо відображення $F : A \to HM_\infty(I_\alpha)$ формулою :

$$F(a)(t) = \begin{cases} i(a), & \text{якщо } t > \phi(a), \\ \overline{f}(a)(t), & \text{якщо } t \leqslant \phi(a). \end{cases}$$

Легко бачити, що відображення F є вкладенням і $F|B = f$.

Функторіальність конструкції HM_∞ дозволяє сформулювати наступну задачу: чи відображення $HM_\infty(pr_1)$ гомеоморфне pr_1 (через pr_1 позначено відображення проектування простору $I_\alpha \times I_\alpha$ на перший співмножник) ?

1. Hartman S., Mycielski J. *On the embedding of topological groups into connected topological groups*// Colloq. Math. – 1958. – Vol.5. – P. 166-169.
2. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад у категорії компактів.– К., ІСДО, 1993.
3. Басманов В.Н. *Ковариантные функторы, ретракты и размерность*// Докл. Акад. Наук СССР. – 1983. – Т.271. – С. 1033-1036.
4. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М., Наука, 1973.
5. Pentsak E., Zarichnyi M. *On strongly universal k_ω-spaces related to transfinite inductive and cohomological dimension*// Methods Func. Anal. Top. – 1996. – Vol. 3.
6. Борсук К. Теория ретрактов. - М., Мир , 1971.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.96