

УДК 539.3

**ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ ПЛОСКИХ
ТІЛ НЕПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

І. І. Дияк, Ю. А. КУХАРЧУК, Г. Т. СУЛИМ

Dyyak I. I., Kuharchuk Y. A., Sulym G. T. The investigation of a plane body elastic equilibrium by the indirect boundary element method. The computer program of the indirect boundary element method realization for solving boundary integral equations of plane linear elastostatic problem is designed. The method of forked nodes for investigation of stress-strain state of plane bodies with angular points are used. The problem of calculation of singular integrals at the forked nodes is discussed. The numerical results obtained by computer program based at the collocation and Galerkin approximations are compared.

Метою даної праці є чисельна реалізація на ЕОМ непрямого методу граничних елементів для розв'язування граничних інтегральних рівнянь двовимірної задачі лінійної теорії пружності. Дано порівняння результатів роботи програм написаних на мові PASCAL, які реалізують МГЕ на основі методів Бубнова-Гальоркіна і колокацій.

Розглянуто задачу про плоску деформацію ізотропного однорідного пружного тіла з поперечним перерізом $S \subset R^2$. Напружено-деформований стан тіла в області S описується співвідношеннями лінійної теорії пружності в переміщеннях [1]

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \psi_i = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Тут u_1 і u_2 – компоненти вектора переміщення точок тіла в декартовій системі координат x_1, x_2 ; ψ_1, ψ_2 – компоненти вектора масових сил; λ і μ – сталі Ляме, що пов'язані з модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона ν співвідношеннями $\lambda = E\nu / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $\mu = E / (2(1 + \nu))$.

До розв'язування задач теорії пружності широко застосовуються прямий, непрямий методи граничних елементів (ПМГЕ, НМГЕ) [2,3] та метод гіперсингулярних елементів [4]. Перші два підходи базуються на використанні фундаментального розв'язку $G_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}) =$

$C_1 (C_2 \delta_{ij} \ln(r) - y_i y_j / r^2) + A_{ij}$ диференціальних рівнянь Ляме, який визначає поле переміщень $\vec{u}$ в точці $\vec{x} = (x_1, x_2)$ від одиничної зосередженої сили $\vec{e} = (e_1, e_2)$, прикладеної у точці $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ [2]

$$u_i(\vec{x}) = G_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_j(\vec{\xi}), \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

де $C_1 = -1/(8\pi\mu(1-\nu))$, $C_2 = 3 - 4\nu$, $\vec{r} = \vec{x} - \vec{\xi}$, $r^2 = r_k r_k$, A_{ij} – компоненти довільного сталого тензора $\hat{A}$, які можна визначити з умови рівності нулю переміщень у деякій обраній точці $\vec{r}_0$.

Тоді компоненти вектора напружень, тензорів напружень і деформацій мають вигляд [2]:

$$\begin{aligned} t_i(\vec{x}) &= \sigma_{ij}(\vec{x}) n_j(\vec{x}) = F_{ik}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_k(\vec{\xi}), \\ \varepsilon_{ij}(\vec{x}) &= B_{ijk}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_k(\vec{\xi}), \quad \sigma_{ij}(\vec{x}) = T_{ijk}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_k(\vec{\xi}), \quad i, j, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Нормальні і дотичні компоненти векторів переміщення і напруження в точці $\vec{x}$ площинки з нормаллю $\vec{n}(\vec{x}) = (n_1(\vec{x}), n_2(\vec{x}))$ і дотичною $\vec{\tau}(\vec{x}) = (\tau_1(\vec{x}), \tau_2(\vec{x})) = (-n_2(\vec{x}), n_1(\vec{x}))$

$$\begin{aligned} u_n(\vec{x}) &= G_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_j(\vec{\xi}), \quad u_\tau(\vec{x}) = G_{\tau j}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_j(\vec{\xi}), \\ t_n(\vec{x}) &= F_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_j(\vec{\xi}), \quad t_\tau(\vec{x}) = F_{\tau j}(\vec{x}, \vec{\xi}) e_j(\vec{\xi}), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} G_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi}) &= C_1 (C_2 n_j \ln(r) - r_j (n_i r_i) / r^2) + A_{nj}, \\ G_{\tau j}(\vec{x}, \vec{\xi}) &= C_1 (C_2 \tau_j \ln(r) - r_j (\tau_i r_i) / r^2) + A_{\tau j}, \\ F_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi}) &= C_3 / r^2 (2(C_4 n_j + r_j (n_i r_i) / r^2) n_i r_i, \\ F_{\tau j}(\vec{x}, \vec{\xi}) &= C_3 / r^2 (C_4 n_j (\tau_i r_i) + (C_4 \tau_j + 2r_j (\tau_i r_i) / r^2) n_i r_i). \end{aligned}$$

Компоненти векторів зміщень $\vec{u}$ і напружень в довільній внутрішній точці $\vec{x}$, зумовлених дією поверхневих $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ і відомого розподілу об'ємних сил $\vec{\psi}(\vec{z})$, отримують згортокою

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}) &= \int_L G_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}) \varphi(\vec{\xi}) dL(\vec{\xi}) + \int_S G_{ij}(\vec{x}, \vec{z}) \psi(\vec{z}) dS(\vec{z}) + C_i, \\ t_i(\vec{x}) &= \int_L F_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}) \varphi(\vec{\xi}) dL(\vec{\xi}) + \int_S F_{ij}(\vec{x}, \vec{z}) \psi(\vec{z}) dS(\vec{z}), \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Трансляційну складову C_i визначають компоненти тензора $\hat{A}$. Аналогічні вирази справедливі для тензорів $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\sigma}$ і вектора напружень $\vec{t}$. Побудовані вирази задовольняють у S умовам рівноваги, сумісності і єдиності [2].

Важливо відзначити, що функції G_{ij} , G_{nj} , $G_{\tau j}$, B_{ijk} , T_{ijk} , F_{ik} , F_{nk} і $F_{\tau j}$ є сингулярними у точці $\vec{x} = \vec{\xi}$ (перші три мають логарифмічну $\ln \vec{r}$, а інші – сильну особливість $1/r$). Інтеграли, що містять G_{ij} , G_{nj} , $G_{\tau j}$, існують як невластиві, а для інтегралів від функцій із сильною особливістю слід окремо вказати метод обчислення їхніх граничних значень під час $\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}$.

З прямуванням $\vec{x}$ до поверхні L тіла, переміщення (4) змінюються неперервно. Однак вектор напружень $\vec{t}_n$ і тензори $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ на L у строгому розумінні не визначені. Використо-

вуючи методи теорії потенціалу [3], отримаємо

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}_0) &= \int_L G_{ij}(\vec{x}_0, \vec{\xi}) \varphi_j(\vec{\xi}) dL(\vec{\xi}) + \int_S G_{ij}(\vec{x}_0, \vec{z}) \psi_j(\vec{z}) dS(\vec{z}) + C_i, \\ t_i(\vec{x}_0) &= \pm \mu_{ij} \varphi_j(\vec{x}_0) + v.p. \int_L F_{ij}(\vec{x}_0, \vec{\xi}) \varphi_j(\vec{\xi}) dL(\vec{\xi}) + \int_S G_{ij}(\vec{x}_0, \vec{z}) \psi_j(\vec{z}) dS(\vec{z}), \\ \mu_{11} &= -C_3(C_4 + 1)\theta - C_3 \sin(2\theta)/2, \quad \mu_{22} = -C_3(C_4 + 1)\theta + C_3 \sin(2\theta)/2, \\ \mu_{12} &= \mu_{21} = C_3 (\cos(2\theta) - 1)/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут θ – зовнішній кут між односторонніми дотичними в точці $\vec{x}_0$. Зокрема, якщо у $\vec{x}_0$ границя гладка, то $\theta = \pi$ і $\mu_{11} = \mu_{22} = 1/2$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$. Знак обирається залежно від типу задачі (внутрішня (+) чи зовнішня (–)).

При заданих граничних умовах вирази (5) породжують систему сингулярних інтегральних рівнянь.

Загалом, за ненульових об'ємних сил область інтегрування S розбивають на підобласті (елементи). Однак інтегрування по S не впливає на розмір визначальної системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) НМГЕ, хоча і вимагає певного часу. Проте у випадках гравітаційного, відцентрового навантаження, зумовленого обертанням довкола нерухомої осі можна за допомогою формули Гаусса-Остроградського замінити інтеграл по S еквівалентним граничним інтегралом [5–7].

Подекуди вдається підібрати частковий розв'язок, що відповідає заданим об'ємним силам, скажімо, у вигляді полінома [8]. Тому надалі для більшої стислості викладу масові сили не враховуємо.

Для обчислення криволінійних інтегралів лінію L розіб'ємо точками множини $X_1 = \{\vec{x}^{i,1} : i = 1 \dots N\}$ на N дуг L_i (граничних елементів) $L = \cup_{i=1}^N L_i$. Нерегулярні точки границі (кутові, стрибкової зміни умов навантаження та типу граничних умов) не можуть бути внутрішніми точками граничних елементів. На i -му елементі оберемо n вузлових точок $\vec{x}^{i,p}$ ($p = 1 \dots n$), які занумеровані в напрямку обходу кривої L , причому $x_j^{i,n} = x_j^{i+1,1}$ ($n = 1 \dots N - 1$), $x_j^{N,n} = x_j^{1,1}$. Множину всіх вузлових точок кривої L позначимо X . Криві L_i та L апроксимуються за допомогою параметрично заданих дуги $\tilde{L}_i$ та кривої $\tilde{L}$ відповідно

$$L_i \sim \tilde{L}_i = \left\{ (\xi_1^i, \xi_2^i) : \xi_j^i(t) = \sum_{p=1}^N x_j^{i,p} N^p(t), \quad t \in [-1, 1] \right\}, \quad L \sim \tilde{L} = \bigcup_{i=1}^N L_i, \quad (6)$$

де $\{N^p(t)\}$ – многочлени Лагранжа, визначені на відрізку $[-1, 1]$.

Елемент $d\tilde{L}_i(t)$ дуги $\tilde{L}$ визначає формула

$$dL_i(\vec{\xi}(t)) = \sqrt{\xi_j^{i'}(t) \xi_j^{i'}(t)} dt = J_i(t) dt, \quad \xi_j^{i'}(t) = \sum_{p=1}^N x_j^{i,p} N^{p'}(t), \quad (7)$$

і з урахуванням (6), (7), співвідношення (5) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}_0) &= \sum_{q=1}^N \int_{-1}^1 G_{ij}(\vec{x}_0, \vec{\xi}^q(t)) \varphi_j(\vec{\xi}^q(t)) J_q(t) dt, \\ t_i(\vec{x}_0) &= \pm \mu_{ij} \varphi_j(\vec{x}_0) + \sum_{q=1}^N \int_{-1}^1 F_{ij}(\vec{x}_0, \vec{\xi}^q(t)) \varphi_j(\vec{\xi}^q(t)) J_q(t) dt, \\ \vec{\xi}^q(t) &\in L_q, \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для дискретного подання граничних інтегральних рівнянь (8) апроксимуємо невідому функцію $\varphi_i(\xi)$ на елементі L_q функцією

$$\tilde{\varphi}_i(\xi^q(t)) = \sum_{l=1}^N \sum_{p=1}^n \varphi_i^{l,p} N^p(t) \delta_{ql} = \sum_{p=1}^n \varphi_i^{q,p} N^p(t), \quad \varphi_i^{q,p} = \varphi_i(\bar{x}^{q,p}). \quad (9)$$

Якщо остання точка $\bar{x}^{q,n}$, $q = 1 \dots N$ елементу є регулярною, то

$$\varphi_i^{q,n} = \varphi_i^{q+1,1} \quad (10)$$

(надалі вважаємо, що $\tilde{\varphi}^{N+1,p} \sim \tilde{\varphi}^{1,p}$).

Підставляючи вирази (9) в рівняння (8), одержимо вирази для їхніх нев'язок

$$\begin{aligned} r_i^u(\bar{x}_0(t)) &= \sum_{q=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 G_{ij}(\bar{x}_0, \xi^q(t)) \varphi_j^{q,k} N^k(t) J_q(t) dt - u_i(\bar{x}_0(t)), \\ r_i^t(\bar{x}_0(t)) &= \pm \mu_{ik} \varphi_k(\bar{x}_0(t)) + \sum_{q=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 F_{ij}(\bar{x}_0, \xi^q(t)) \varphi_j^{q,k} N^k(t) J_q(t) dt - t_i(\bar{x}_0(t)). \end{aligned}$$

Найчастіше інтегральні рівняння розв'язують методом точкової коллокації, вимагаючи їх справдження на певній множині точок. Стосовно рівнянь (8) нею буде множина X . Це рівносильне умові $r_i^u(\bar{x}^{p,r}) = 0$, $r_i^t(\bar{x}^{p,r}) = 0$ ($p = 1 \dots N$, $r = 1 \dots n$), яка з урахуванням (10) дає СЛАР

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \varphi_j^{q,k} \int_{-1}^1 G_{ij}(\bar{x}^{p,r}, \xi^q(t)) N^k(t) J_q(t) dt - u_i(\bar{x}^{p,r}) &= 0, \\ \pm \mu_{ik} \varphi_k(\bar{x}^{p,r}) + \sum_{q=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \varphi_j^{q,k} \int_{-1}^1 F_{ij}(\bar{x}^{p,r}, \xi^q(t)) N^k(t) J_q(t) dt - t_i(\bar{x}^{p,r}) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$\varphi_i^{q,n} = \varphi_i^{q+1,1}$ якщо $\bar{x}^{q,n}$ – регулярна $q = 1 \dots N$

Застосування до системи (8) процедури Бубнова-Гальоркіна [9] породжує іншу СЛАР

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \varphi_j^{q,k} \int_{-1}^1 N^r(\eta) \int_{-1}^1 G_{ij}(\bar{x}^p(\eta), \xi^q(t)) N^k(t) J_q(t) J_p(\eta) dt d\eta - \\ - \int_{-1}^1 N^r(\eta) u_i(\bar{x}^p(\eta)) J_p(\eta) d\eta = 0, \\ \pm \int_{-1}^1 N^r(\eta) \mu_{ik} \varphi_k(\bar{x}^p(\eta)) J_p(\eta) d\eta + \sum_{q=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \varphi_j^{q,k} \int_{-1}^1 N^r(\eta) \int_{-1}^1 F_{ij}(\bar{x}^p(\eta), \xi^q(t)) \times \\ \times N^k(t) J_q(t) J_p(\eta) dt d\eta - \int_{-1}^1 N^r(\eta) t_i(\bar{x}^p(\eta)) J_p(\eta) d\eta = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$\varphi_i^{q,n} = \varphi_i^{q+1,1}$ якщо $\bar{x}^{q,n}$ – регулярна $q = 1 \dots N$.

Всі граничні інтеграли, потрібні для обчислення коефіцієнтів позадіагональних блоків матриць СЛАР (11) чи (12) обчислюють за стандартними формулами чисельного інтегрування. У діагональних блоках матриць точка спостереження належить проміжку інтегрування, тому всі вони містять сингулярні інтеграли. Для їх обчислення застосуємо

два способи: з виділенням особливості і без нього. В обох випадках наприкінці використовуються стандартні квадратурні формули Гаусса. Інтеграли зі слабкою (типу $\ln(r)$) особливістю, які містять перші групи рівнянь (11),(12) можна обчислювати за допомогою формул Гаусса, поділивши дугу S_i особливою точкою (якщо точка не збігається з її кінцями) на дві.

Замінивши інтегрування по дузі $\tilde{L}_p$ інтегрування по параметру t , обчислення інтегралів

$$I_{ij}^{plm} \equiv \int_{L_p} F_{ij}(\vec{x}^{p,m}, \vec{\xi}) N^l dL(\xi) = \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad f(t) = F_{ij}(\vec{x}^{p,m}, \vec{\xi}^p(t)) N^l(t) J_p(t)$$

проводиться аналогічно, оскільки при введеній параметризації $N^m(t_l) = 0$ ($m \neq l$), і підінтегральна функція обмежена на відрізьку $[-1, 1]$.

Якщо ж $m = l$, то $N^m(t_m) = 1$ і інтеграл I_{ij}^{pmm} існує лише в сенсі головного значення. Тоді вважатимемо вузол $\vec{x}^{p,m} = \vec{\xi}^m(t_m)$ регулярною внутрішньою точкою L . Якщо він є на межі дуг, то для їхнього об'єднання цей вузол стане внутрішнім. У цьому випадку $\tilde{L}_p \sim \tilde{L}_p \cup \tilde{L}_{p+1}$ або $\tilde{L}_p \sim \tilde{L}_{p-1} \cup \tilde{L}_p$ і параметризація дуги відповідно змінюється. Тепер

$$I_{ij}^{pmm} \equiv v.p. \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^{t_m-\varepsilon} f(t) dt + \int_{t_m+\varepsilon}^1 f(t) dt + v.p. \int_{t_m-\varepsilon}^{t_m+\varepsilon} f(t) dt \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Перший і другий інтеграли I_1, I_2 не містять особливості і можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул.

Для обчислення I_3 підінтегральну функцію в околі точки t_m подамо у вигляді $f(t) = g(t)/(t - t_m)$, коли g гладка в околі точки t_m функція, властивості якої повністю залежать від геометрії кривої L_p в околі (можливо проколотому) точки t_m і від властивостей функцій $\{N^l\}$. Якщо розвинути її в околі точки t_m в ряд Тейлора $g(t) = g(t_m) + g'(t_m)(t - t_m) + O((t - t_m)^2)$, то

$$I_3 = 2\varepsilon g'(t_m) + O(\varepsilon^2).$$

Тому для достатньо малого ε можна вважати, що

$$I_{ij}^{pmm} \equiv v.p. \int_{-1}^1 f(t) dt \approx \int_{-1}^{t_m-\varepsilon} f(t) dt + \int_{t_m+\varepsilon}^1 f(t) dt.$$

Коли вузол $\vec{x}^{p,m}$, $m = n$ ($m = 1$) є нерегулярним, то згідно з методикою подвоєння вузлів [3] вважаємо, що $\varphi_j^{p,n} \neq \varphi_j^{p+1,1}$. Інтегрування здійснюємо так, ніби межа області в його околі є гладкою (хоча це може бути і кутова точка). Тоді можна вважати, що

$$I_{ij}^{pnn} \approx \int_{-1+\varepsilon}^1 F_{ij}(\vec{x}^{p,n}, \vec{\xi}^p(t)) N^n(t) J_p(t) dt,$$

де ϵ достатньо мале число.

Вищеописаний алгоритм реалізований у вигляді програмного комплексу для ПЕОМ типу IBM PC/AT на Турбо Паскалі і апробований на низці прикладів.

Розглянемо плоску деформацію жорстко зашцефленого по $AD = a$ та рівномірно навантаженого по $AB = 2a$ нескінченного в напрямку осі Ox_3 бруса прямокутного перерізу (рис.1а). Коефіцієнт Пуассона матеріалу $\nu = 0.3$. Граничні умови у даному випадку записуються:

$$t_n|_{AB} = -p, \quad t_n|_{BCD} = 0, \quad t_\tau|_{BCD} = 0, \quad u_n|_{AB} = 0, \quad u_\tau|_{AB} = 0.$$

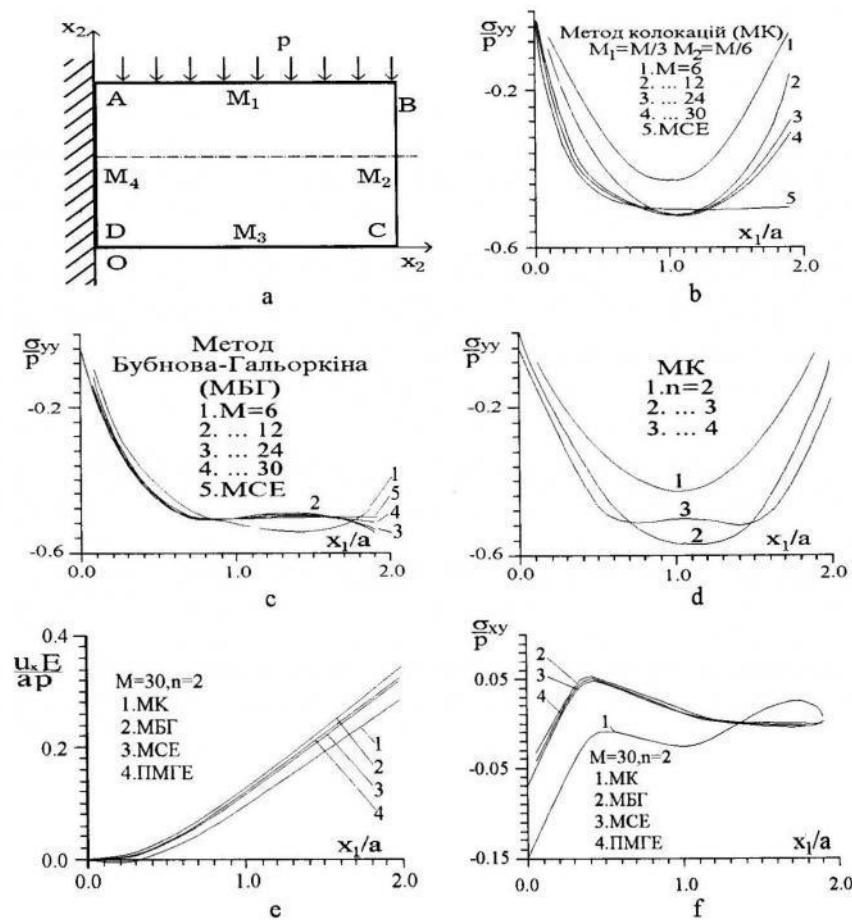


Рис. 1

Напружено-деформований стан тіла досліджуємо НМГЕ на основі методів Бубнова-Гальоркіна (МБГ) та колокацій (МК), ізопараметричних лінійних, квадратичних та кубічних апроксимацій. Зовнішні та внутрішні інтеграли МБГ обчислюються квадратурними формулами 10-го та 3-го порядків відповідно.

Збіжність застосованих методик залежно від кількості M граничних елементів (ГЕ) та порядку використаних апроксимацій ілюструють рис.1b-1d.

На рис.1b,c зображена зміна $\sigma_{yy}(x_1, a/2)/p$ уздовж осі балки, отримана з використанням МК (рис.1b) та МБГ (рис.1c) за різних значень M , що визначається кількістю елементів $M_1 = M/3$ на кожній із сторін AB, CD та $M_2 = M/6$ на сторонах AD та BC . Крива 5 відповідає МСЕ-розв'язку з вибором ізопараметричних апроксимацій на чотирикутних елементах з вісьмома вузлами на сітці 4×10 . Зі збільшенням кількості ГЕ розв'язок МБГ швидко наближається до розв'язку МСЕ. Помітно, що МБГ-розв'язок збігається швидше ніж МК-розв'язок.

На рис.1d зіставлені значення $\sigma_{yy}(x_1, a/2)/p$, отримані при $M = 6$ (2×1) за різного порядку $n - 1$ використовуваних апроксимацій. Згідно з рис.1b і 1d, збільшення n є ефективнішим від збільшення кількості M граничних елементів.

Рисунки 1e і 1f стосуються зміни u_x/a і σ_{xx}/p на осі балки, отримані за МБГ-розв'язком (крива 1) і МК-розв'язком (крива 2) за $M = 30$. Для порівняння зображені МСЕ-розв'язки (крива 3) та ПМБГ-розв'язок на підставі МБГ за лінійних ізопараметричних апроксимацій та порядку квадратурних формул Гауса під час обчислення внутрішніх інтегралів – 10, зовнішніх – 3.

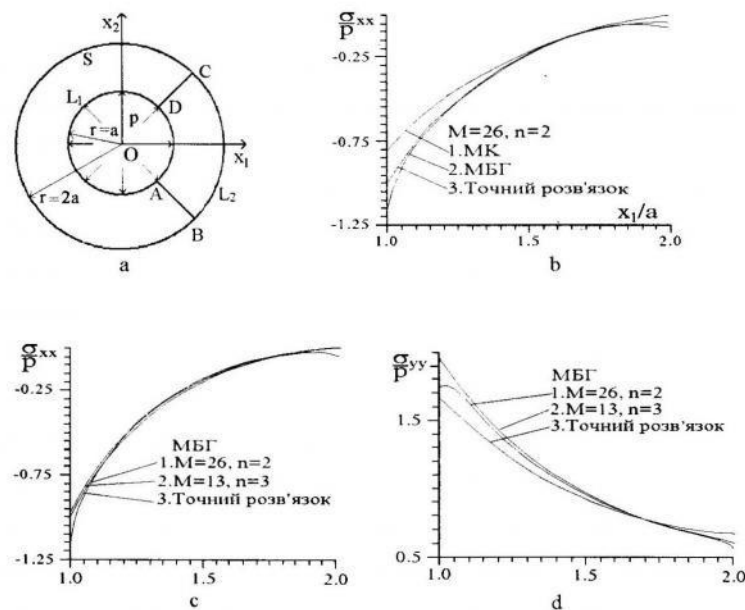


Рис. 2

Помітно, що результати, отримані МСЕ, ПМБГ і НМБГ з використанням МБГ досить добре узгоджуються і є близькими до реальних. Дещо гірший результат дає НМБГ з використанням МК. Загалом, МБГ дає кращі результати, ніж метод точкової колокації. Другий приклад для задачі Ляме – визначення напружено-деформованого стану циліндра (рис.2a) під дією тиску p . Зовнішня поверхня L_2 циліндра вільна від навантаження.

Коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Граничні умови задачі:

$$t_n|_{L_1} = -p, \quad t_n|_{L_2} = 0, \quad t_\tau|_{L_1 \cup L_2} = 0.$$

Задача розв'язувалась НМГЕ за допомогою МБГ і МК з використанням ізопараметричних апроксимацій першого ($n=2$) і другого ($n=3$) порядків. За область дослідження вибрана частина ABCD кільця.

На рис. 2б зображені значення σ_{xx}/p , отримані за допомогою МБГ (крива 2) і МК (крива 1) з використанням 26-ти граничних елементів (по 4 на AB і DC , 6 на AD і 12 на CB) при $n = 2$. Помітно, що МБГ дає результати ближчі до точних [1] (криві 3), ніж МК.

На рис. 2с,д криві 1 відповідають розв'язкам, отриманим при $n = 2$ і 26-ти граничних елементах; криві 2 – при $n = 3$ і 13-ти елементах; криві 3 – графік точного розв'язку. Обидва наближені розв'язки дуже добре узгоджуються з точним.

Як і у випадку бруса для методу колокацій (рис. 1б,с) підвищення порядку апроксимації є ефективнішим від збільшення кількості граничних елементів. Схему НМГЕ застосуємо також до розв'язування задачі про напружено-деформований стан тонкої квадратної пластинки з еліптичним вирізом, яка перебуває під дією рівномірно розподілених розтягуючих зусиль інтенсивності p (рис.3). Відповідні граничні умови запишемо: $t_n|_{A'B \cup D'C} = p$, $t_n|_{DA' \cup BC} = 0$, $t_\tau|_{L_2} = 0$.

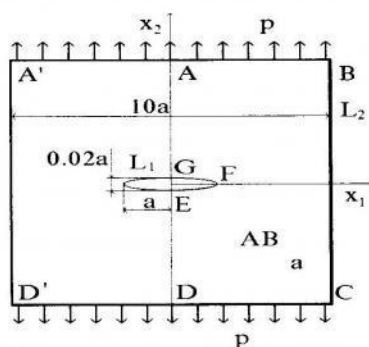


Рис. 3

Напружено-деформований стан пластинки у двох випадках граничних умов на поверхні вирізу а) $t_n|_{L_1} = 0$, $t_\tau|_{L_1} = 0$, (вільний отвір), б) $u_n|_{L_1} = 0$, $u_\tau|_{L_1} = 0$, (жорстке включення), досліджувався з використанням формулювань МБГ. За область дослідження вибрати частину

ABCEFG. На рис. 4а,б і 4с,д зображені графіки значень σ_{xx}/p , σ_{yy}/p , для задач а і б відповідно. Криві 1 і 2 відповідають числовим розв'язкам, отриманим з використанням лінійних ($n = 2$) і квадратичних ($n = 3$) апроксимацій при $M = 50$ і $M = 28$ відповідно ($M_{BC} = 8(4)$, $M_{AB} = M_{DE} = M_{GA} = 4(2)$, $M_{EFG} = 26(16)$). Крива 3 – графік розв'язку, знайденого методом функцій стрибка [10].

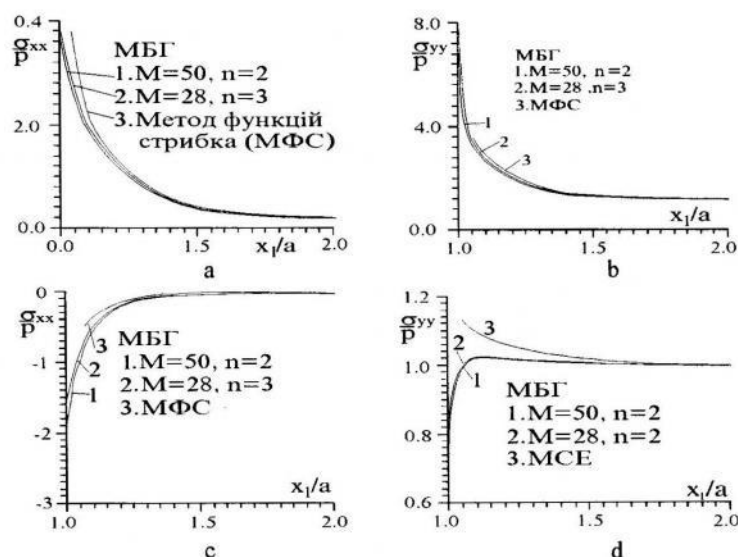


Рис. 4

1. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності.- Львів., Світ, 1994.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М., Мир, 1984. – 494 с.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов.- М.: Мир, 1987.
4. Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J. *A general Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations* // Journal of Applied Mechanics.- 1992. – Vol. 59. – P. 604-614.
5. Brebbia C.A. *Alternative ways of treating domain integrals in boundary elements* // Comput. Meth. Water Resour Vol. 2. Numer. meth. transp. and hydrol process: Proc. 7 Int. Conf., Cambridge, Mass, June, 1988. – Amsterdam etc., Louthampton; Boston, 1988. – P. 129-138.
6. Banerjee P.K., Henry D.P. *BEM formulations for body forces using particular integrals* // Boundary Elem. Meth. Appl. Mech. Proc. Ist Joint Jap/US Symp. Boundary Elem. Meth., Tokyo, 3-6. Oct., 1988. – Oxford. – P. 25-34.
7. Stippes M., Rizzo F.J. *A note on the body force integral of classical elastostatics*// ZAMP.- 1977. – N 6. – P. 809-832.
8. Huang Q., Cruse T.A. *Some remarks on particular solution used in BEM formulation* // Computational Mechanics. – 1993. – Vol. 13. – P. 68-73.
9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимации. – М.: Мир, 1986.
10. Сулим Г.Т., Сулим М.В. *Напряжённое состояние пластинки с тонкостенным включением*// Деп. ВИНТИ.- 1982. – N4839-82 Деп.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.96