

УДК 539.374

**ВЕЛИКІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ КРУГОВОЇ
МЕМБРАНИ ПІД ДІЄЮ РІВНОМІРНОГО ТИСКУ**

В. А. ГАЛАЗЮК, І. А. ПРОКОПИШИН, Д. Г. ХЛЕБНІКОВ

Galaziuk V, A., Prokopishin I. A., Khlebnikov D. G. Large elasto-plastic deformations of a circular membrane under uniform pressure. The problem of large elasto-plastic deformations of a circular membrane under uniform pressure is considered on the base of Davis-Nadai approach. The nonlinear boundary problem is transformed to Cauchy problem. Numerical results are obtained by Runge-Kutta method. Ultimate pressure and elastic unloading are analyzed for process of forming aluminium shells.

Проблема дослідження пружно-пластичної поведінки оболонок при великих деформаціях виникає при оцінці утримувальної здатності сучасних тонкостінних конструкцій, в технологічних задачах листового штампування. Огляд робіт цього напрямку можна знайти в працях [3–5,8,9].

У даній праці розглянуто задачу про великі пружно-пластичні деформації кругової мембрани під дією рівномірного тиску. Її розв'язок здійснено методом Рунге–Кутта на підставі зведення вихідної нелінійної крайової проблеми до задачі Коші [2]. Це дозволило порівняно просто визначити критичне значення тиску, при якому настає втрата утримувальної здатності оболонки в процесі формування та дослідити її залишковий деформований стан після розвантаження.

Нехай r^0, z^0 — координати деякої матеріальної точки M серединної поверхні мембрани до деформації в полярній системі координат, s^0 — довжина дуги по меридіану від полюса до т. M , θ^0 — кут нахилу нормалі до серединної поверхні в цій точці стосовно осової лінії, а h^0 — товщина мембрани. Після деформації відповідні величини для точки M позначимо через r, z, s, θ, h .

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73K15.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Міністерства у справах науки та технологій України (Проект 05.21.04/ 347–93 "Геліос")

© В. А. Галазюк, І. А. Прокопишин, Д. Г. Хлебніков, 1997

Запишемо геометричні співвідношення для оболонки обертання [2]. Головні кривини виражаються формулами

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \theta}{r}. \quad (1)$$

Прирости координат та приріст довжини дуги зв'язані співвідношеннями

$$dz = \sin \theta ds, \quad dr = \cos \theta ds. \quad (2)$$

Для опису деформованого стану будемо використовувати кратності видовження елемента оболонки по лініях головних кривин λ_1, λ_2 , та по нормалі до серединної поверхні — λ_3 :

$$\lambda_1 = \frac{ds}{ds^0}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{r^0}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{h^0}. \quad (3)$$

Пластичне формування оболонки будемо розглядати як квазістатичний процес. Припускаючи, що товщина оболонки достатньо мала, будемо вважати що оболонка перебуває в умовах безмоментного напруженого стану.

Зазначимо, що нормальні напруження σ_1 та σ_2 на площадках, ортогональних до ліній головних кривин завжди будуть головними, оскільки з геометричних міркувань дотичні напруження σ_{12} на цих площадках відсутні. Введемо інтегральні характеристики цих напружень по товщині

$$T_1 = h\sigma_1, \quad T_2 = h\sigma_2. \quad (4)$$

Рівняння рівноваги оболонки, яка перебуває під дією тиску з інтенсивністю p записуються [2]:

$$T_1 = \frac{pr}{2 \sin \theta}, \quad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p. \quad (5)$$

З них безпосередньо випливає наступна рівність

$$\frac{dT_1}{ds} = (T_2 - T_1) \frac{\cos \theta}{r}. \quad (6)$$

Для запису співвідношень пластичності скористаємось підходом Девіса–Надаї та введемо логарифмічні деформації

$$\epsilon_1 = \ln \lambda_1, \quad \epsilon_2 = \ln \lambda_2, \quad \epsilon_3 = \ln \lambda_3. \quad (7)$$

З умови нестисливості $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ випливає, що

$$\epsilon_3 = -(\epsilon_1 + \epsilon_2). \quad (8)$$

Запишемо співвідношення деформаційної теорії пластичності при умові текучості Мізеса [6]:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} (2\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} (2\epsilon_2 + \epsilon_1), \quad (9)$$

де $\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_1^2 + \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2)^{1/2}$ – інтенсивність пластичних деформацій, а $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ — визначається діаграмою пластичності. Співвідношення (9) зручно записати у вигляді:

$$\begin{aligned} T_1 &= h^0 f_1(\lambda_1, \lambda_2), \quad f_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2\sigma_i}{3\lambda_1\lambda_2\epsilon_i} (2\ln\lambda_1 + \ln\lambda_2), \\ T_2 &= h^0 f_2(\lambda_1, \lambda_2), \quad f_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2\sigma_i}{3\lambda_1\lambda_2\epsilon_i} (2\ln\lambda_2 + \ln\lambda_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Співвідношення пластичності у формі (10) повністю аналогічні до нелінійних фізичних співвідношень для м'яких оболонок [2]. Це дозволяє скористатись способом Бідермана В.Л. зведення цієї задачі до задачі Коші.

Здійснимо деякі перетворення . З рівнянь рівноваги (5), підставляючи вирази для кривин (1) та використавши співвідношення (10), отримаємо

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{r} \left(2 - \frac{f_2}{f_1} \right). \quad (11)$$

Виключаючи з рівнянь (3) r^0 та враховуючи, що для мембрани $\theta^0 = 0$, отримаємо рівняння сумісності деформацій

$$\frac{d\lambda_2}{ds} = \frac{\lambda_2}{r} \left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right). \quad (12)$$

Для отримання рівняння на λ_1 скористаємось таким підходом. Продиференціювавши перше рівняння (10) по s і приймаючи початкову товщину мембрани h^0 сталою, будемо мати

$$\frac{dT_1}{ds} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{ds} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{ds} \right) h^0. \quad (13)$$

Далі, використовуючи рівняння (6), отримаємо

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} \right)^{-1} \left((f_2 - f_1) \frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \frac{\lambda_2}{r} \left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right). \quad (14)$$

Отже, ми отримали систему рівнянь яка записана для деформованої оболонки :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \cos\theta, \\ \frac{dz}{ds} &= \sin\theta, \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\sin\theta}{r} \left(2 - \frac{f_2}{f_1} \right), \\ \frac{d\lambda_1}{ds} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} \right)^{-1} \left((f_2 - f_1) \frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \frac{\lambda_2}{r} \left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right), \\ \frac{d\lambda_2}{ds} &= \frac{\lambda_2}{r} \left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Зазначимо, що ця система рівнянь не залежить від початкової товщини h^0 . При зміні масштабу

$$\hat{r} = ar, \quad \hat{z} = az + b, \quad a, b \in R \quad (16)$$

величини $\theta, \lambda_1, \lambda_2$ не змінюються і система рівнянь переписується без змін. Це дозволяє сформулювати такий алгоритм її розв'язування.

Задаємо деякі початкові значення $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ при $r = 0$. Форма оболонки в околі полюса буде близька до сферичної, тобто для малих r кут нахилу нормалі визначається формулою $\theta = r/R_0$, де R_0 — радіус кривини оболонки в полюсі. Останній можна задати довільним чином, оскільки він лише визначатиме масштаб. З тих же міркувань задання початкового значення z_0 також довільне.

Система рівнянь (15) має особливість в полюсі, тому її інтегрування починаємо з деякої точки s ($0 < s < \epsilon$), задаючи початкові значення

$$r(s_0) = s_0, \quad \theta(s_0) = \frac{r_0}{R_0}, \quad z(s_0) = z_0, \quad \lambda_1(s_0) = \lambda_2(s_0) = \lambda_0. \quad (17)$$

Інтегрування системи рівнянь (15) при початкових умовах (17) здійснюємо до точки s^* , в якій $\lambda_2 = 1$. Фіксуємо отримані величини $r^*, q^*, z^*, \lambda_1^*$ і знаходимо реальний профіль оболонки, здійснюючи перетворення (16) з параметрами

$$a = \frac{r_1}{r^*}, \quad b = -\frac{r_1 z^*}{r^*}, \quad (18)$$

де r_1 — радіус мембрани.

Для знаходження внутрішнього тиску p , який відповідає заданному значенню λ_0 величин λ_1, λ_2 в полюсі, застосовуємо перше рівняння рівноваги (5) та фізичні співвідношення (10), звідки отримаємо

$$p = 2h^0 f_1(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\sin \theta}{r}. \quad (19)$$

Для числового розв'язування початкової задачі (15), (17) застосовано модифікацію Гілла методу Рунге-Кутта з використанням стандартної програми RKGS [5].

У даному випадку задача рівноваги оболонки є статично визначеною, тому після розвантаження залишкові напруження не виникають. Залишковий деформований стан повністю визначається пластичними деформаціями λ'_1, λ'_2 , рівними

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^e}, \quad \lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^e}, \quad (20)$$

$\lambda_k^e = \exp\left(\frac{\sigma_i \epsilon_k}{3G\epsilon_i}\right)$, $k = 1, 2$, — пружні деформації. Залишкову форму оболонки знаходимо інтегруванням рівності

$$\frac{dz'}{dr'} = \tan \theta', \quad (21)$$

де $r' = r/\lambda_1^e$, а θ' визначається з рівняння сумісності для залишкових деформацій (12):

$$\cos \theta' = \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} \frac{1 - \frac{r}{\lambda_2^e} \frac{d\lambda_2^e}{dr}}{1 - \frac{r}{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dr}}. \quad (22)$$

Для прикладу розглянемо процес пластичного формування оболонки з листового металу, коли залежність інтенсивностей напружень та деформацій апроксимується степеневою функцією [1]

$$\sigma_i = A \epsilon_i^n, \quad A = \sigma_{ut} \frac{\exp(n)}{n^n}, \quad (23)$$

де σ_{ut} — межа короткотривалої міцності при випробовуваннях на розтяг, n — показник деформаційного зміцнення. Зазначимо, що в цьому випадку система рівнянь (15) не залежить від коефіцієнта A .

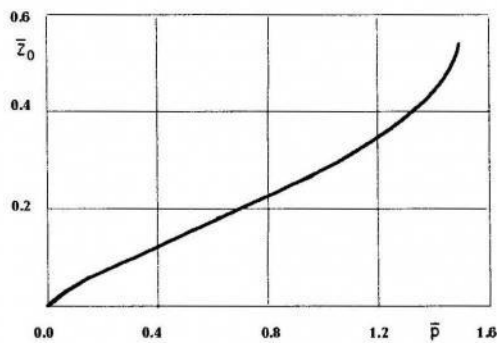


Рис. 1

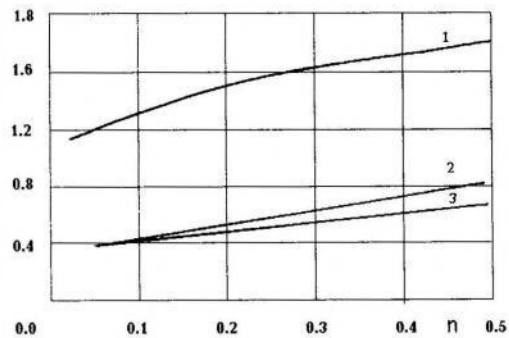


Рис. 2

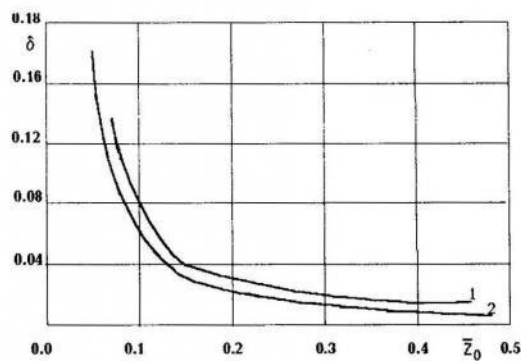


Рис. 3

Залежність відносного прогину мембрани в центрі $\bar{z}_0 = z_0/r_1$ від безрозмірного тиску $\bar{p} = pr_1/(\sigma_{ut}h^0)$ для алюмінієвого сплаву АМцМ ($n = 0.2$) показана на рис.1. Точка на

кривій, в якій похідна стає нескінченною, відповідає критичному значенню тиску, коли зменшення товщини оболонки в процесі пластичного формування вже перестає компенсуватись зміцненням матеріалу і оболонка втрачає утримувальну здатність.

Залежність критичних значень: тиску — $\bar{p}^*$, інтенсивності деформацій — ϵ_i^* та центрального прогину — $\bar{z}_0^*$ від показника деформаційного зміцнення n ілюструють графіки на рис.2. (відповідно криві 1 — 3).

На рис.3 показана залежність відносного пружинення оболонки в центрі $\delta = (z_0 - z'_0)/z'_0$ від відносного пластичного прогину в центрі $\bar{z}'_0 = z'_0/r_1$ для сплаву АМцМ з параметрами $n = 0.2, G = 27000 \text{ МПа}$ (крива 1). Крива 2 зображає таку ж залежність для випадку плоского деформованого стану ($\epsilon_2 = 0$), отриману аналітично.

1. Аверкиев А.Ю. Методы оценки штампируемости листового металла. — М., Машиностроение, 1985. — 176 с.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. — М., Машиностроение, 1977. — 488 с.
3. Горлач Б.А. Конечные неупругие деформации твердых тел при термомеханических воздействиях// Куйбышевский авиационный институт, Куйбышев, 1984. — 387 с. (Деп. в ВИНТИ 26.02.85, N 2050-85 Деп.)
4. Григорьев А.С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях// Труды УИ Всес.конф. по теории оболочек и пластин. М., Наука, 1970. — С. 779-787.
5. Куранов Б.А., Одеров И.А. Современные методы расчета оболочечных конструкций с геометрической и физической нелинейностью (Реферативный обзор зарубежной литературы)// НПО "Криогенмаш". Балашиха, 1984. — Деп. в ВИНТИ 10.02.84, N 1170-84 Деп.
6. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.:Машиностроение, 1975. — 400 с.
7. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ // Институт математики АН БССР. — Минск, 1982. — Вып.2. — 272 с.
8. Титляков А.Е., Щеглов Б.А. Пластическое течение листового металла при определении пластичности гидростатическим методом// Кузнечно-прессовое производство. — 1968. — N 5. — С. 22-26.
9. Gavriushin S.S., Gavriushina N.T.. A simple algorithm for the analysis of axisymmetric thin shell metal forming// Int. J. Num. Meth. Eng. — 1986. — Vol. 23. — P. 1179-1194.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.94