УДК 539.377

ОПТИМІЗАЦІЯ СХЕМ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТА НАГРІВУ ТОВСТОСТІННИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ОБОЛОНОК

М. І. Бугрій

Bugriy M. I. The optimization of force loading and heating processes of thick thermoelastic shells. The mathematical formulation and the method of finding of a solution for the spatial quasi-static optimization problems of thermoelastic state of the thick-walled shells at their force loading is proposed. The energy functional of the shell elastic deformation is taken as the criterion of the optimization. An intensity of force loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. This functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type. The problem of optimization is reduced to the solution of two boundary-value problems with respect to the displacement vector and the vector conjugate to it.

Сформулюємо в квазістатичному наближенні математичну постановку і розглянемо методику розв'язування тривимірної за просторовими координатами задачі оптимізації термопружного стану товстостінних ізотропних оболонок сталої товщини, які знаходяться під дією нестаціонарного температурного поля $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і поверхневих зусиль $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Тут (α,β,γ) – мішана ортогональна криволінійна система координат [2], τ – час.

Як відомо [1], математичне формулювання задач оптимізації для механічних систем з розподіленими параметрами пов'язане з вибором критерію оптимізації і конкретизацією множини допустимих функцій та функцій керування. За критерій оптимізації виберемо функціонал енергії пружної деформації оболонки [1]

$$W[\vec{u},t]=\frac{1}{2E}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(V)}\big[\sigma_{\alpha\alpha}^2+\sigma_{\beta\beta}^2+\sigma_{\gamma\gamma}^2-2\nu\left(\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}+\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\gamma\gamma}+\sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha}\right)+ \\ +2(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_{\gamma\alpha}^2)\big]\,dV\,d\tau. \qquad (1)$$

Тут σ_{is} $(i,s=\alpha,\beta,\gamma)$ — компоненти симетричного тензора напружень $\hat{\sigma}$, який виражається через переміщення $\vec{u}$ і температуру t за таким співвідношенням

$$\hat{\sigma}=2G\left\{Def\,\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\left[\nu\mathrm{div}\,\vec{u}-\alpha_t(1+\nu)t\right]\hat{I}\right\}; \qquad (2)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 73K40; Secondary 49R99.

$Def\,\vec{u} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}\right)$; $\vec{\nabla}\vec{u}$ і $\vec{u}\vec{\nabla}$ — діадні добутки векторів; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\hat{I}$ — одиничний тензор; G — модуль зсуву; E — модуль пружності; ν — коефіцієнт Пуассона; α_t — коефіцієнт лінійного теплового розширення; (V) — просторова область, яку займає оболонка.

За функції керування в задачі оптимізації приймемо інтенсивність поверхневих зусиль $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і температуру $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Ці функції підпорядкуємо додатковим умовам інтегрального (моментного) характеру

$$\int\limits_{(V)} t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)\psi_m(\alpha,\beta,\gamma)\,dV = B_m(\tau), \quad (m = \overline{0,m^*}), \tag{3}$$

$$\int\limits_{(\Sigma)} \vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)\psi_l(\alpha,\beta,\gamma)\,d\Sigma = \vec{C}_l(\tau), \quad (l = \overline{0,l^*}). \tag{4}$$

Тут $\psi_k(\alpha,\beta,\gamma)$, $(k = \overline{0,\infty})$ утворюють повну ортонормовану систему функцій в області (V); (Σ) — гладка поверхня, що обмежує область (V); $B_m(\tau)$, $\vec{C}_l(\tau)$ — задані параметричні функції.

Допустимі функції і функції керування (вектор переміщень $\vec{u}$, температура t і вектор зовнішніх зусиль $\vec{p}$) термопружним станом оболонки в квазістатичному наближенні пов'язані рівнянням Ляме

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u} = \frac{2\alpha_t\,(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,t \tag{5}$$

в області $(V_1) = (V) \times [0,\infty[$ і механічними граничними умовами

$$\vec{n}\cdot\hat{\sigma} = \vec{p} \tag{6}$$

на поверхні $(\Sigma_1) = (\Sigma) \times [0,\infty[$ області (V_1) [1]. Тут $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}$ — скалярний добуток вектора зовнішньої нормалі в точках поверхні (Σ) з тензором напружень (2).

Задачу оптимізації термопружного стану оболонки за рахунок вибору функцій $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ сформулюємо наступним чином: у класі двічі неперервно диференційовних в області (V_1) і неперервно диференційовних на поверхні (Σ_1) функцій знайти екстремалі функціоналу (1), які справджують обмеження (3) — (6). Сформульовану задачу оптимізації розв'язуємо методом Лагранжа.

Побудова оптимальних розв'язків зводиться до розв'язування граничної задачі

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u} - \frac{2\alpha_t\,(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,t = 0,$$

$$\Delta\vec{u^*} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u^*} = 0, \quad \mathrm{div}(\vec{u} - \vec{u^*}) - 3\alpha_t t + f_0^* = 0; \tag{7}$$

$$(\vec{\sigma}_n - \vec{\sigma}_n^*)\big|_{(\Sigma_1)} = 0, \quad (\vec{u^*} + \psi_l\vec{Z}_l)\Big|_{(\Sigma_1)} = 0, \quad (l = \overline{0,l^*}) \tag{8}$$

стосовно температури $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$, вектора переміщень $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і спряженого до нього вектора $\vec{u^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Тут

$$\vec{\sigma_n^*} = \vec{n}\cdot\hat{\sigma}^*,\;\; \hat{\sigma}^* = 2G\left(Def\,\vec{u^*} + \frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{div}\vec{u^*}\cdot\hat{I}\right);$$
$$f_0^*(\alpha,\beta,\gamma,\tau) = \Phi_m^*(\tau)\psi_m(\alpha,\beta,\gamma),\;\; (m=\overline{0,m^*}); \tag{9}$$

$\vec{\sigma_n}$ — тензор напружень; $\vec{Z}_l(\tau)$ $(l=\overline{0,l^*})$, $\Phi_m^*(\tau)$ $(m=\overline{0,m^*})$ — модифіковані множники Лагранжа (у співвідношеннях (8), (9) за індексом, що повторюється, проводиться підсумовування).

Система рівнянь (7) і граничних умов (8) дозволяє визначити шукані оптимальні поля температури $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і переміщень $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Із співвідношення (6) визначаємо оптимальне поверхневе силове навантаження оболонки $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Невідомі множники Лагранжа $\Phi_m^*(\tau)$, $(m=\overline{0,m^*})$ і $\vec{Z}_l(\tau)$, $(l=\overline{0,l^*})$, шукаємо з умов (3), (4). За оптимальними полями температури t і переміщень $\vec{u}$ з ключових співвідношень квазістатичної термопружності [2] знаходимо відповідний їм термопружний стан, а також умови нагріву оболонки.

Зауважимо, що граничну задачу (7), (8) можна звести до двох незалежних граничних задач, аналогічних граничній задачі термопружності в переміщеннях [1]. Справді, якщо покласти

$$\vec{u} = \vec{u^*} + \vec{v^*},\;\; t = \frac{1}{3\alpha_t}\left(\operatorname{div}\vec{v^*} + f_0^*\right), \tag{10}$$

то з урахуванням (10), гранична задача (7), (8) стосовно функцій $\vec{u}$, $\vec{u^*}$, t зводиться до двох граничних задач

$$\Delta\vec{u^*} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u^*} = 0, \tag{11}$$

$$\left.(\vec{u^*} + \psi_l\vec{Z}_l)\right|_{(\Sigma_1)} = 0,\;\; (l=\overline{0,l^*}); \tag{12}$$

$$\Delta\vec{v^*} + \frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v^*} = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\operatorname{grad}f_0^*, \tag{13}$$

$$\vec{n}\cdot\left.\left\{Def\,\vec{v^*} - \frac{1}{3}\left[\operatorname{div}\vec{v^*} + \frac{1+\nu}{1-2\nu}f_0^*\right]\hat{I}\right\}\right|_{(\Sigma_1)} = 0 \tag{14}$$

стосовно функцій $\vec{u^*}$, $\vec{v^*}$. Тут за індексом l проводиться підсумовування.

Структура граничних задач (11), (12) і (13), (14) дозволяє сформулювати їхню варіаційну постановку. Справді, диференціальні оператори цих граничних задач аналогічні диференціальним операторам задач термопружності в переміщеннях, які, як відомо [2], допускають варіаційне формулювання за допомогою функціоналу Лагранжа

$$L[\vec{u}] = \frac{1}{2E}\int\limits_0^{\tau_0}\iint\limits_{(V)}\left[\sigma_{\alpha\alpha}^2 + \sigma_{\beta\beta}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - 2\nu\left(\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\beta\beta}\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha}\right) + \right.$$

$$+2(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_{\gamma\alpha}^2)-2E\rho\vec{F}\cdot\vec{u}\Big]\,dV\,d\tau-\int_0^{\tau_0}\int_{(\Sigma)}(\vec{p}\cdot\vec{u})d\Sigma\,d\tau, \qquad (15)$$

записаного в переміщеннях. Тут ρ – густина матеріалу оболонки, $\vec{F}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ – вектор масових сил.

Легко показати, що на основі функціоналу (15) можна отримати функціонали, еквівалентні до граничних задач (11), (12) і (13), (14).

Справді, функціонал, відповідний граничній задачі (11), (12) стосовно функції $\vec{u^*}$, отримується з функціоналу (15), якщо в останньому покласти

$$\vec{u}=\vec{\theta^*},\ \ \vec{\theta^*}=\vec{u^*}+\psi_l\vec{Z}_l,\ \ (l=\overline{0,l^*}),t\equiv 0,\ \ \vec{F}=\vec{F^*},\ \ \vec{p}=0. \qquad (16)$$

Тут

$$\vec{F^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=-\frac{G}{\rho}\left(\Delta\psi_l\vec{Z}_l+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\psi_l\vec{Z}_l\right),(l=\overline{0,l^*}),$$

де за індексом l, як і у співвідношеннях (16), проводиться підсумовування. Тоді отримаємо функціонал

$$L^{(0)}[\vec{\theta^*}]=\frac{1}{2E}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\big[\,\theta_{\alpha\alpha}^2+\theta_{\beta\beta}^2+\theta_{\gamma\gamma}^2-2\nu\,(\theta_{\alpha\alpha}\theta_{\beta\beta}+\theta_{\beta\beta}\theta_{\gamma\gamma}+\theta_{\gamma\gamma}\theta_{\alpha\alpha})+$$

$$+2(1+\nu)(\theta_{\alpha\beta}^2+\theta_{\beta\gamma}^2+\theta_{\gamma\alpha}^2)-2E\rho(\vec{F^*}\cdot\vec{\theta^*})\Big]\,dV\,d\tau, \qquad (17)$$

екстремалі якого є розв'язками граничної задачі (11), (12) у вказаному вище класі гладких функцій, які задовольняють граничну умову (12), де θ_{is} $(i,s=\alpha,\beta,\gamma)$ — компоненти симетричного тензора

$$\hat{\theta}=2G\left(Def\,\vec{\theta^*}+\frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{div}\vec{\theta^*}\cdot\hat{I}\right).$$

Аналогічно можна показати, що відповідний граничній задачі (13), (14) функціонал також отримується з функціоналу Лагранжа (15), якщо в останньому покласти

$$\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\vec{v^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau),\ \ t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\frac{1}{3\alpha_t}\operatorname{div}\vec{v^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau),$$

$$\vec{F}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=-\frac{1}{3(1-2\nu)\rho}\operatorname{grad}f_0^*,\ \ \vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\frac{1}{3(1-2\nu)}\vec{n}f_0^*. \qquad (18)$$

Тоді отримаємо функціонал

$$L^{(1)}[\vec{v^*}]=\frac{1}{2E}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\Big[{w_{\alpha\alpha}^{(0)}}^2+{w_{\beta\beta}^{(0)}}^2+{w_{\gamma\gamma}^{(0)}}^2-2\nu(w_{\alpha\alpha}^{(0)}w_{\beta\beta}^{(0)}+w_{\beta\beta}^{(0)}w_{\gamma\gamma}^{(0)}+$$

$$+w_{\gamma\gamma}^{(0)}w_{\alpha\alpha}^{(0)})+2(1+\nu)(v_{\alpha\beta}^2+v_{\beta\gamma}^2+v_{\gamma\alpha}^2)+\frac{2E^2}{3(1-2\nu)}\vec{v^*}\cdot\operatorname{grad}f_0^*\Big]\,dV\,d\tau-$$

$$-\frac{E}{3(1-2\nu)}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(\Sigma)}(\vec{n}\cdot\vec{v^*})f_0^*\,d\Sigma\,d\tau, \tag{19}$$

де

$$w_{\alpha\alpha}^{(0)}=\frac{1}{3}\left(2v_{\alpha\alpha}-v_{\beta\beta}-v_{\gamma\gamma}\right), \tag{20}$$

$w_{\beta\beta}^{(0)}$, $w_{\gamma\gamma}^{(0)}$ отримуються з (20) циклічною перестановкою індексів, а v_{is} $(i,s=\alpha,\beta,\gamma)$ є складовими симетричного тензора $\hat{v}$, що визначається співвідношенням

$$\hat{v}=2G\left(Def\,\vec{v^*}+\frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{div}\vec{v^*}\cdot\hat{I}\right).$$

Екстремалі функціоналу (19) є розв'язками граничної задачі (13), (14) стосовно функції $\vec{v^*}$. При цьому гранична умова (14) є природною для функціоналу (19).

Функціонали (17), (19) є строго опуклими функціоналами, оскільки вони отримані з строго опуклого енергетичного функціоналу (15) шляхом лінійної заміни незалежних змінних у вигляді (16) і (18) відповідно. Тому розв'язок задачі оптимізації існує і він єдиний в класі гладких функцій, який розглядаємо. У зв'язку з цим отримані функціонали можна використати як для знаходження наближених розв'язків задачі оптимізації, яку розглядаємо, варіаційними методами типу методу Рітца, так і для побудови наближених двовимірних за просторовими координатами аналогів задачі оптимізації за допомогою варіаційних методів типу методу Канторовича.

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К., Наукова думка, 1979. – 364 с.
2. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек.– К., Наукова думка, 1978. – 320 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.96