УДК 539.3

# КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОЇ МЕХАНІКИ ТА ОДНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ СЕРЕДОВИЩА ЗІ СФЕРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Ю. І. Говда, Т. С. Нагірний

**Govda Yu. I., Nahirniy T. S. The classification of problems for locally-gradient mechanics and one dynamic problem for media with the spherical cavity.** The classification of problems for locally-gradient mechanics is proposed. By formulating of dynamic problems the inertia both the mechanical motion and the reversible displacement of mass take into account. The solution of a noncouple problem for media with the spherical cavity is investigated.

У працях [1,2], базуючись на принципі локально-градієнтного рівноважного стану, запропоновано термодинамічний підхід до опису взаємозв'язаних процесів у деформівних системах з урахуванням локальної градієнтності полів хімічного потенціалу та температури.

У даній праці дано формулювання різних типів задач локально-градієнтної механіки та досліджено динамічну поведінку пружного середовища, в якому раптово виникає сферична порожнина.

Нехай у пружному твердому тілі, що займає область $(V)$ евклідового простору з поверхнею $(\Sigma)$, базовими процесами є механічні. Ці процеси задовольняють рівняння балансу енергії $E$, яке в наближенні геометричної лінійності має вигляд [3]

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left( \widehat{\sigma} \cdot \vec{v} + H \frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau} \right). \tag{1}$$

Тут $\widehat{\sigma}$ – тензор напружень; $\vec{v}$ – вектор швидкості; $H$ – хімічний потенціал; $\vec{\Pi}_m$ – вектор пружних зміщень маси; $\tau$ – час.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A15.

Разом з рівнянням (1) повинні виконуватися рівняння балансу імпульсу механічного поступального руху та маси [2,3]

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_m\right) = 0, \tag{2}$$

де $\vec{k}_v$ – механічний імпульс; $\rho$ – густина маси.

Енергію $E$ приймаємо у вигляді суми внутрішньої енергії $U$ та енергії руху $K$

$$E = U + K. \tag{3}$$

При цьому енергію руху $K$ означуємо в просторі імпульсу механічного поступального руху $\vec{k}_v$, а також імпульсу пружних зміщень маси $\vec{k}_m$

$$K = K\left(\vec{k}_v, \vec{k}_m\right), \tag{4}$$

а для $U$ з (1)-(3) отримуємо

$$U = U\left(\hat{e}, \rho, \vec{\Pi}_m\right). \tag{5}$$

Тут $\hat{e}$ – тензор деформації. Зауважимо, що для приростів $dK$, $dU$ справедливі рівності

$$dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v + \frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau} \cdot d\vec{k}_m, \tag{6}$$

$$dU = \hat{\sigma}{:}d\hat{e} + H d\rho + \left(\vec{\nabla} H - \frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau}\right) \cdot d\vec{\Pi}_m. \tag{7}$$

Повна система рівнянь моделі локально-градієнтного пружного тіла з урахуванням інерційності пружних зміщень маси, а також механічного поступального руху складається з рівнянь балансу механічного імпульсу та маси (2), конститутивних рівнянь, які приймаємо у вигляді

$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{e} + \left[\lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m (H - H_*)\right] \hat{I}, \tag{8}$$

$$H = H_* - \frac{1}{\beta_\eta}(\rho - \rho_*) - (3\lambda + 2\mu)\frac{\alpha_m}{\beta_\eta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} H - \frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma}\vec{\Pi}_m, \tag{10}$$

$$\vec{k}_v = \frac{\rho}{\beta_m - \beta^2\rho}\left(\beta_m \vec{v} - \beta \frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau}\right), \qquad \vec{k}_m = \frac{1}{\beta_m - \beta^2 \rho}\left(\frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau} - \beta\rho\vec{v}\right), \tag{11}$$

та співвідношення Коші для тензора деформації

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right]. \tag{12}$$

Тут $\vec{u}$ – вектор переміщення; $\rho_*$, $H_*$ – густина маси і хімічний потенціал необмеженого однорідного середовища; $\mu$, $\lambda$, $\alpha_m$, $\beta$, $\beta_m$, $\beta_\eta$, $\gamma$ – характеристики матеріалу необмеженого однорідного середовища; індекс "т" означає транспонування.

У випадку, коли за розв'язуючі функції взяти хімічний потенціал $H$ і вектор переміщення $\vec{u}$, за лінійного наближення для імпульсів $\vec{k}_v$, $\vec{k}_m$ система співвідношень (2),(8)-(12) зведеться до такої системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{c_\eta^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} + \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} -$$

$$-\frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_m + \beta\rho_*}{(\beta^2\rho_* - \beta_m)}\frac{\partial^2 \vec{\nabla}\cdot(\vec{u})}{\partial\tau^2} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{13}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - \left((3\lambda+2\mu)\alpha_m - \beta\rho_*\right)\vec{\nabla}H -$$

$$-\frac{\beta\rho_*}{\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)\gamma}}\int_0^\tau \left[\beta\rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\xi^2} - (\beta^2\rho_* - \beta_m)\vec{\nabla}H\right]\times$$

$$\times\sinh\left(\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)/\gamma}\,(\tau - \xi)\right)d\xi =$$

$$= \frac{\beta\rho_*}{\gamma}\left[\cosh\left(\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)/\gamma}\,\tau\right)\vec{\Pi}_m\Big|_{\tau=0} -\right.$$

$$\left.-\sqrt{\gamma/(\beta^2\rho_* - \beta_m)}\,\sinh\left(\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)/\gamma}\,\tau\right)\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\right]. \tag{14}$$

Тут $c_\eta$ – швидкість поширення збурень поля хімічного потенціалу; $\varkappa$ – характеристика матеріалу. Задачу локально-градієнтної механіки, що описується системою рівнянь (13)(14), називатимемо динамічною інерційною задачею з врахуванням взаємозв'язаності механічного імпульсу $\vec{k}_v$ та імпульсу пружних зміщень маси $\vec{k}_m$.

Якщо знехтувати взаємозв'язаністю імпульсів $\vec{k}_v$, $\vec{k}_m$, тобто прийняти для енергії $K$ зображення

$$K = \frac{1}{2}\beta_m\vec{k}_m\cdot\vec{k}_m + \frac{1}{2\rho_*}\vec{k}_v\cdot\vec{k}_v, \tag{15}$$

то лінеаризована система рівнянь буде мати вигляд

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{c_\eta{}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} + (3\lambda+2\mu)\alpha_m\left(\frac{1}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \frac{1}{\beta_m}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})}{\partial\tau^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{16}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0. \tag{17}$$

Задачу локально-градієнтної механіки, що описується системою рівнянь (16)(17), будемо називати динамічною інерційною.

Нехтуючи інерційністю пружних зміщень маси, тобто приймаючи

$$K = \frac{1}{2\rho_*}\vec{k}_v \cdot \vec{k}_v, \tag{18}$$

отримуємо лінеаризовану систему рівнянь, що відповідає динамічній задачі локально-градієнтної механіки

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{19}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0. \tag{20}$$

Якщо знехтувати інерційністю механічного поступального руху, то лінеаризована ключова система рівнянь буде мати вигляд

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{{c_\eta}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} =$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{21}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0. \tag{22}$$

Задачу локально-градієнтної механіки, що описується системою рівнянь (21)(22), називатимемо інерційною задачею.

Нехтуючи інерційністю всіх форм руху лінеаризована ключова система рівнянь матиме вигляд

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{23}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0 \tag{24}$$

і буде описувати статичну задачу локально-градієнтної механіки.

Якщо при отриманні систем рівнянь (16)(17), (19)(20), (21)(22), (23)(24) у співвідношенні (9) нехтувати впливом тензора деформації на хімічний потенціал, то відповідні системи рівнянь будуть описувати відповідні незв'язані задачі локально-градієнтної механіки.

Застосуємо систему рівнянь

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{{c_\eta}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{25}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0, \tag{26}$$

що відповідає незв'язаній динамічній інерційній задачі, до опису механічної поведінки пружного середовища, в якому раптово виникає сферична порожнина. З цією метою розглянемо необмежене пружне тіло, віднесене до сферичної системи координат $\{r, \varphi, \theta\}$, яке займає область $r > r_0$. Стан тіла для часу $\tau \leqslant 0$ відповідає стану вільного від силового навантаження однорідного пружного середовища, яке характеризується хімічним потенціалом $H_*$ та густиною $\rho_*$. Для $\tau > 0$ приймаємо, що поверхня тіла $r = r_0$ вільна від силового навантаження і на ній підтримується стале відмінне від початкового значення хімічного потенціалу $H_a (H_a \neq H_*)$, яке відповідає хімічному потенціалу вільної частинки.

За сформульованих умов динамічні процеси в області тіла $r > r_0$ є центральносиметричними та описуються такою системою рівнянь:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \widetilde{\eta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial r} - \varkappa^2 \widetilde{\eta} - \frac{1}{{c_\eta}^2}\frac{\partial^2 \widetilde{\eta}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\widetilde{u} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \tau^2} = \alpha_m \left(3 - \frac{4c_2^2}{c_1^2}\right)\frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial r};\end{gathered} \tag{27}$$

за таких початкових і граничних умов:

$$\widetilde{\eta} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \tau} = 0, \qquad \widetilde{u} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} = 0 \qquad \text{при} \qquad \tau = 0, \qquad r > r_0; \tag{28}$$

$$\widetilde{\eta} = \eta_a, \qquad c_1^2 \rho_* \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} + (c_1^2 - 2c_2^2)\rho_* \frac{\widetilde{u}}{r} - (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \widetilde{\eta} = 0 \tag{29}$$

на поверхні $r = r_0$ при $\tau > 0$, а також умов обмеженості розв'язку при $r \to \infty$. Тут $\widetilde{\eta} = H - H_*$ – збурення хімічного потенціалу $H(r, \tau)$ від початкового значення $H_*$; $\widetilde{u}(r, \tau)$ – радіальна компонента вектора переміщення $\vec{u}$; $c_1$, $c_2$ – відповідно швидкості поширення поздовжньої і поперечної пружних хвиль в необмеженому середовищі; $\eta_a = H_a - H_*$. Співвідношення для ненульових компонент $\widetilde{\sigma}_r$, $\widetilde{\sigma}_\varphi$, $\widetilde{\sigma}_\theta$ тензора напружень $\widehat{\sigma}(r, \tau)$ мають вигляд

$$\begin{gathered}\widetilde{\sigma}_r = c_1^2 \rho_* \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} + (c_1^2 - 2c_2^2)\rho_* \frac{\widetilde{u}}{r} - (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \widetilde{\eta}, \\ \widetilde{\sigma}_\varphi = \widetilde{\sigma}_\theta = (c_1^2 - 2c_2^2)\rho_* \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} + 2(c_1^2 - c_2^2)\rho_* \frac{\widetilde{u}}{r} - (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \widetilde{\eta}.\end{gathered} \tag{30}$$

Уведемо у розгляд безрозмірні величини

$$\begin{gathered}R = \varkappa r, \qquad t = c_1 \varkappa \tau, \qquad \eta = \widetilde{\eta}/\eta_a, \qquad u = \frac{c_1^2 \varkappa}{(3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \eta_a}\widetilde{u}, \\ \sigma_r = \widetilde{\sigma}_r/\sigma_*, \qquad \sigma_\varphi = \widetilde{\sigma}_\varphi/\sigma_*, \qquad \sigma_\theta = \widetilde{\sigma}_\theta/\sigma_*, \qquad \sigma_* = (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \eta_a.\end{gathered} \tag{31}$$

Тоді система рівнянь (27), крайові умови (28),(29) і співвідношення (30) запишуться у вигляді

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \eta}{\partial R} - \eta - \alpha^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \eta; \tag{32}$$

початкові умови

$$\eta = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0, \quad R > R_0 \equiv \varkappa r_0; \tag{33}$$

граничні умови

$$\eta = 1, \qquad \sigma_r = 0 \qquad \text{на поверхні} \quad R = R_0 \quad \text{при} \quad t > 0 \tag{34}$$

з умовами обмеженості розв'язку при $R \to \infty$;

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \eta, \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta &= \left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \eta. \end{aligned} \tag{35}$$

Тут $u = \partial\Phi/\partial R$; $\Phi$ – потенціал переміщення [4]; $\alpha = c_1/c_\eta$; $\beta = c_1/c_2$. Розв'язком першого рівняння системи (32), що задовольняє крайові умови, є

$$\begin{aligned} &\eta(R,t) = \\ &= \Theta(t - \alpha(R - R_0))\frac{R_0}{R}\left(1 - (R - R_0)\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} \frac{J_1(\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R - R_0)^2}/\alpha)}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R - R_0)^2}} d\xi\right), \end{aligned} \tag{36}$$

де $J_1(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку; $\Theta(\cdot)$ – одинична функція Гевісайда. Для компонент вектора переміщення та тензора напружень отримуємо

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{R}\Bigg\{ &\Theta(t - R + R_0)\left[\frac{1}{R} - \frac{c}{c^2 + 4a^2R_0^2}\left[\left(2R_0 + \frac{c}{R}\right)\cos\left(\frac{t - R + R_0}{a}\right) + \right.\right. \\ &+ \left(\frac{c}{a} - \frac{2aR_0}{R}\right)\sin\left(\frac{t - R + R_0}{a}\right)\Bigg] + \frac{2}{c^2 + 4a^2R_0^2}\, e^{-\frac{t - R + R_0}{bR_0}} \times \\ &\times \left[R_0\left(c - \frac{2a^2R_0}{R}\right)\cos\left(k(t - R + R_0)\right) + \frac{1}{bkR_0}\Bigg(R_0(2a^2 + b{R_0}^2) - \right. \\ &-(c^2 - 2a^2(c - R_0^2))\frac{1}{R}\Bigg)\sin\left(k(t - R + R_0)\right)\Bigg] + \frac{2}{\alpha}\int_0^{t - R + R_0} J_0\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\Bigg[\frac{R_0}{2R} + \\ &+ \frac{R_0}{c^2 + 4a^2R_0^2}\left(\left(2R_0 + \frac{cd}{R}\right)\cos\left(\frac{t - R + R_0 - \xi}{a}\right) - \left(\frac{c}{a} - \frac{2ad}{R}\right) \times \right. \\ &\times \sin\left(\frac{t - R + R_0 - \xi}{a}\right)\Bigg)\Bigg) - \left(\frac{R_0}{2R}\left(1 + \frac{4R_0R + 2cd}{c^2 + 4a^2R_0^2}\right)\cos\left(k(t - R + R_0 - \xi)\right) - \right. \\ &- \frac{1}{bkR_0}\left[1 - \frac{R_0}{2R} + \frac{2(2a^2 - lR_0^2)R - dR_0(2a^2 + bR_0^2)}{R(c^2 + 4a^2R_0^2)}\right] \times \\ &\times \sin\left(k(t - R + R_0 - \xi)\right)\Bigg) e^{-\frac{t - R + R_0 - \xi}{bR_0}}\Bigg] d\xi\Bigg] - \\ &-\Theta(t - \alpha(R - R_0))\left[\left[1 - \cos\left(\frac{t - \alpha(R - R_0)}{a}\right)\right]\frac{1}{R} - \right. \\ &- \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} \frac{J_1(\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R - R_0)^2}/\alpha)}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R - R_0)^2}}\left[1 - \cos\left(\frac{t - \xi}{a}\right)\right] d\xi + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\alpha}{a^2}\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} J_0\left(\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha\right)\left\{1-\frac{1}{\alpha^2}\left[1-\cos\left(\frac{t-\xi}{a}\right)\right]\right\}d\xi\Bigg]\Bigg\},\\
&\sigma_r=\frac{2R_0}{bR}\Bigg\{\Theta(t-\alpha(R-R_0))\left[\frac{1}{R^2}+\left(\frac{b}{2a^2}-\frac{1}{R^2}\right)\cos\left(\frac{t-\alpha(R-R_0)}{a}\right)+\right.\\
&\quad+\frac{1}{R}\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} J_0\left(\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha\right)\left[1+\frac{1}{a^2}\cos\left(\frac{t-\xi}{a}\right)\right]d\xi-\\
&\quad-\frac{R-R_0}{R^2}\int_{\alpha(R-R_0)}^{t}\frac{J_1(\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha)}{\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}}\left[1-\left(1-\frac{bR^2}{2a^2}\right)\times\right.\\
&\quad\left.\left.\times\cos\left(\frac{t-\xi}{a}\right)\right]d\xi\right]-\Theta(t-R+R_0)\left[\frac{1}{R^2}+\left(\frac{b}{2a^2}-\frac{1}{R^2}\right)\times\right.\\
&\quad\times\cos\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right)+\frac{R_0-R}{a^2kR_0R}\sin\left(k(t-R+R_0)\right)e^{-\frac{t-R+R_0}{bR_0}}-\\
&-\frac{R_0(2a^2R_0-cR-bR_0R^2)}{(4a^2(lR_0^2-a^2)-bR_0{}^4)R^2}\left[2\cos\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right)-\frac{c}{aR_0}\sin\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right)-\right.\\
&-\left.\left(2\cos\left(k(t-R+R_0)\right)-\frac{2a^2-bR_0{}^2}{a^2kR_0}\sin\left(k(t-R+R_0)\right)\right)e^{-\frac{t-R+R_0}{bR_0}}\right]+\\
&\quad+\frac{1}{\alpha R^2}\int_0^{t-R+R_0} J_0\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\left[\left(\frac{\alpha^2R^2}{a^2}+R_0^2\right)\cos\left(\frac{t-R+R_0-\xi}{a}\right)+\right.\\
&\quad+R_0^2-\frac{(R_0^2(b^2R_0{}^2-2l(\alpha^2+a^2))+4a^2)(R^2-R_0^2)+2R_0{}^2(R-R_0)^2}{4a^4-b^2R_0{}^4}\times\\
&\quad\times\left[\cos\left(\frac{t-R+R_0-\xi}{a}\right)-\cos\left(k(t-R+R_0-\xi)\right)e^{-\frac{t-R+R_0-\xi}{bR_0}}\right]+\\
&\quad+\frac{R_0((b^2R_0^2-2l\alpha^2-1)(R^2-R_0^2)+(R-R_0)^2)}{a(2a^2+b^2R_0^2)}\sin\left(\frac{t-R+R_0-\xi}{a}\right)+\\
&\quad+\frac{1}{a^2bkR_0(4a^4-b^2R_0^2)}\big[\big((2\alpha^2l-b^2R_0^2)[lR_0^2(\alpha^2+a^2)-2a^2-b^2R_0^4]+.\\
&\quad+l[b^2R_0^4-2lR_0^2(\alpha^2+a^2)+4\alpha^2a^2]\,\big)(R^2-R_0^2)-\big(2a^2(2\alpha^2a^2+lR_0^2)-\\
&\quad\left.-(\alpha^2+1)b^2R_0^4\big)(R-R_0)^2\,\big]\sin\left(k(t-R+R_0-\xi)\right)e^{-\frac{t-R+R_0-\xi}{bR_0}}\right]d\xi\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_\varphi=\sigma_\theta=\left(1-\frac{2}{\beta^2}\right)\sigma_r+\frac{2(3\beta^2-4)}{\beta^4R}u-\frac{2}{\beta^2}\eta. \qquad (37)
$$

Тут $J_0(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку;

$$
a=\sqrt{\alpha^2-1};\qquad b=\beta^2-1;\qquad c=2a^2-bR_0^2;\qquad d=\alpha^2-a^2R_0;
$$

$$
k=\frac{\sqrt{2\beta^2-3}}{bR_0};\qquad l=b-1.
$$

З формул (37) видно, що через довільний переріз тіла $r = r_1 > r_0$ проходять два фронти пружних хвиль з швидкостями $c_1$ поздовжньої пружної хвилі та $c_\eta$ поширення збурень хімічного потенціалу. При цьому величини стрибків напружень на фронтах рівні

$$[\widetilde{\sigma}_r]_1 = [\widetilde{\sigma}_r]_\eta = \frac{\sigma_* R_0}{a^2 R}, \qquad [\widetilde{\sigma}_\varphi]_1 = [\widetilde{\sigma}_\theta]_1 = \left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\frac{\sigma_* R_0}{a^2 R},$$
$$[\widetilde{\sigma}_\varphi]_\eta = [\widetilde{\sigma}_\theta]_\eta = \left(1 - 2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\frac{\sigma_* R_0}{a^2 R}, \tag{38}$$

де індексами "1", "$\eta$" позначено стрибки, що поширюються зі швидкостями $c_1$ і $c_\eta$ відповідно.

При $\tau \to \infty$ напруження $\sigma_r$, $\sigma_\varphi$, $\sigma_\theta$ і хімічний потенціал $\eta$ прямують до своїх рівноважних значень

$$\sigma_r{}^0 = \frac{4R_0}{\beta^2 R^2}\left[\left(1 + \frac{1}{R}\right)e^{R_0 - R} - \frac{R_0 + 1}{R}\right],$$
$$\sigma_\varphi{}^0 = \sigma_\theta{}^0 = \frac{2R_0}{\beta^2 R}\left[\frac{R_0 + 1}{R} - \left(1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}\right)e^{R_0 - R}\right], \tag{39}$$
$$\eta^0 = \frac{R_0}{R}\,e^{R_0 - R},$$

що описують неоднорідність стану, зумовлену наявністю поверхні тіла (поверхневі явища в середовищі зі сферичною порожниною).


1. Бурак Я.Й. *Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки* // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1987. – N 12. – С. 19–23.
2. Бурак Я.И., Нагирный Т.С. *Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах* // Прикл.механика. – 1992.– Т.28, N 12. – С. 3–23.
3. Бурак Я.Й., Говда Ю.І., Нагірний Т.С. *Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень*//Доп. НАН України. – 1996. – N 2. – С. 39–43.
4. Новацкий В. Теория упругости. – М., Мир., 1975. – 872 с.


*Стаття надійшла до редколегії 21.01.96*