ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, серія механіко–математична Вип.47, 1997

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ШАРУ, ЩО ЗУМОВЛЕНЕ ФРИКЦІЙНИМ НАГРІВАННЯМ І ЗМІННИМ В ЧАСІ КОЕФІЦІЄНТОМ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Д. В. Грилицький

Grylitskiy D. V. Transient temperature field of a layer due to frictional heating and time-dependent coefficient of heat conduction. The nonstationary temperature field in a layer which is suspended to frictional heating on one side and to heat exchange with environment with time-dependent coefficient of heat conduction on other side is determined. Fourier limited integral transformation is applied to solve the problem. Received formulae for the temperature contains unknown temperature on the boundary. This temperature can be found from a Volterra integral equation of the second type which can be solved by any numerical method (for example, iterative).

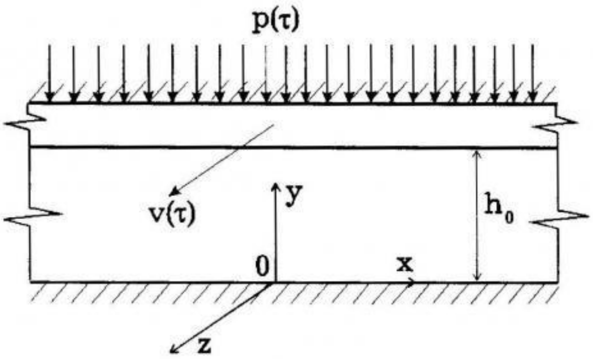
При формулюванні та побудові розв'язку граничних задач нестаціонарної теплопровідності з теплообміном звичайно припускають, що коефіцієнт тепловіддачі є сталою величиною впродовж усього процесу нагрівання тіла. Можна вказати лише поодинокі дослідження (див., наприклад, праці [1-3, 5] і посилання на них), в яких коефіцієнт тепловіддачі вважається змінним з часом або залежним від часу та температури поверхні тіла, що точніше відповідає реальним умовам теплообміну.

Нам не відома жодна праця, в якій було б сформульовано і розв'язано граничну задачу нестаціонарної теплопровідності з урахуванням фрикційного нагрівання і залежності коефіцієнта тепловіддачі від часу. У цій статті визначено нестаціонарне температурне поле в шарі, що зумовлене фрикційним нагріванням шару і залежним від часу коефіцієнтом тепловіддачі та температурою навколишнього середовища.

Нехай маємо плоскопаралельний шар товщини h_0, нижня площина якого жорстко закріплена, а зверху в нього втискується напруженням $p(t)$ жорстка безмежна плита. Припустимо, що плита рухається по поверхні шару з швидкістю $v(\tau)$ у напрямку осі z (рис.).

На площині контакту плити з шаром внаслідок дії тертя, що підпорядковане закону Амонтона, утворюється тепло, яке поширюється вглиб шару.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.



Між нижньою площиною шару і навколишнім середовищем, температура якого є $t_c(\tau)$, проходить теплообмін з відносним коефіцієнтом тепловіддачі $\gamma(\tau)$. При зроблених припущеннях знайдемо температурне поле $T(\tau, y)$ в шарі, яке буде за цих умов функцією часу τ і координати y. Сформульована задача зводиться до інтегрування рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T(\tau, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial T(\tau, y)}{\partial \tau} \tag{1}$$

при таких крайових і початкових умовах: при $\tau > 0$

$$y = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \gamma(\tau)\left[T(\tau, 0) - t_c(\tau)\right], \tag{2}$$

$$y = h_0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda^{-1}\alpha f v(\tau) p(\tau); \tag{3}$$

$$T(0, y) = 0. \tag{4}$$

У формулах (1)-(3) уведені такі позначення: f, k, λ, α – віповідно коефіцієнт тертя, температуропровідності, теплопровідності та розподілу теплових потоків між шаром і плитою. Граничну умову (2), наслідуючи [3], перетворимо до вигляду

$$y = 0: \ \frac{\partial T}{\partial y} = \gamma_0\left[T(\tau, 0) - T_c(\tau)\right], \ T_c(\tau) = \Gamma t_c(\tau) - (\Gamma - 1)T(\tau, 0), \ \Gamma(\tau) = \gamma_0^{-1}\gamma(\tau). \tag{5}$$

Через γ_0 позначено середню величину коефіцієнта тепловіддачі $\gamma(\tau)$ для всього процесу фрикційного нагрівання. Маючи на меті застосувати для розв'язання задачі скінченне інтегральне перетворення [4], введемо підстановку

$$T(\tau, y) = t(\tau, y) + \theta(\tau, y). \tag{6}$$

Тоді для знаходження функції $t(\tau, y)$ отримаємо таку задачу:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \psi(\tau, y), \tag{9}$$

$$\text{при} \quad \tau > 0: \quad y = 0: \quad \frac{\partial t}{\partial y} - \gamma_0 t = 0, \quad y = h_0: \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0; \tag{8}$$

$$t(0, y) = -\theta(0, y), \tag{9}$$

де

$$\psi(\tau, y) = \frac{1}{k}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \varphi(\tau, y). \tag{10}$$

Для функції $\theta(\tau, y)$ маємо умови

$$y = 0: \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \gamma_0(\theta - T_c); \quad y = h_0: \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \lambda^{-1}\alpha f v(\tau) p(\tau). \tag{11}$$

Функція $\theta(\tau, y)$ з наведених умов визначається неоднозначно. Наведемо для прикладу два її вирази, кожний з яких задовольняє умовам (11):

$$\begin{array}{c} \theta(\tau, y) = \frac{T_c(\tau)}{2}(1 + \cos\frac{\pi y}{h_0}) + \lambda^{-1}\alpha f v(\tau) p(\tau)(\gamma_0^{-1} + y), \\ \theta(\tau, y) = T_c(\tau) + \lambda^{-1}\alpha f v(\tau) p(\tau)(\gamma_0^{-1} + y) \end{array}. \tag{12}$$

Зауважимо, що функція $\theta(\tau, y)$, крім умов (11), входить ще у рівняння (7) і початкову умову (9) для визначення функції $t(\tau, y)$. Функція $\psi(\tau, y)$ знаходиться на підставі формул (10) і (12).

Для розв'язання задачі вводимо скінченне інтегральне перетворення

$$\bar{t}(\tau, \mu) = \int_0^{h_0} t(\tau, y) K(\mu, y)\, dy, \tag{13}$$

де μ та $K(\mu, y)$ – відповідно параметр та ядро перетворення, які знаходяться із задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2 K}{dy^2} + \mu^2 K = 0, \tag{14}$$

$$y = 0: \quad \frac{dK}{dy} - \gamma_0 K = 0, \qquad y = h_0: \quad \frac{dK}{dy} = 0. \tag{15}$$

Для визначення μ отримуємо трансцендентне рівняння

$$\mu \text{ tg } \mu h_0 = \gamma_0, \tag{16}$$

яке має безліч додатних коренів μ_i.

Для ядра маємо такий вираз

$$K(\mu_i, y) = \sin \mu_i y + \gamma_0^{-1} \mu_i \cos \mu_i y. \tag{17}$$

У просторі зображень замість співвідношень (9)-(12) будемо мати звичайне диференціальне рівняння для функції $\bar{t}(\tau, \mu)$

$$\frac{d\bar{t}(\tau, \mu)}{d\tau} = -k\mu^2 \bar{t}(\tau, \mu) - k\overline{\psi}(\tau, \mu) \tag{18}$$

при початковій умові

$$\bar{t}(0, \mu) = -\overline{\theta}(0, \mu), \tag{19}$$

де

$$\overline{\theta}(0,\mu) = \int_0^{h_0} \theta(0,y) K(\mu,y)\, dy, \tag{20}$$

$$\overline{\psi}(\tau,\mu) = \int_0^{h_0} \left[\frac{1}{k}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \varphi(\tau,y)\right] K(\mu,y) dy. \tag{21}$$

Розв'язок рівняння (18) при умові (19) можна записати співвідношенням

$$\overline{t}(\tau,\mu) = e^{-k\mu^2\tau}\left[-\overline{\theta}(0,\mu) - \int_0^\tau \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial u} e^{k\mu^2 u}\, du + k\int_0^\tau \overline{\varphi}(u,\mu) e^{k\mu^2 u}\, du\right], \tag{22}$$

яке можна перетворити до вигляду

$$\overline{t}(\tau,\mu) = -\overline{\theta}(\tau,\mu) + k e^{-k\mu^2\tau}\left[\mu^2\int_0^\tau \overline{\theta}(u,\mu) e^{k\mu^2 u}\, du + +\int_0^\tau \overline{\varphi}(u,\mu) e^{k\mu^2 u}\, du\right]. \tag{23}$$

Вираз (23) дає розв'язок задачі (7)-(9) в зображеннях.

Температура в шарі визначиться за формулою обернення

$$t(\tau,y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\ \overline{t}(\tau,\mu_i) K(\mu_i,y), \tag{24}$$

де сумування проходить по всіх додатних коренях μ_i рівняння (16), а для знаходження коефіцієнтів C_i служить співвідношення

$$C_i = \left\{\int_0^{h_0} \left[K(\mu_i,y)\right]^2 dy\right\}^{-1}. \tag{25}$$

На підставі (6),(23),(24) маємо таку формулу для обчислення температури $T(\tau,y)$:

$$T(\tau,y) = k\sum_{i=1}^{\infty} C_i K(\mu_i,y) e^{-k\mu_i^2\tau}\left[\mu_i^2\int_0^\tau \overline{\theta}(u,\mu_i) e^{k\mu_i^2 u}\, du + \right.$$
$$\left. + \int_0^\tau \overline{\varphi}(u,\mu_i) e^{k\mu_i^2 u}\, du\right]. \tag{26}$$

Якщо скористатися першим виразом (12) для функції $\theta(\tau,y)$, то отримаємо такі співвідношення для $\overline{\theta}(\tau,\mu)$ і $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$:

$$\overline{\theta}(\tau,\mu) = \frac{T_c(\tau)}{2}\left\{\frac{1-\cos\mu h_0}{\mu} + \frac{\sin\mu h_0}{\gamma_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu h_0^2\left[\gamma_0(1+\cos\mu h_0) - \mu\sin\mu h_0\right]}{\gamma_0(\pi^2 - \mu^2 h_0^2)}\right\} + (\lambda\gamma_0)^{-1}\alpha f v(\tau) p(\tau) \times$$

$$\times \left[(h_0 + \gamma_0^{-1} + \gamma_0 \mu^{-2}) \sin \mu h_0 - \mu^{-1} \gamma_0 h_0 \cos \mu h_0 \right] \tag{27}$$

$$\overline{\varphi}(\tau, \mu) = \frac{\pi^2 \mu T_c(\tau)}{2\gamma_0} \left[\frac{\gamma_0 (1 + \cos \mu h_0) - \mu \sin \mu h_0}{\pi^2 - \mu^2 h_0^2} \right]. \tag{28}$$

У правій частині формули (26) (див. співвідношення (27) і (28)) фігурують функції θ і φ, які лінійно залежать через $T_c(\tau)$ від невідомої температури поверхні шару $T(\tau, 0)$.

Покладаючи у (26) $y = 0$ і міняючи порядок сумування та інтегрування, отримуємо для визначення $T(\tau, 0)$ лінійне інтегральне рівняння типу Вольтера другого роду

$$T(\tau, 0) = k \int_0^\tau \left\{ \sum_{i=1}^\infty C_i \overline{\theta} \left[u, T(u, 0), \mu_i \right] \mu_i^2 K(\mu_i, 0) e^{-k\mu_i^2(\tau - u)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^\infty C_i \overline{\varphi} \left[u, T(u, 0), \mu_i \right] K(\mu_i, 0) e^{-k\mu_i^2(\tau - u)} \right\} du. \tag{29}$$

Розв'язок рівняння (29) можна отримати, наприклад, методом послідовних наближень. За нульове наближення доцільно взяти температуру навколишнього середовища $T^{(0)}(\tau, 0) = t_c(\tau)$. Тоді у першому наближенні отримаємо розв'язок, який відповідатиме сталому коефіцієнту тепловіддачі γ_0 і температурі навколишнього середовища $t_c(\tau)$, а наступні наближення дадуть поправки, які враховуватимуть зміну коефіцієнта тепловіддачі в процесі фрикційного нагрівання.

Визначивши температуру поверхні $T(\tau, 0)$ і підставивши її у формулу (26), знайдемо розв'язок сформульованої задачі.

Викладену методику можна застосувати і в інших, більш складніших задачах з урахуванням фрикційного нагрівання і залежним від часу коефіцієнтом тепловіддачі.

1. Сідляр М. М. *Визначення нестаціонарного температурного поля в двошаровій пластині у випадку змінного в часі коефіцієнта тепловіддачі*// Прикладна механіка. – 1963. – Т. IX, вып. 3. – С. 308-314.
2. Сидляр М. М. *Об интегрировании уравнения теплопроводности в случае изменения во времени коэффициента теплоотдачи*// Сб. "Тепловые напряжения в элементах конструкций" (Доклады научного совещания), К., Изд. АН УССР. – 1963. – Вып.3. – С. 38-44.
3. Юдин В. М. *Метод решения задач теплопроводности при переменном коэффициенте теплоотдачи*// Сб. "Тепловые напряжения в элементах конструкций" (Доклады научного совещания), К., Наукова думка. – 1965. – Вып.5. – С. 68-75.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М., Физматгиз, 1962. – 767 с.
5. Вигак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – К., Наукова думка, 1979. – 355 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.96