УДК 539.3

КВАЗІСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО КРУГЛОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА З ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ ВІД ТЕРТЯ. НЕОБМЕЖЕНІ В ЧАСІ РОЗВ'ЯЗКИ

Д. В. Грилицький, Ю. Є. Никон

Grylitskiy D. V., Nykon Y. Ye. Quasi-static thermoelastic contact problem for two-layer circular orthotropic cylinder with frictional heating. Time unbounded solutions. The time unbounded solutions of one-dimension transient problem of heatconduction and the corresponding quasi-static thermoelastic problem for a two-layer circular orthotropic cylinder with heat generation due to friction under imperfect heat contact of layers at instant of time far from the beginning are studied. The external radial load and unknown characteristics in a cylinder are represented by time-dependent polynomials. The partial case of the linear dependence is considered in details. The corresponding temperature fields, radial displacements and stresses were found.

Стаціонарна задача теплопровідності та відповідна статична задача термопружності для двошарового ортотропного циліндра з урахуванням фрикційного нагріву була розглянута в праці [1]. Тут ми дослідимо необмежені за часом розв'язки [2] просторово-одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності та відповіної задачі термопружності для двошарового ортотропного циліндра з теплоутворенням від тертя в момент часу, що достатньо віддалений від початкового.

Нехай маємо двошаровий круглий ортотропний циліндр. Один пустотілий циліндр з внутрішнім радіусом $r = a$ і зовнішнім радіусом $r = c$ вставлений в такої ж форми другий циліндр з внутрішнім радіусом $r = c$ і зовнішнім радіусом $r = b$. Механічні та теплофізичні характеристики матеріалу внутрішнього циліндра будемо позначати індексом "1", а зовнішнього циліндра – індексом "2". Матеріали пакету є циліндрично-ортотропними. Нехай до такої системи з боку внутрішньоі та зовнішньоі іі поверхонь прикладені нормальні стискуючі напруження, що зображені поліномами за часом:

$$\sigma_r^{(1)}(a) = -q^{(1)} = -\sum_{m=0}^{n} q_m^{(1)}\tau^m \qquad \sigma_r^{(2)}(b) = -q^{(2)} = -\sum_{m=0}^{n} q_m^{(2)}\tau^m. \tag{1}$$

Припустимо, що другий циліндр по зовнішній поверхні закріплений так, що не може обертатися відносно своєі осі, а перший циліндр обертається навколо своєі з малою кутовою швидкістю ω.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.

© Д. В. Грилицький, Ю. Є. Никон, 1997

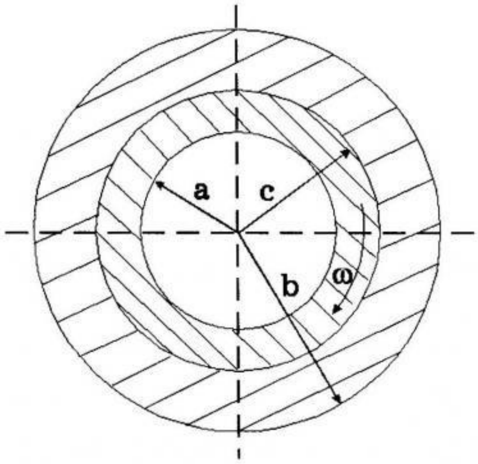

Рис. 1

За рахунок сил тертя, що підпорядковані закону Амонтона, на поверхні співдотику циліндрів буде утворюватися тепло, яке буде поширюватися вглиб кожного з співдотичних тіл. Між циліндрами виконується неідеальний тепловий контакт, а з бічних поверхонь пакету в навколишнє середовище, що має нульову температуру, проходить віддача тепла за законом Ньютона.

Визначимо розподіл температурних полів, напруження і переміщення в пакеті тіл, враховуючи відцентрову силу, що діє на внутрішній циліндр.

Оскільки поставлена задача є плоскою і полярно–симетричною, то всі шукані характеристики будуть функціями лише радіальної координати r та часу τ. Наведемо основні співвідношення, якими користуватимемось в процесі побудови розв'язку задачі. У подальших формулах параметр "і" може приймати значення 1 або 2 в залежності від того, у якому циліндрі визначається шукана характеристика.

Рівняння теплопровідності:

$$k_i\left(\frac{d^2t^{(i)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt^{(i)}}{dr}\right)=\frac{dt^{(i)}}{d\tau}, \tag{2}$$

k_i – коефіцієнти теплопровідності в радіальному напрямку.

Рівняння термопружності в переміщеннях:

$$\frac{d^2u_r^{(i)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r^{(i)}}{dr}-\frac{g^2}{r^2}u_r^{(i)}=\delta_1^{(i)}\frac{dt^{(i)}}{dr}+\delta_2^{(i)}\frac{t^{(i)}}{r}+\delta_3^{(i)}r, \tag{3}$$

де

$$g_i^2=\frac{\beta_{11}^{(i)}}{\beta_{22}^{(i)}},\qquad \delta_1^{(i)}=\left(\frac{\beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)}}{\beta_{22}^{(i)}}\right);$$

$$\delta_2^{(i)}=\left(\frac{\beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{11}^{(i)}+\beta_1^{(i)}\beta_{12}^{(i)}}{\beta_{22}^{(i)}}\right);$$

$$\delta_3^{(i)}=\frac{-\rho_i\omega_i^2\left(\beta_{11}^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-(\beta_{12}^{(i)})^2\right)}{\beta_{12}^{(i)}},\quad \beta_{jk}^{(i)}=a_{jk}^{(i)}-\frac{a_{j3}^{(i)}a_{k3}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}};\ \beta_m^{(i)}=\alpha_m^{(i)}-\frac{\alpha_3^{(i)}a_{m3}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}}; \tag{4}$$

$$\omega_1=\omega,\qquad \omega_2=0.$$

Граничні та контактні умови:

а) **теплові**

$$r = a: \quad \frac{dt^{(1)}}{dr} = \gamma_1 t^{(1)}; \quad r = b: \frac{dt^{(2)}}{dr} = -\gamma_2 t^{(2)}; \tag{5}$$
$$r = c: \quad \lambda_1 \frac{dt^{(1)}}{dr} - \lambda_2 \frac{dt^{(2)}}{dr} = \omega c f p(\tau), \quad \lambda_1 \frac{dt^{(1)}}{dr} + \lambda_2 \frac{dt^{(2)}}{dr} + h(t^{(1)} - t^{(2)}) = 0;$$

б)**механічні:**

$$r = a: \quad \sigma_r^{(1)} = -q^{(1)} = -\sum_{m=0}^{n} q_m^{(1)} \tau^m; \quad r = b: \quad \sigma_r^{(2)} = -q^{(2)} = -\sum_{m=0}^{n} q_m^{(2)} \tau^m;$$
$$r = c: \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}) = -p(\tau) = -\sum_{m=0}^{n} p_m \tau^m; \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}. \tag{6}$$

У формулах (3–6) введені позначення: γ_i – відносні коефіцієнти теплообміну; f – коефіцієнт тертя; h – термічна провідність поверхні контакту циліндрів; λ_i – коефіцієнти теплопровідності; $a_{jk}^{(i)}$ – компоненти тензора пружних податливостей матеріалу; $\alpha_m^{(i)}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення; $p(\tau)$ – тиск між циліндрами.

Отже, сформульована задача звелася до побудови розв'язків диференціальних рівнянь (2),(3) при умовах (5),(6).

Зінтегруємо рівняння теплопровідності (2) при умовах (5). Припустимо, що температурні поля в складових пакету, як і тиск між циліндрами, зображаються у вигляді поліномів за часом

$$t^{(i)}(r) = \sum_{m=0}^{n} t_m^{(i)}(r) \tau^m, \tag{7}$$

де $q_m^{(i)}$ – задані коефіцієнти; $p_m(r), t_m^{(i)}(r)$ – шукані коефіцієнти. Підставивши (7) в (2),(5) та зрівнявши коефіцієнти при одинакових степенях τ, отримаємо систему рівнянь для визначення функцій $t_m^{(i)}(r)$ та умови на них:

$$\begin{cases} k_i \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) t_{n-j}^{(i)} = (n - j + 1) t_{n-j+1}^{(i)}, \quad j = (1, 2, ..., n), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) t_n^{(i)} = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$r = a: \quad \frac{dt_{n-j}^{(1)}}{dr} = \gamma_1 t_{n-j}^{(1)}; \quad r = b: \quad \frac{dt_{n-j}^{(2)}}{dr} = -\gamma_2 t_{n-j}^{(2)};$$
$$r = c: \quad \lambda_1 \frac{dt_{n-j}^{(1)}}{dr} - \lambda_2 \frac{dt_{n-j}^{(2)}}{dr} = \omega c f p_{n-j}(\tau), \tag{9}$$
$$\lambda_1 \frac{dt_{n-j}^{(1)}}{dr} + \lambda_2 \frac{dt_{n-j}^{(2)}}{dr} + h(t_{n-j}^{(1)} - t_{n-j}^{(2)}) = 0, j = (0, 1, ..., n).$$

Розв'язки системи рівнянь (8) задаються формулами

$$t_{n-j}^{(i)}(r) = \frac{n!}{(n-j)!}\frac{1}{k_i^j}\sum_{m=1}^{j}\left(a_{j,m}^{(i)} + b_{j,m}^{(i)}\ln r\right)r^{2m}, j = (0, 1, ..., n), \tag{10}$$

де $a_{j,m}^{(i)}, b_{j,m}^{(i)}$ – коефіцієнти інтегрування, які визначаються із співвідношень (8) та (9).

Детальніше розглянемо частинний випадок, покладаючи $n = 1, j = 0, 1$. Підставляючи (10) в (8) і (9), отримаємо систему 12 рівнянь з 12 невідомими, приймаючи p_0, p_1 за відомі величини. Розв'язавши цю систему, отримаємо величини $a_{j,l}^{(i)}$, $b_{j,l}^{(i)}$ у вигляді:

$$\begin{gathered} a_{00}^{(i)} = \bar{a}_{00}^{(i)}p_1, \qquad a_{11}^{(i)} = \bar{a}_{11}^{(i)}p_1, \quad b_{00}^{(i)} = \bar{b}_{00}^{(i)}p_1, \qquad b_{11}^{(i)} = \bar{b}_{11}^{(i)}p_1, \\ a_{10}^{(i)} = \bar{a}_{10}^{(i)}p_1 + \tilde{a}_{10}^{(i)}p_0, \qquad b_{10}^{(i)} = \bar{b}_{10}^{(i)}p_1 + \tilde{b}_{10}^{(i)}p_0, \end{gathered} \tag{11}$$

де $\bar{a}_{10}^{(i)}p_1$, $\tilde{a}_{10}^{(i)}p_0$, $\bar{b}_{10}^{(i)}p_1$, $\tilde{b}_{10}^{(i)}p_0$ –деякі коефіцієнти, значення яких тут не наводимо через обмеження обсягу статті.

Для нашого часткового випадку маємо

$$t^{(i)}(r) = t_0^{(i)}(r) + t_1^{(i)}(r)\tau, \tag{12}$$

де

$$\begin{gathered} t_0^{(i)}(r) = k_i^{-1}\left[(a_{10}^{(i)} + b_{10}^{(i)}\ln r) + (a_{11}^{(i)} + b_{10}^{(i)}\ln r)r^2\right], \\ t_1^{(i)}(r) = a_{00}^{(i)} + b_{00}^{(i)}\ln r. \end{gathered} \tag{13}$$

Підставивши значення $a_{j,l}^{(i)}, b_{j,l}^{(i)}$ з формул (11) в (12) , одержимо температуру у вигляді

$$t^{(i)}(r) = \phi_0^{(i)}(r)p_0 + \left[\phi_1^{(i)}(r) + \phi_2^{(i)}(r)\right]p_1, \tag{14}$$

де

$$\begin{gathered} \phi_0^{(i)}(r) = k_i^{-1}(\tilde{a}_{10}^{(i)} + \tilde{b}_{10}^{(i)}\ln r), \quad \phi_1^{(i)}(r) = k_i^{-1}\left[\bar{a}_{10}^{(i)} + \bar{b}_{10}^{(i)}\ln r + (\bar{a}_{11}^{(i)} + \bar{b}_{11}^{(i)}\ln r)r^2\right], \\ \phi_2^{(i)}(r) = \bar{a}_{00}^{(i)} + \bar{b}_{00}^{(i)}\ln r. \end{gathered}$$

Перейдемо до побудови розв'язку задачі термопружності, тобто до знаходження переміщень $t_r^{(i)}$ і напружень $\sigma_r^{(i)}$в циліндрах. Зінтегруємо рівняння термопружності (3). Для цього, попередньо скориставшись формулами (13), надамо правій частині рівняння (3) вигляду

$$\delta_1^{(i)}\frac{dt^{(i)}}{dr} + \delta_2^{(i)}\frac{t^{(i)}}{r} + \delta_3^{(i)}r = d_1^{(i)}\frac{1}{r} + d_2^{(i)}r + d_3^{(i)}\frac{\ln(r)}{r} + d_4^{(i)}r\ln(r), \tag{15}$$

де

$$d_1^{(i)} = \delta_2^{(i)}(k_i^{-1}a_{10}^{(i)} + \tau a_{00}^{(i)}) + \delta_1^{(i)}(k_i^{-1}b_{10}^{(i)} + \tau b_{00}^{(i)});$$
$$d_2^{(i)} = \delta_2^{(i)}k_i^{-1}a_{11}^{(i)} + \delta_1^{(i)}k_i^{-1}(b_{11}^{(i)} + 2a_{11}^{(i)}) + d_3^{(i)};$$
$$d_3^{(i)} = \delta_2^{(i)}(k_i^{-1}b_{10}^{(i)} + \tau b_{00}^{(i)}); \quad d_4^{(i)} = (\delta_2^{(i)} + \delta_1^{(i)})k_i^{-1}b_{11}^{(i)}. \tag{16}$$

Розв'язок рівняння (3) запишеться у вигляді

$$u_r^{(i)}(r) = A_i^* r^{g_i} + B_i^* r^{-g_i} + A_i(r)r^{g_i} + B_i(r)r^{-g_i}, \tag{17}$$

де A_i^*, B_i^* – сталі інтегрування, $A_i(r)$, $B_i(r)$ – частинні розв'язки неоднорідного рівняння (3), знайдені методом варіації сталих:

$$\begin{aligned} A_i(r) &= z_{11}^{(i)}(r)p_0 + \left[z_{21}^{(i)}(r) + z_{31}^{(i)}(r)\tau\right]p_1 + z_{41}^{(i)}(r); \\ B_i(r) &= z_{12}^{(i)}(r)p_0 + \left[z_{22}^{(i)}(r) + z_{32}^{(i)}(r)\tau\right]p_1 + z_{42}^{(i)}(r), \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$z_{1,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\left[(\delta_2^{(i)}\tilde{a}_{10}^{(i)} + \delta_1^{(i)}\tilde{b}_{10}^{(i)}\eta_{1,j}(r,a_i,g_i) + \delta_2^{(i)}\tilde{b}_{10}^{(i)}\xi_{1,j}(r,a_i,g_i)\right]/(2g_ik_i);$$
$$z_{2,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\Big[(\delta_2^{(i)}\overline{a}_{10}^{(i)} + \delta_1^{(i)}\overline{b}_{10}^{(i)})\eta_{1,j}(r,a_i,g_i) +$$
$$+(\delta_2^{(i)}\overline{a}_{11}^{(i)} + \delta_1^{(i)}(\overline{b}_{11}^{(i)} + 2\overline{a}_{11}^{(i)}))\eta_{3,j}(r,a_i,g_i) + \delta_2^{(i)}\overline{b}_{10}^{(i)}\xi_{1,j}(r,a_i,g_i) +$$
$$+(\delta_2^{(i)} + 2\delta_1^{(i)})\overline{b}_{11}^{(i)}\xi_{3,j}(r,a_i,g_i)\Big]/(2g_ik_i);$$
$$z_{3,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\left[(\delta_2^{(i)}\overline{a}_{00}^{(i)} + \delta_1^{(i)}\overline{b}_{00}^{(i)})\eta_{1,j}(r,a_i,g_i) + \delta_2^{(i)}\overline{b}_{00}^{(i)}\xi_{1,j}(r,a_i,g_i)\right]/(2g_i),$$
$$z_{4,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\delta_3^{(i)}\eta_{3,j}(r,a_i,g_i)/(2g_i); \quad j = 1,2;$$
$$\eta_{j,i}(r,a_i,g_i) = \frac{(r^{j+(-1)^l g_i} - a_i^{j+(-1)^l g_i})}{(j+(-1)^l g_i)};$$
$$\xi_{j,i}(r,a_i,g_i) = \frac{(r^{j+(-1)^l g_i}\ln r - a_i^{j+(-1)^l g_i}\ln a_i)}{(j+(-1)^l g_i)} - \frac{(r^{j+(-1)^l g_i} - a_i^{j+(-1)^l g_i})}{(j+(-1)^l g_i)^2}. \tag{19}$$

Формулу для $\sigma_r^{(i)}(r)$ беремо з [1]:

$$\sigma_r^{(i)}(r) = (Y_1^{(i)})^{-1}\left[[A_i^* + A_i(r)]\Phi_1^{(i)}r^{g_i-1} - [B_i^* + B_i(r)]\Phi_2^{(i)}r^{-g_i-1} - Y_2^{(i)}t^{(i)}(r)\right], \tag{20}$$

де

$$Y_1^{(i)} = \beta_{11}^{(i)}\beta_{22}^{(i)} - (\beta_{12}^{(i)})^2; \quad Y_2^{(i)} = \beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)} - \beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)}; \quad \Phi_j^{(i)} = g_i\beta_{22}^{(i)} + (-1)^j\beta_{12}^{(i)}.$$

Сталі інтегрування A_i^* та B_i^* знаходимо з граничних умов (6), використовуючи формули (14), (18), (20):

$$A_i^* = N_1^{(i)} q_0^{(i)} + N_2^{(i)} q_1^{(i)} \tau + N_3^{(i)} p_0^{(i)} + (N_4^{(i)} + N_5^{(i)} \tau) p_1^{(i)} + N_6^{(i)};$$
$$B_i^* = \Pi_1^{(i)} q_0^{(i)} + \Pi_2^{(i)} q_1^{(i)} \tau + \Pi_3^{(i)} p_0^{(i)} + (\Pi_4^{(i)} + \Pi_5^{(i)} \tau) p_1^{(i)} + \Pi_6^{(i)}, \tag{21}$$

де

$$N_1^{(1)} = N_2^{(1)} = Y_1^{(1)} \left[(c/a)^{g_1 - 1} - S_{11} / (\Phi_1^{(1)} a^{g_1 - 1}) \right];$$
$$\Pi_1^{(1)} = \Pi_2^{(1)} = Y_1^{(1)} (c/a)^{g_1 - 1} S_{12};$$
$$N_1^{(2)} = N_2^{(2)} = -Y_1^{(2)} S_{21}; \qquad \Pi_1^{(2)} = \Pi_2^{(2)} = -Y_1^{(2)} S_{22};$$
$$N_j^{(i)} = \Big[\quad [\Delta_{ij} Y_1^{(i)} - Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(a_i)] (c_i/a_i)^{g_i - 1} - \theta_{ij} Y_1^{(i)} -$$
$$-z_{j-2,1}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} + z_{j-2,2}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} + Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(c_i) \Big] S_{i1} +$$
$$+ [Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(a_i) - \Delta_{ij} Y_1^{(i)}] / (\Phi_1^{(i)} a_i^{g_i - 1});$$
$$\Pi_j^{(i)} = \Big[\quad [\Delta_{ij} Y_1^{(i)} - Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(a_i)] (c_i/a_i)^{g_i - 1} - \theta_{ij} Y_1^{(i)} -$$
$$-z_{j-2,1}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} + z_{j-2,2}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} + Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(c_i) \Big] S_{i2};$$
$$N_6^{(i)} = \left[z_{42}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} - z_{41}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} \right] S_{i1};$$
$$\Pi_6^{(i)} = \left[z_{42}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} - z_{41}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} \right] S_{i2};$$
$$S_{ij} = \left[(-1)^j \Phi_j^{(i)} (a_i^{(-1)^{j+1} 2 g_i} c_i^{(-1)^j g_i - 1} - c^{(-1)^{j+1} g_i - 1}) \right]^{-1};$$
$$a_1 = a \quad ; \quad a_2 = c \quad ; \quad c_1 = c; \quad c_2 = b;$$
$$\theta_{2j} = 0 \quad ; \quad \theta_{13} = 1 \quad ; \quad \theta_{14} = 0 \quad ; \quad \theta_{15} = 1,$$
$$\Delta_{1j} = \theta_{2j} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2; \quad j = (3, 4, 5).$$

У нас залишився невизначеним тиск $p = p_0 + \tau p_1$ між контактуючими циліндрами. Знайдемо його з умови $u_r^{(1)}(c) = u_r^{(2)}(c)$, скориставшись при цьому формулою (17)

$$p_0 = T_{01} q_0^{(1)} + T_{02} q_0^{(2)} + T_{11} q_1^{(1)} + T_{12} q_1^{(2)} + T_2; \quad p_1 = T_{31} q_1^{(1)} + T_{32} q_1^{(2)}, \tag{22}$$

де

$$T_{01} = \frac{-m_1}{(m_3 - n_3)} \quad , \quad T_{02} = \frac{n_1}{(m_3 - n_3)};$$

$$T_{11}=\frac{m_2(n_4-m_4)}{(m_3-n_3)(n_5-m_5)};\quad T_{12}=\frac{-n_2(n_4-m_4)}{(m_3-n_3)(n_5-m_5)};$$

$$T_{31}=\frac{m_2}{(n_5-m_5)}\quad;\quad T_{32}=\frac{-n_2}{(n_5-m_5)}\quad;\quad T_2=\frac{(n_6-m_6)}{(m_3-n_3)};$$

$$m_j=N_j^{(1)}c^{g_1}+\Pi_j^{(1)}c^{-g_1}+\Omega_j\left[z_{j-2,1}^{(1)}(c)c^{g_1}+z_{j-2,2}^{(2)}(c)c^{-g_1}\right];$$

$$n_j=N_j^{(2)}c^{g_2}+\Pi_j^{(2)}c^{-g_2}\quad,\quad j=(1,2,...,6);$$

$$\Omega_1=\Omega_2=0\quad;\quad\Omega_s=1\quad s=(3,4,5,6).$$

Отже, тиск між циліндрами визначається за формулами (22) з урахуванням всіх вище наведених співвідношень. Підставляючи значення p_0 і p_1 в (14), (17), (20), отримаємо формули для знаходження відповідно температури, переміщень і напружень у пакеті.

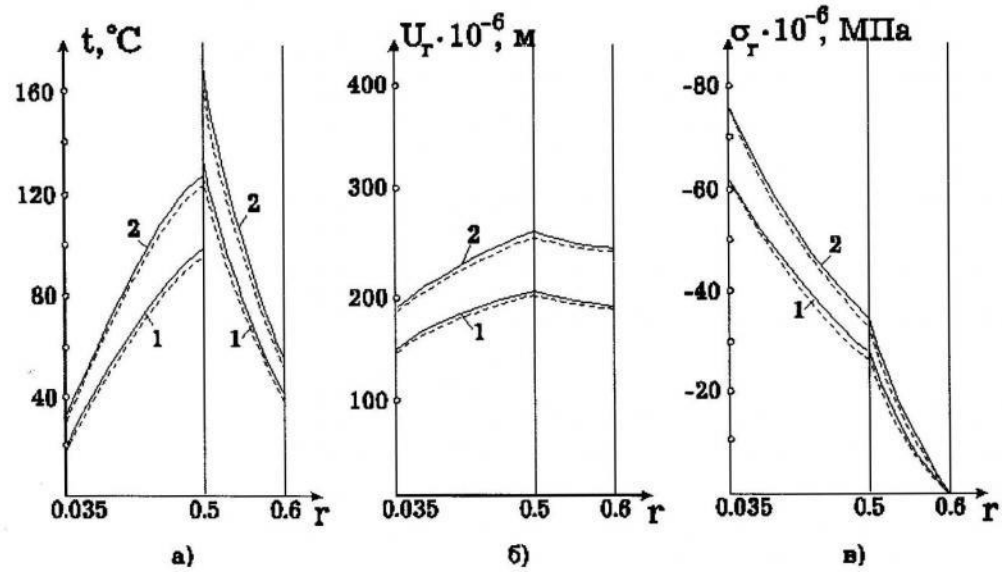

Рис. 2

Числові дослідження задачі проведено для пари тертя склопластик - склопластик:

$$E_r^{(1)}=0.5\cdot10^{10}H/m^2;\quad E_\theta^{(1)}=E_z^{(1)}=1.45\cdot10^{10}H/m^2;$$

$$E_r^{(2)}=1.0\cdot10^{10}H/m^2;\ E_\theta^{(2)}=E_z^{(2)}=3.75\cdot10^{10}H/m^2;$$

$$v_{\theta z}^{(1)}=v_{zr}^{(1)}=0.23,\quad v_{\theta r}^{(1)}=0.145,\quad v_{\theta z}^{(2)}=v_{zr}^{(2)}=0.21,\quad v_{\theta r}^{(2)}=0.085,$$

$$\alpha_r^{(1)}=7.1\cdot10^{-5}\quad{}^0K^{-1},\alpha_\theta^{(1)}=\alpha_z^{(1)}=1.2\cdot10^{-5}\quad{}^0K^{-1};$$

$$\alpha_r^{(2)}=4.0\cdot10^{-5}\quad{}^0K^{-1},\alpha_\theta^{(2)}=\alpha_z^{(2)}=0.9\cdot10^{-5}\quad{}^0K^{-1};$$

$$\lambda_1=10\quad Вт/(m^0K),\lambda_2=5Вт/(m^0K)),$$

та значень основних параметрів:

$$q_1^0 = 10^6 M\Pi a, \quad q_1^1 = 0.510^6 M\Pi a, \quad q_2^0 = 0 M\Pi a, \quad q_2^1 = 0 M\Pi a; \quad f = 0.1;$$
$$\omega = 0.3\text{рад/с}, \qquad h = 8000\text{кВт}/(m^2 \quad {}^0K), \quad \gamma_1 = 11m^{-1}, \gamma_2 = 15m^{-1},$$
$$a = 0.035m, \quad c = 0.05m, \quad b = 0.06m$$

для моментів часу $\tau = 120$ сек. та $\tau = 150$сек.

Отримані результати подані на рис. 2 у вигляді графіків, де індексом "1" позначені графіки $t^{(i)}(r)$, $u_r^{(i)}(r)$, $\sigma_r^{(i)}(r)$ для моменту часу $\tau = 120$ сек., а індексом "2"– для моменту часу $\tau = 150$ сек. Пунктиром зображені графіки тих же функцій без врахування відцентрової сили.

Як видно з графіків, максимальні значення температури та радіальних переміщень досягаються на поверхні контакту. Функція температури розривна, бо ми припускали неідеальний тепловий контакт. Врахування відцентрової сили приводить до збільшення напружень у пакеті на величину порядку 10^3 МПа, приріст температури дуже незначний (приблизно $10^{-3} \quad {}^0C$), переміщення у пакеті зростають на величину порядку $10^{-8}m$.

1. Гриліцький Д. В., Мандзик Ю. І. *Температурне поле і термопружний стан двошарового ортотропного циліндра за фрикційного нагріву*// Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. - 1994. – – Вип. 40. – С. 57-63.

2. Підстригач Я. С. *Температурне поле в стінках постійної товщини при асимптотичному тепловому режимі*// Зб. "Температурні напруження в тонкостінних конструкціях". Видавництво АН УРСР, К., 1959. – С. 109-122.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.96