УДК 517.956

МЕТОД ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У КОМПОЗИТНОМУ ТІЛІ СКІНЧЕННОГО ПЕРЕРІЗУ

В. С. Грицевич

Gritsevich V. S. The continued-function method for plane problem of heat conduction in composite solid with limited section. The concept of an L - canonical plane area is introduced. The problem of heat conduction is considered which models the heat spreading in prism with arbitrary limited section that warmed up by prismatic inclusions. The third type of boundary condition on the bound of prism is set. The solving equation is received, which contains the asymmetric plane delta-function. The solution of a problem is obtained in form of double representation with help of series. Firstly the heat function is found in inclusion sections. The whole solution is represented in the closed form by coefficients that are found from the system of linear equations.

Нехай L - лінійний диференціальний оператор, визначений на функціях, заданих у плоскій області V. Назвемо цю область L-канонічною, якщо у ній відомий розв'язок двовимірної задачі на власні значення для оператора L.

Розглянемо задачу теплопровідності для обмеженої $-\Delta$-канонічної (Δ – оператор Лапласа) області V, яка містить M тепловиділяючих включень V_m $-\Delta$-канонічої форми, $m = 1, ..., M$. Задача моделює поширення тепла в призмі скінченного перерізу з призматичними нагрівальними елементами. Розв'язувальне рівняння має вигляд

$$-\Delta t = \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{\lambda_m} S_m(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{\partial t}{\partial n_m}\bigg|_{\Gamma_m} \delta_m^-. \tag{1}$$

Тут

$$S_m(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (x_1, x_2) \notin V_m, \\ 1, \text{ якщо } (x_1, x_2) \in V_m, \end{cases}$$

δ_m^- – двовимірна асиметрична дельта-функція [1].

На границі V відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона, тобто задається гранична умова 3-го роду

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \beta t \right)\bigg|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.

Метод продовження функцій полягає у тому, що розв'язок спочатку шукається в підобластях V_m, а потім продовжується на всю область V.

Для шуканого розв'язку $t(x_1, x_2)$ розглядається його подвійне зображення:

$$t(x_1, x_2) = t_0(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^{M} \theta_m(x_1, x_2) S(x_1, x_2), \tag{3}$$

$$t(x_1, x_2) = \frac{\lambda_0 t_0(x_1, x_2)}{\lambda(x_1, x_2)} + \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \chi_m(x_1, x_2) S_m(x_1, x_2), \tag{4}$$

де функції θ_m, χ_m зв'язані співвідношенням $\lambda_m(t_0 + \theta_m) = \lambda_0(t_0 + \chi_m)$ на V_m і задовольняють граничні умови: $\theta_m|_{\Gamma_m} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \chi_m}{\partial n_m}\right|_{\Gamma_m} = 0.$

Останні рівності забезпечують виконання умов ідеального теплового контакту між основним матеріалом та матеріалом включень.

Можна показати, що θ_m, χ_m задовольняють такі рівняння:

$$-\Delta\theta_m = -\Delta t_0 + \frac{Q_m}{\lambda_m}, \qquad -\Delta\chi_m = -\Delta t_0 + \frac{Q_m}{\lambda_0} \text{ в } V_m. \tag{5}$$

Функції θ_m, χ_m шукаємо як розвинення в ряди за відповідними системами ортонормованих функцій:

$$\theta_m = \sum_{j=1}^{\infty} B_j^m Y_j^m, \qquad \chi_m = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^m Z_k^m \text{ на } V_m, \tag{6}$$

де Y_j^m, Z_k^m є розв'язками таких задач на знаходження власних значень:

$$-\Delta Y_j^m = \nu_j^m Y_j^m,\ \ Y_j^m|_{\Gamma_m} = 0; \quad -\Delta Z_k^m = \rho_k^m Z_k^m,\ \ \left.\frac{\partial Z_k^m}{\partial n_m}\right|_{\Gamma_m} = 0.$$

Функцію t_0 шукаємо як розвинення у такий ряд

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i \quad \text{на} \quad V, \tag{7}$$

де X_i є розв'язками задачі на знаходження власних значень:

$$-\Delta X_i = \mu_i X_i, \quad \left.\left(\frac{\partial X_i}{\partial n} + \beta X_i\right)\right|_{\Gamma} = 0.$$

Зіставляючи (5),(6),(7), визначаємо C_k^m, а звідси, на підставі (4), (9),(10) можна записати

$$t|_{V_m} = \frac{Q_m}{\lambda_m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle 1, Z_k^m \rangle_m}{\rho_k^m} Z_k^m + \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left(X_l - \mu_l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle X_l, Z_k^m \rangle_m}{\rho_k^m} Z_k^m \right), \tag{8}$$

де $t|_{V_m}$ – розв'язок $t(x_1, x_2)$ на V_m, який підлягає продовженню на всю область V, $\langle u, v\rangle_m$ – скалярний добуток на V_m.

З (3) випливає і друге зображення

$$t|_{V_m} = \sum_{l=1}^{\infty} A_l X_l + \sum_{j=1}^{\infty} B_j^m Y_j^m, \tag{9}$$

яке спільно з (8) дає змогу визначити коефіцієнти B_j^m. При цьому з (5) випливає, що

$$-\Delta t_0 = \sum_{m=1}^{M} \Delta\theta_m S_m + \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{\lambda_m} S_m,$$

звідки, враховуючи попередні співвідношення, визначаємо коефіцієнти A_i і для їх знаходження отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$A_i = \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{il} A_l + F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad \text{де} \qquad \Phi_{il} = \Phi_{il}^1 + \Phi_{il}^2,$$

$$\Phi_{il}^1 = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^{M} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_m}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^m \langle X_i, Y_j^m\rangle_m \langle Y_j^m, X_l\rangle_m,$$

$$\Phi_{il}^2 = \frac{\mu_l}{\mu_i} \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_j^m}{\rho_k^m} \langle X_i, Y_j^m\rangle_m \langle Y_j^m, Z_k^m\rangle_m \langle Z_k^m, X_l\rangle_m,$$

$$F_i = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{\lambda_m} \left(\langle 1, X_i\rangle_m - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_j^m}{\rho_k^m} \langle 1, Z_k^m\rangle_m \langle Z_k^m, Y_j^m\rangle_m \langle Y_j^m, X_i\rangle_m \right).$$

Відповідно до вищезгаданого, на підставі значень A_i, одержуємо коефіцієнти B_j^m і розв'язок задачі (1),(2) має вигляд

$$t(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{j=1}^{\infty} B_j^m Y_j^m(x_1, x_2) \right] S_m(x_1, x_2).$$

1. Грицевич В.С. *Двовимірні асиметричні узагальнені функції математичної фізики*// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 111-115.

Стаття надійшла до редколегії 24.03.95