УДК 539.377

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ СОМІЛІАНО В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ, ЯКА ВРАХОВУЄ ОРТОТРОПІЮ ЧАСУ РЕЛАКСАЦІЇ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ

Б. В. Ковальчук, О. І. Гой

Koval'chuk B. V., Hoy O. I. The generalization of Somiliano theorem of generalized thermoelasticity which is considered the orthotropy of time relaxation of a heat stream. The dynamic problem of generalized thermoelasticity of anizotropic bodies is considered, taking into consideration the orthotropy of the time relaxation of a heat stream. Using the integral-differential equations of heat conductivity the generalized Somiliano equations are obtained, of the generalized thermoelasticity of anizothropic bodies for the case when the relaxation time of heat stream has different values for main directions.

У монографії [4] викладено основні результати узагальненої термопружності анізотропних тіл для випадку, коли час релаксації теплового потоку є однаковий для всіх напрямків. У багатьох задачах динамічної термопружності час релаксації теплового потоку має різні значення і тоді узагальнений закон теплопровідності набуває вигляду

$$\left(1+\tau_p\frac{\partial}{\partial\tau}\right)q_p=-\lambda_{pj}^t t_{,j} \qquad (p,j=1,2,3), \tag{1}$$

де τ_p – час релаксації теплового потоку в напрямку осі x_p, λ_{pj}^t – коефіцієнти теплопровідності, q_p – компоненти вектора теплового потоку, t – температурне поле.

Для такої релаксаційної моделі (1) одержано інтегро-диференціальні рівняння [2] і доведено теореми єдиності та взаємності розв'язків крайової задачі узагальненої взаємозв'язаної динамічної термопружності [3,4].

У даній праці ми розглянули аналогічну динамічну задачу термопружності анізотропного тіла і довели теорему Соміліано для випадку, коли час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямків.

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω, обмежену поверхнею S, у природному стані має сталу температуру t_0.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.

Внаслідок дії масових сил X_i або джерел тепла W_t у тілі виникають переміщення U_i і приріст температури $\Theta = t - t_0$, що у свою чергу веде до виникнення деформацій e_{ij} та напружень σ_{ij}.

При знаходженні функцій $U_i = U_i(x, r)$, $\Theta = \Theta(x, r)$, $x \in \Omega$, $\tau > 0$ використовуємо дві системи величин $\{X_i', W_t', U_i', \Theta'\}$ і $\{X_i'', W_t'', U_i'', \Theta''\}$. Спочатку визначаємо переміщення U_i в тілі Ω. Для цього вибираємо миттєву зосереджену силу у вигляді $X_i' = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij}$, припустивши, що вона прикладена в точці ξ тіла Ω і спрямована вздовж осі x_γ. При цьому вважаємо, що теплові джерела відсутні, тобто $W_t' = 0$. Спричинені цією силою переміщення і приріст температури позначимо відповідно $U_i' = U_i^{(\gamma)}(x, \xi, \tau)$ і $\Theta' = V^{(\gamma)}(x, \xi, \tau)$.

Функції $U_i^{(\gamma)}(x, \xi, \tau), V^{(\gamma)}(x, \xi, \tau)$ знаходимо із взаємозв'язаної системи рівнянь [3,2]:

$$C_{ijkl}U_{k,l_j}(x,\xi,\tau) + \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij} = \rho\ddot{U}_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau) + \beta_{ij}V_{,j}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau),$$
$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\int_0^\tau V_{,ij}^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta = \frac{t_0}{2}\beta_{ij}(\dot{U}_{i,j}^{(\gamma)} + \dot{U}_{j,\tau}^{(\gamma)}) + C_e\dot{V}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau) \tag{2}$$

при однорідних початкових умовах

$$\begin{cases} U_i^{\gamma}(x,\xi,0) = 0, & \dot{U}_i^{(\gamma)}(x,\xi,0) = 0, \\ V^{(\gamma)}(x,\xi,0) = 0, & x,\xi \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

де $\delta(\eta) = \dfrac{dS(\eta)}{d\eta}$; $\delta_+(\tau) = \dfrac{dS_+}{d\tau}$; $S(\tau)$, $S_+(\tau)$ – симетрична та асиметрична одиничні функції; δ_{ij} – символ Кронекера; C_{ijkl} – декартові компоненти сталого тензора пружної жорсткості; $\beta_{ij} = \alpha_{kl}^t C_{ijkl}$, α_{ij}^t – температурні коефіцієнти лінійного розширення та зсуву; C_e – об'ємна теплоємність; ρ – густина.

Підставивши визначені величини X_i', W_t', $U_i^{(\gamma)}$ $V^{(\gamma)}$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [4], одержимо рівняння

$$\begin{aligned} t_0 s\overline{U}_\gamma(\xi,s) &= t_0 s\int_\Omega \overline{x}_i(x,s)\overline{U}_i^{(\gamma)}(x,\xi,s)d\Omega - \int_\Omega \overline{W}_t(x,s)\overline{V}^{(\gamma)}(x,\xi,s)d\Omega + \\ &+ t_0 s\int_S \left[\overline{P}_i(x,s)\overline{U}_i^{(\gamma)}(x,\xi,s) - \overline{P}_i^{(\gamma)}(x,\xi,s)\overline{U}_i(x,s)\right]ds - \\ &- \int_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s+1}\left[\overline{\Theta}_{,i}(x,s)\overline{V}^{(\gamma)}(x,\xi,s) - \overline{P}_i^{(\gamma)}(x,\xi,s)\overline{U}_i(x,s)\right]n_j ds, \end{aligned} \tag{4}$$

де $P_i^{(\gamma)} = \sigma_{ij}^{(\gamma)}n_j$, причому $\sigma_{ij}^{(\gamma)}$ – напруження на поверхні S, спричинені силою $x_i' = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij}$, а n_j – напрямні косинуси нормалі до цієї поверхні.

Застосувавши тепер до рівняння (4) обернене перетворення Лапласа, знайдемо

$$\dot{U}_\gamma(\xi,\tau)=\int\limits_0^\tau d\tau_0\int\limits_\Omega X_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial U_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\Omega+$$

$$+\int\limits_0^\tau d\tau_0\int\limits_S\left[P_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial U_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}-U_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial P_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}\right]dS-$$

$$+\ \frac{1}{t_0}\int\limits_0^\tau d\tau_0\int\limits_S\frac{\lambda_{ij}^T}{\tau_i}\left[V^{(\gamma)}(x,\xi,\tau-\tau_0)\varphi_i(x,\tau_0)-h(x,\tau_0)\psi_i(x,\xi,\tau-\tau_0)\right]n_jdS,\qquad(5)$$

де

$$\varphi_i(x,r)=\int\limits_0^\tau\Theta_{,i}(x,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta,\quad \psi_i(x,\xi,\tau)=\int\limits_0^\tau V_{,i}^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta.$$

Для визначення температури вибираємо тепер джерело тепла в точці ξ тіла Ω у вигляді $W_t''=\delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$ і вважаємо, що масові сили відсутні, тобто $X_i''=0$. Виникаючі при цьому переміщення $U_i''=\tilde{U}_i(x,\xi,\tau)$ і приріст температури $\Theta''=\tilde{V}(x,\xi,\tau)$ знаходимо з системи рівнянь [3,2]

$$C_{ijkl}\tilde{U}_{k,l_j}(x,\xi,\tau)=\rho\ddot{\tilde{U}}_i(x,\xi,\tau)+\beta_{ij}\tilde{V}_{,j}(x,\xi,\tau),$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\int\limits_0^\tau\tilde{V}_{,ij}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta=\frac{t_0}{2}\beta_{ij}(\dot{\tilde{U}}_{i,j}+\dot{\tilde{U}}_{j,i})+C_e\dot{\tilde{V}}-\delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\qquad(6)$$

при початкових умовах

$$\tilde{U}_i(x,\xi,0)=0,\quad \dot{\tilde{U}}_i(x,\xi,0)=0,\quad \tilde{V}(x,\xi,0)=0,\quad \dot{\tilde{V}}(x,\xi,0)=0,\quad x,\xi\in\Omega.\qquad(7)$$

Підставивши визначені величини $X_i'',W_t'',\tilde{U}_i,\tilde{V}$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [4], одержимо

$$\bar{t}(\xi,s)=\int\limits_\Omega\overline{W}_t(x,s)\overline{\tilde{V}}(x,\xi,s)d\Omega-t_0s\int\limits_\Omega\overline{X}_i(x,s)\overline{\tilde{U}}_i(x,\xi,s)d\Omega+$$

$$+\int\limits_S\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_is+1}\left[\overline{\Theta}_{,i}(x,s)\overline{\tilde{V}}(x,\xi,s)-\overline{h}(x,s)\overline{\tilde{V}}_{,i}(x,\xi,s)\right]n_jdS-$$

$$-\qquad t_0s\int\limits_S\left[\overline{P}_i(x,s)\overline{\tilde{U}}_i(x,\xi,s)-\overline{P}_i^{(w)}(x,\xi,s)\overline{U}_i(x,s)\right]dS,\qquad(8)$$

де $P_i^{(w)} = \sigma_{ij}^{(w)} n_j$, причому $\sigma_{ij}^{(w)}$ – напруження на поверхні S, викликані джерелом тепла $W_t'' = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$, а n_j – напрямні косинуси нормалі до цієї поверхні.

Після застосування до рівняння (8) оберненого перетворення Лапласа знаходимо

$$\dot{U}_\gamma(\xi,\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_\Omega W_t(x,\tau-\tau_0)\tilde{V}(x,\xi,\tau_0)d\Omega -$$
$$- t_0 \int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_\Omega X_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial \tilde{U}_i(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\Omega -$$
$$- t_0 \int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_S \left[P_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial \tilde{U}_i^{(}x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0} - U_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial P_i^{(w)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}\right]dS +$$
$$+ \int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\left[\Theta_{,i}(x,\tau-\tau_0)\tilde{\varphi}_i(x,\xi,\tau_0) - h(x,\tau-\tau_0)\tilde{\psi}_i(x,\xi,\tau_0)\right]n_j dS, \quad (9)$$

де

$$\tilde{\varphi}_i(x,r) = \int\limits_0^\tau \tilde{V}_{,i}(x,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta, \quad \tilde{\psi}_i(x,\xi,\tau) = \int\limits_0^\tau \tilde{V}_{,i}^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta.$$

Формули (5),(9) є узагальненими формулами Соміліано для задач динамічної термопружності, які враховують ортотропію часу релаксації теплового потоку.

1. Ковальчук Б.В., Гой О.І. *Узагальнене енергетичне рівняння і теорема єдиності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла*// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 104-109.
2. Ковальчук Б.В., Гой О.І. *Узагальнене варіаційне рівняння і теорема взаємності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла*// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 41. – С. 71-75.
3. Коляно Ю.М., Ковальчук Б.В., Гой О.І. *Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока*// Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1988. – N 9. – С. 81-83.
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К., Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.95