

УДК 539.3

**КВАЗІСТАТИЧНА ТЕРМОПРУЖНА КОНТАКТНА
ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА З
ВРАХУВАННЯМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ**

Ю. І. Мандзик

Mandzyk Y. I. Quasistatic thermoelastic contact problem for two-layer cylinder with heat generation. Numerical analysis. The numerical analysis of quasistatic thermoelastic contact problem for two-layer hollow circular cylinder with heat generation, imperfect heat contact and Vincler's condition of elastic fixing on the external border of the considered system is carried out. The influence of a thermal conductivity of the contact region and a hardness of the external fixing system on main contact characteristics of the system is investigated.

Робота багатьох машин та механізмів пов'язана з відносним переміщенням спряжених деталей (вузлів тертя), що супроводжується фрикційним нагріванням. Розробка методів оцінки надійності вузлів тертя має велике значення, оскільки від цього залежить надійність роботи всієї машини. На шляху побудови розв'язку цієї проблеми виникає важлива задача визначення температурних полів та контактних тисків у співдотичних елементах вузла з урахуванням фрикційного нагрівання.

Серед розповсюджених вузлів тертя виділимо спряження, яке можна моделювати двошаровим порожнистим круговим циліндром. Для даного спряження визначимо нестационарне температурне поле та квазістатичний розподіл напружень і переміщень. Для побудови розв'язку граничної задачі термопружності застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часовою координатою.

1. Формулювання задачі. Розглянемо два пружних пустотілих циліндри, поперечний переріз яких показаний на рис. 1. Один циліндр з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім радіусом r_0 , вставлений у такої ж форми другий циліндр з внутрішнім радіусом r_0 і зовнішнім радіусом r_2 . На обох зовнішніх поверхнях розглядуваної двошарової системи можуть бути задані радіальні напруження або радіальні зміщення, або ж мішані умови. Для визначеності розглянемо задачу для випадку, коли на внутрішній поверхні задані радіальні напруження, а на зовнішній – умови типу Вінклера.

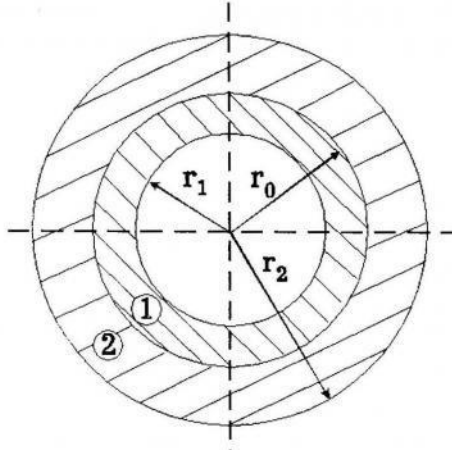


Рис. 1

Припустимо, що один з циліндрів (наприклад внутрішній) обертається відносно другого з кутовою швидкістю ω . За рахунок дії сил тертя на співдотичній поверхні циліндрів проходить нестационарне теплоутворення. Між зовнішніми поверхнями двошарового пакету і навколишнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона, а тепловий контакт циліндрів є неідеальним. При зроблених допущеннях визначимо в пакеті температурне поле, напруження і переміщення, зокрема тиск між циліндрами. Оскільки поставлена задача є плоскою (плоска деформація) і осесиметричною, то всі шукані характеристики будуть функціями координати r та часу t .

Введемо такі позначення: $T^{(j)}$ – температура; λ_j – коефіцієнти теплопровідності; E_j – модулі пружності; ν_j – коефіцієнти Пуассона; α_j – коефіцієнти лінійного теплового розширення; $U_r^{(j)}$ – радіальні переміщення; $\sigma_r^{(j)}$ – радіальні напруження; $\sigma_\theta^{(j)}$ – кільцеві напруження; $p(t)$ – контактний тиск; α_j^T – коефіцієнти теплообміну; k_j – коефіцієнти теплопровідності; λ – параметр з умови пружного закріплення Вінклера; h – термічна провідність ділянки контакту; σ_* – параметр з розмірністю напружень, який характеризує амплітуду навантаження на внутрішній границі системи; $p_c(t)$ – безрозмірна функція, що задає закон зміни навантаження на внутрішній границі пакету; f – коефіцієнт тертя.

Розподіл температури і переміщень у двошаровому пакеті визначається з розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 T^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial r} = \frac{1}{k_j} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial t} \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U_r^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(j)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r^{(j)} = \alpha_j \frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial r}, \quad (2)$$

$$r_1 \leq r \leq r_0, \quad j = 1; \quad r_0 \leq r \leq r_2, \quad j = 2; \quad 0 < t < \infty$$

при механічних граничних та контактних умовах:

$$\begin{aligned} r = r_1 : & \quad \sigma_r^{(1)} = -\sigma_* p_c(t), \\ r = r_2 : & \quad \sigma_r^{(2)} + \lambda U_r^{(2)} = 0, \\ r = r_0 : & \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} = -p(t), \\ & \quad U_r^{(1)} = U_r^{(2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

теплових умовах:

$$\begin{aligned} r = r_1 : & \quad \lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \alpha_1^T T^{(1)} = 0, \\ r = r_2 : & \quad \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} + \alpha_2^T T^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 r = r_0 : \quad & \lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = f \omega p(t) r_0, \\
 & \lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = h(T^{(2)} - T^{(1)}) \\
 \text{і початкові умові для температури:} \\
 & T^{(j)} = 0 \quad \text{при } t = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Співвідношення для напружень мають вигляд:

$$\sigma_r^{(j)} = \frac{E_j}{1 - 2\nu_j} \left[\left((1 - \nu_j) \frac{\partial U_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{\nu_j}{r} U_r^{(j)} \right) \frac{1}{1 + \nu_i} - \alpha_j T^{(j)} \right], \tag{6}$$

$$\sigma_\theta^{(j)} = \frac{E_j}{1 - 2\nu_j} \left[\left(\nu_j \frac{\partial U_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{(1 - \nu_j)}{r} U_r^{(j)} \right) \frac{1}{1 + \nu_i} - \alpha_j T^{(j)} \right]. \tag{7}$$

Зазначимо, що у дещо простішому формулюванні така задача була розглянута у праці [1]. Вважалося, що на зовнішній границі системи задано нульові переміщення (тобто жорстке заземлення), а тепловий контакт між циліндрами є ідеальний. У стаціонарному формулюванні при чотирьох комбінаціях граничних умов ця задача розв'язана у праці [2].

2. Метод розв'язання та аналіз результатів. Для розв'язування крайової задачі (1)-(4) використано інтегральне перетворення Лапласа за часовою координатою. Було отримано систему восьми лінійних алгебраїчних рівнянь після розв'язування якої, використовуючи відомі теореми розкладу та згортки, шукані поля температури, переміщень та напружень зображено у вигляді суми ряду

$$F^{(j)}(\rho, \tau) = \left\{ \frac{\hat{F}^{(j)}(\rho, 0)}{\Delta_*(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{F}^{(j)}(\rho, s_k)}{s_k [\partial_s \Delta_*(s)]_{s=s_k}} e^{\tau s_k} \right\} * \frac{\partial p_c(\tau)}{\partial \tau}, \tag{8}$$

де $F^{(j)}(\rho, \tau) = (T^{(j)}(\rho, \tau); U_r^{(j)}(\rho, \tau); \sigma_r^{(j)}(\rho, \tau); \sigma_\theta^{(j)}(\rho, \tau))$ - векторна функція, що описує розподіл температури, переміщень, радіальних та кільцевих напружень у внутрішньому ($j = 1$) та зовнішньому ($j = 2$) циліндрах; $\Delta_*(s)$ - визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку було отримано в процесі розв'язування; $\Delta_*(s) = 0$ - характеристичне рівняння задачі, а s_k - його корені; "*" - означає операцію згортки функцій; $\hat{F}^{(j)}(\rho, s_k)$ - деякі векторні функції, конкретний вигляд яких не наводимо через їх громіздкість. Зазначимо, що розв'язок розглянутої задачі виражається через модифіковані функції Бесселя та функції Макдональда нульового та першого порядків.

Числове дослідження задачі проводилося при таких вхідних даних: $r_1 = 3.5 \cdot 10^{-2}$ м; $r_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $r_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ м; $f = 0.1$.

Матеріал внутрішнього циліндра - сталь:

$E_1 = 190 \cdot 10^9$ Па; $\nu_1 = 0.3$; $\alpha_1 = 14 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$; $\lambda_1 = 21$ Вт/м К; $k_1 = 5.9 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с.

Матеріал зовнішнього циліндра - мідь:

$E_2 = 121 \cdot 10^9$ Па; $\nu_2 = 0.33$; $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$; $\lambda_2 = 381$ Вт/м К; $k_2 = 101.9 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с.

Як відомо з практики, реальний тепловий контакт між тілами є неідеальний, а параметр h (термічна провідність ділянки контакту між циліндрами) фактично визначає цю

неідеальність, тому з цієї точки зору цікаво дослідити як залежать від нього визначальні характеристики контакту.

У задачах, що розглядають контактну взаємодію тіл, тиск на межі розділу тіл є однією з найбільш важливих характеристик. А у задачах з урахуванням фрикційного нагрівання, контактний тиск відіграє вирішальну роль, оскільки теплоутворення в такій системі залежить від нього в значній мірі. Ось чому для практики дуже важливо знати закон зміни контактного тиску p з часом та момент коли p виходить на стаціонарний режим.

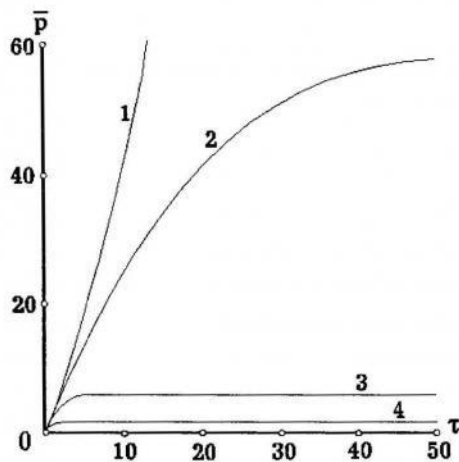


Рис. 2

Залежність безрозміреного контактного тиску $\bar{p} = p(t)/\sigma_*$ від безрозмірного часу $\tau = tk_1/r_0^2$ при різних значеннях параметра h та при $Bi_1 = r_0\alpha_1^T/\lambda_1 = 5.0$, $Bi_2 = r_0\alpha_2^T/\lambda_2 = 0.5$, $\lambda = 10^{12}$ Па/м, $\omega = 0.52$ рад/с показана на рис. 2. Характерною особливістю є зменшення контактного тиску при зростанні термічної провідності ділянки контакту h . На першій кривій $h = 0$ Вт/К м², а контактний тиск зростає до безмежності. Друга крива відповідає значенню $h = 20$ Вт/К м², а контактний тиск прямує до 63.5 (час виходу на стаціонарний режим приблизно рівний 60).

Третя крива побудована при $h = 100$ Вт/К м². Тут контактний тиск за час

$\tau \approx 6$ виходить на значення 6.3. При $h = 1000$ Вт/К м² побудована четверта крива на рис. 2. Як видно з рисунку, p виходить на значення 0.46 за час $\tau \approx 1$. Коли $h \rightarrow \infty$, термічний контакт стає ідеальним, а це в свою чергу приводить до подальшого спадання стаціонарного значення на яке виходить з часом контактний тиск.

На зовнішній границі нашої системи задано умову пружного закріплення Вінклера [3]. Ця умова дає можливість отримувати в граничних випадках або відсутність навантаження на зовнішній границі системи ($\lambda = 0$), або жорстке заземлення ($\lambda = \infty$). У проміжних випадках $0 < \lambda < \infty$ ця умова моделює дію незв'язаних між собою пружинок з жорсткістю λ , що розміщені на зовнішній границі пакету.

Залежність безрозміреної контактної температури шарів $\bar{T}^{(j)} = T^{(j)}/T_*$ від часу τ при різних значеннях параметра λ та при $Bi_1 = Bi_2 = 0.1$, $h = 10000$ Вт/К м², $\omega = 0.16$ рад/с зображена на рис. 3. Суцільними лініями на ньому зображено контактну температуру внутрішнього циліндра, а штриховими – зовнішнього.

Перша, друга, третя та четверта пари кривих побудовані відповідно при таких значеннях параметра λ : 0, 10^{12} , $2.5 \cdot 10^{12}$, $3 \cdot 10^{12}$ Па/м. Як видно з малюнку, зростання параметра λ , а це відповідає більш жорсткішому заземленню зовнішнього краю, приводить до збільшення контактної температури шарів для часу $\tau \rightarrow \infty$ і при $\lambda = 3 \cdot 10^{12}$ Па/м маємо її безмежне зростання. Отже, як показав числовий аналіз задачі, збільшення термічної провідності ділянки контакту між циліндрами, а це рівносильно зменшенню термічного опору, веде до спадання абсолютних величин основних характеристик

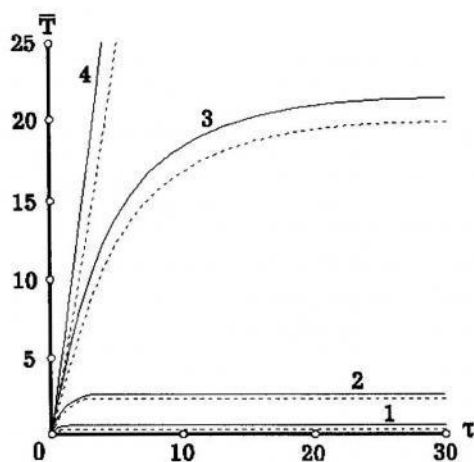


Рис. 3

взаємодії, таких як контактний тиск, температура, переміщення.

А при збільшенні параметра λ з умови пружного закріплення Вінклера на зовнішній границі системи, відбувається зростання контактного тиску, температур та інших характеристик контакту, що при недостатній тепловіддачі може спричинити заклинювання циліндрів.

Підсумовуючи отримані результати можна стверджувати, що кінцеві розв'язки даної контактної задачі термопружності адекватно відображають фізичну сторону явища, що описується цією математичною моделлю.

1. Пир'єв Ю. О., Гриліцький Д. В., Мокрик Р. І. *Нестационарное температурное поле та термопружний стан двошарового порожнистого циліндра при фрикційному нагріванні* // Прикладна механіка. – 1995. – Т. 31, N 1. – С. 44-50.
2. Гриліцький Д. В., Кульчицький-Жигайло Р. Д. *Плоска контактна задача термопружності для двошарового круглого порожнистого циліндра з теплоутворенням* // ФХММ. – 1994. – N 6. – С. 24-30.
3. Горячева И. Г., Добычин М. Н. *Контактные задачи в трибологии*. – М., Машиностроение, 1988. – 256 с.

Стаття надійшла до редколегії 22.01.96