ISSN 0201 - 758X
ISSN 0320 - 6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 47

1997

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
VISNYK LVIVSKOHO UNIVERSYTETU
(HERALD OF LVIV UNIVERSITY)

Серія механіко-математична

Mathematics and Mechanics
Виходить з 1965 року

Issued from 1965

Випуск 47

Volume 47

ЛЬВІВ – 1997

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, з алгебри та топології, з проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і з механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, on algebra and topology, on problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and on mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редколегії:

290602, Львів, вул. Університетська, 1, Львівський державний університет,
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93
E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics,
Lviv State University, Universytetska 1, Lviv, 290602

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX). Підписано до друку з оригінал-макета 18.02.97.

Зам. №97/2–2. Тир. 100. Папір друк. офсетний №1. Формат 84×108/16. Друк офсетний.

Умов. друк. арк. 15,46.

Друк ТзОВ "Простір М", м. Львів.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 512.553

КІЛЬЦЯ ДРОБІВ РОЗШАРОВАНОГО ДОБУТКУ КІЛЕЦЬ

Р. В. Вовк

Vovk R. V. Rings of quotients of the fiber product of rings. The fiber product of the torsion theories is introduced. The quotient rings of the fiber product of the rings with respect to the fiber product of the torsion theory is investigated.

Розшаровані добутки об'єктів різних категорій відіграють важливу роль у різних розділах математики. У топології розшаровані добутки зв'язані з накриттями топологічних просторів і теорією жмутків. Розшаровані добутки займають важливе місце в алгебраїчній K-теорії та застосовуються до алгебраїчної геометрії (див. [1], [7]). В останній час ця конструкція все частіше використовується в теорії асоціативних кілець. Фаччіні [10] досліджував теоретико-кільцеві властивості розшарованих добутків локальних асоціативно-комутативних кілець, нетерових кілець, тощо. Т.Огома [14] досліджував комутативні нетерові кільця з одиницею. Вивченню розшарованих добутків некомутативних нетерових кілець присвячена праця [4]. Інші категорні властивості розшарованих добутків кілець та модулів над ними досліджували Вісман [18], Фаччіні і Вамош [11] і інші. Одним з основних результатів останньої праці є теорема 1, формулювання якої наведено нижче і яку ми використовуватимемо в наших доведеннях.

Природно виникає потреба в дослідженні локалізацій розшарованих добутків кілець. У зв'язку з цим автор ввів поняття розшарованого добутку скрутів і радикальних фільтрів (див. [3]). У даній праці досліджено скрути над розшарованими добутками кілець і кільця дробів стосовно цих скрутів.

1. Основні терміни і позначення. Кожне кільце вважатимемо асоціативним з одиницею, всі модулі, якщо не обумовлено інше, будуть унітарними лівими модулями. Нехай $\mathcal{C}$ – абелева категорія, $\alpha_1 : C_1 \to C_0$ і $\alpha_2 : C_2 \to C_0$ – морфізми в $\mathcal{C}$. Розшарованим добутком морфізмів α_1 і α_2 або (в іншій термінології) об'єктів C_1 і C_2 над C_0, є об'єкт C з $\mathcal{C}$ разом з такими морфізмами $\pi_1 : C \to C_1$ і $\pi_2 : C \to C_2$, що виконуються умови:

1) $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 13B30; Secondary 13D30.

2) Для кожного об'єкта X і будь-яких морфізмів $\xi_1 : X \to C_1$ і $\xi_2 : X \to C_2$, таких, що $\alpha_1\xi_1 = \alpha_2\xi_2$ існує і єдиний такий морфізм $\gamma : X \to C$, що $\pi_1\gamma = \xi_1$ і $\pi_2\gamma = \xi_2$. Діаграма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\pi_1} & C_1 \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} \\ C_2 & \xrightarrow[\alpha_2]{} & C_0 \end{array}$$

називається діаграмою розшарованого добутку або універсальним квадратом. Розшарований добуток визначається однозначно з точністю до ізоморфізму ([17], с.89). Позначатимемо такий розшарований добуток через $C_1 \times_{C_0} C_2$.

Дуальним до поняття розшарованого добутку є поняття корозшарованого добутку, який також визначається однозначно з точністю до ізоморфізму ([17], с.92). Корозшарований добуток позначатимемо символом $C_1 \sqcup_{C_0} C_2$.

У категорії A-Mod розшарований добуток задається більш конкретно:

$$C_1 \times_{C_0} C_2 = \big\{(x, y) \in C_1 \times C_2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y) \in C_0\big\}.$$

Для корозшарованого добутку має місце зображення

$$C_1 \sqcup_{C_0} C_2 = \big(C_1 \oplus C_2\big)/C', \ \text{де } C' = \big\{(\beta_1(x), -\beta_2(x)) \mid x \in C_0\big\}.$$

([17], с.92). У категорії асоціативних кілець Rings розшаровані і корозшаровані добутки також існують і задаються цілком аналогічним чином.

Нехай A_1, A_2, A_0 – кільця і задано гомоморфізми $f_1 : A_1 \to A_0$, $f_2 : A_2 \to A_0$. Побудуємо розшарований добуток A кілець A_1 і A_2 над A_0, який задається універсальним квадратом

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & A_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ A_2 & \xrightarrow[f_2]{} & A_0 \end{array} .$$

Впродовж всієї статті f_2 є накладенням кілець, а тоді p_1 також є сюр'єктивним гомоморфізмом. Позначимо функтори

$$\begin{aligned} P_1 &= Hom_A(A_1, -) : A\text{-}Mod \to A_1\text{-}Mod, \\ P_2 &= Hom_A(A_2, -) : A\text{-}Mod \to A_2\text{-}Mod, \\ F_1 &= Hom_{A_1}(A_0, -) : A_1\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod, \\ F_2 &= Hom_{A_2}(A_0, -) : A_2\text{-}Mod \to A_0\text{-}Mod. \end{aligned}$$

За подробицями можна звернутися до [9], [11]. Існує природна еквівалентність функторів $\eta : F_2P_2 \to F_1P_1$. Позначимо відображення:

$$\pi_1 : P_1M \to M, \ \pi_2 : P_2M \to M, \ \varphi_1 : F_1N \to N, \ \varphi_2 : F_2L \to L,$$

де $M \in A$-Mod, $N \in A_1$-Mod, $L \in A_2$-Mod. Відповідні позначення зберігатимуться в усій статті.

У своїх доведеннях ми будемо спиратися на такий результат Фаччіні і Вамоша.

Теорема 1. *[11, теорема 2] A-модуль E є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $E_1 = Hom_A(A_1, E)$ є ін'єктивним A_1-модулем і $E_2 = Hom_A(A_2, E)$ є ін'єктивним A_2-модулем.*

Нагадаємо основні моменти побудови розшарованого добутку категорій A_1-Mod і A_2-Mod. Позначимо через $\mathcal{C}$ категорію, об'єктами якої є трійки (M_1, M_2, α), де $M_1 \in A_1$-Mod, $M_2 \in A_2$-Mod і $\alpha : F_2M_2 \to F_1M_1$ є A_0-ізоморфізмом. Морфізмами з об'єкта (M_1, M_2, α) в об'єкт (M_1', M_2', α') в категорії $\mathcal{C}$ є такі пари (σ_1, σ_2), де $\sigma_1 : M_1 \to M_1'$ – A_1-гомоморфізм і $\sigma_2 : M_2 \to M_2'$ – A_2-гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{tikzcd}
F_1M_1 \arrow[r, "F_1\sigma_1"] & F_1M_1' \\
F_2M_2 \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "F_2\sigma_2"'] & F_2M_2' \arrow[u, "\alpha'"']
\end{tikzcd}$$

є комутативною.

Категорія $\mathcal{C}$ є адитивною зі скінченними добутками, та низкою інших хороших властивостей (див., наприклад, [1], [7], [12]).

Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ можна побудувати діаграму

$$\begin{tikzcd}
M & M_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \\
M_2 \arrow[u, "\pi_2"] & M_0 \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1\alpha"']
\end{tikzcd},$$

яка є коуніверсальним квадратом в категорії A-Mod, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ і $M_0 = F_2M_2$. Отриманий модуль $M \in A$-Mod є корозшарованим добутком модулів M_1 та M_2 над M_0. Для кожного об'єкта $(M_1, M_2, \alpha) \in \mathcal{C}$ покладемо $M = T(M_1, M_2, \alpha)$. Тоді $T : \mathcal{C} \to A - Mod$ є функтором, який індукує еквівалентність між повною підкатегорією категорії $\mathcal{C}$, яка породжена об'єктами $(E_1, E_2, \alpha) \in \mathcal{C}$, де E_1 і E_2 – ін'єктивні A_1- і A_2-модулі відповідно і повною підкатегорією категорії A-Mod, яка породжена ін'єктивними A-модулями, (див. [11]).

2. Розшаровані добутки скрутів. У цьому параграфі з'ясуємо яким чином будуються розшаровані добутки скрутів.

Лема 2. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$, $M, N \in A$-Mod, $M_1 = P_1M$, $M_2 = P_2M$, $M_0 = F_2P_2M$, $N_1 = P_1N$, $N_2 = P_2N$, $N_0 = F_2P_2N$. Тоді, очевидно, $M_1, N_1 \in A_1$-Mod, $M_2, N_2 \in A_2$-Mod, $M_0, N_0 \in A_0$-Mod. Нехай $M = M_1 \sqcup_{M_0} M_2$ і $N = N_1 \sqcup_{N_0} N_2$, причому ці кодобутки визначаються такими коуніверсальними квадратами*

$$\begin{tikzcd}
M & M_1 \arrow[l] \\
M_2 \arrow[u] & M_0 \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"']
\end{tikzcd} \quad i \quad \begin{tikzcd}
N & N_1 \arrow[l] \\
N_2 \arrow[u] & N_0 \arrow[l, "\beta_2"] \arrow[u, "\beta_1"']
\end{tikzcd}$$

(у категорії A-Mod). Тоді модуль N вкладається в модуль M тоді і тільки тоді, коли існують такі мономорфізми $\lambda_1 : N_1 \to M_1$, $\lambda_2 : N_2 \to M_2$ і $\lambda_0 : N_0 \to M_0$, що $\lambda_1\beta_1 = \alpha_1\lambda_0$ і $\lambda_2\beta_2 = \alpha_2\lambda_0$.

Доведення. Нехай $\lambda : N \to M$ є мономорфізмом. Тоді розглянемо коротку точну послідовність: $0 \to N \xrightarrow{\lambda} M \to K \to 0$. Подіємо на цю послідовність функтором P_1. Враховуючи те, що P_1 є коваріантним і точним зліва, отримаємо точну послідовність $0 \to N_1 \xrightarrow{P_1(\lambda)} M_1 \to P_1K$, причому гомоморфізм $\lambda_1 = P_1(\lambda)$ є мономорфізмом.

Так само при дії функтора P_2 отримаємо мономорфізм $\lambda_2 = P_2(\lambda) : N_2 \to M_2$.

Маючи мономорфізм λ_2 можна побудувати точну послідовність A_2-модулів $0 \to N_2 \xrightarrow{\lambda_2} M_2 \to L \to 0$. Після дії функтора F_2 отримаємо точну послідовність $0 \to N_0 \xrightarrow{F_2(\lambda_2)} M_0 \to F_2L$ і мономорфізм $\lambda_0 = F_2(\lambda_2)$. Легко бачити, що рівності, виписані в формулюванні леми справді мають місце.

Навпаки, нехай існують мономорфізми $\lambda_1 : N_1 \to M_1$, $\lambda_2 : N_2 \to M_2$ і $\lambda_0 : N_0 \to M_0$, для яких $\lambda_1\beta_1 = \alpha_1\lambda_0$ і $\lambda_2\beta_2 = \alpha_2\lambda_0$.

Побудуємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
M & & & M_1 \arrow[lll] \\
& N \arrow[ul, "\lambda"'] & N_1 \arrow[l] \arrow[ur, "\lambda_1"] & \\
& N_2 \arrow[u] \arrow[dl, "\lambda_2"] & N_0 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dr, "\lambda_0"'] & \\
M_2 \arrow[uuu] & & & M_0 \arrow[lll] \arrow[uuu]
\end{tikzcd},$$

де квадрати

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "\lambda_1"] & M_1 \\
N_0 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[r, "\lambda_0"'] & M_0 \arrow[u, "\alpha_1"']
\end{tikzcd} \quad \text{і} \quad
\begin{tikzcd}
N_2 \arrow[d, "\lambda_2"'] & N_0 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[d, "\lambda_0"] \\
M_2 & M_0 \arrow[l, "\alpha_2"]
\end{tikzcd}$$

є комутативними.

З основної властивості коуніверсального квадрату випливає, що існує гомоморфізм $\lambda : N \to M$ з відповідними властивостями. Нам потрібно переконатись, що цей гомоморфізм насправді є мономорфізмом.

Нагадаємо, що за нашим припущенням гомоморфізм кілець $p_1 : A \to A_1$ є сюр'єктивним, і ми можемо побудувати точну послідовність A-модулів $0 \to Kerp_1 \to A \xrightarrow{p_1} A_1 \to 0$. Подіємо на цю послідовність функтором $Hom_A(-, N)$, який є контраваріантним і точним зліва. Це означає, що наступна послідовність

$$Hom_A(A_1, N) \xrightarrow{Hom_A(p_1, N)} Hom_A(A_1, N) \to Hom_A(Kerp_1, N)$$

є точною і гомоморфізм $\pi_1 = Hom_A(p_1, N)$ є ін'єктивним. У наших позначеннях маємо, що $\pi_1 : N_1 \to N$ є мономорфізмом. Аналогічно, після застосування функтора $Hom_A(-, M)$ отримаємо мономорфізм $\pi_1' : M_1 \to M$.

Гомоморфізм $\pi_1' \circ \lambda_1 : N_1 \to M$ є ін'єктивним, як композиція двох мономорфізмів. З комутативності наведеної діаграми маємо, що $\pi' \circ \lambda_1 = \lambda \circ \pi_1$. Оскільки π_1 є мономорфізмом, то λ також є мономорфізмом. Лему доведено.

Нагадаємо, що два ін'єктивних модулі називаються еквівалентними, якщо кожний з них можна вкласти в прямий добуток екземплярів іншого (див. [13]).

Має місце така лема.

Лема 3. *Нехай (E_1, E_2, α), (E_1', E_2', α') – об'єкти категорії $\mathcal{C} = A_1\text{-}Mod \times_{A_0\text{-}Mod} A_2\text{-}Mod$. Покладемо $E = T(E_1, E_2, \alpha)$ і $E' = T(E_1', E_2', \alpha')$, де T – функтор, побудований вище. Тоді ін'єктивні A-модулі E і E' є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли справджуються такі три твердження:*
1) $E_1 = P_1(E)$ і $E_1' = P_1(E')$ є еквівалентними ін'єктивними A_1-модулями,
2) $E_2 = P_2(E)$ і $E_2' = P_2(E')$ є еквівалентними ін'єктивними A_2-модулями,
3) $E_0 = F_2P_2(E)$ і $E_0' = F_2P_2(E')$ є еквівалентними ін'єктивними A_0-модулями.

Доведення. Нехай E, E' - еквівалентні ін'єктивні ліві A-модулі, де $A = A_1 \times_{A_0} A_2$. Тоді існує мономорфізм $\lambda : E' \to E^{\Omega}$ для деякої множини Ω.

З леми 2 випливає, що існує мономорфізм $\lambda_1 : P_1(E') \longrightarrow P_1(E^{\Omega})$. Існує також ізоморфізм $\rho_1 : Hom_A(A_1, E^{\Omega}) \to (Hom_A(A_1, E))^{\Omega}$. Тому $P_1(E^{\Omega}) \cong (P_1E)^{\Omega} = E_1^{\Omega}$.

Ця рівність дозволяє утворити точну послідовність $0 \to E_1' \xrightarrow{\rho_1\lambda_1} E_1^{\Omega} \to K_1$.

Тут A_1-модулі E_1' і E_1^{Ω} є ін'єктивними, оскільки функтор P_1 зберігає ін'єктивність і прямий добуток ін'єктивних модулів є ін'єктивним.

Отже, ми отримали, що за мономорфізмом $\lambda : E' \to E^{\Omega}$ можна побудувати мономорфізм $\rho_1\lambda_1 : E_1' \to E_1^{\Omega}$. Проводячи аналогічні міркування щодо мономорфізму $\lambda' : E \to E'^{\Omega'}$, знайдемо мономорфізм $\rho_1\lambda_1' : E_1 \to E'^{\Omega'}_1$. Існування мономорфізмів $\rho_1\lambda_1$ і $\rho_1\lambda_1'$ доводить еквівалентність модулів E_1 і E_1'. Діючи функтором P_2 на мономорфізми λ і λ', і повторюючи наведені вище викладки отримаємо мономорфізми $\rho_2\lambda_2 : E_2' \to E_2^{\Omega}$ $\rho_2\lambda_2' : E_2 \to E'^{\Omega'}_2$, де $\rho_2 : P_2(E^{\Omega'}) \longrightarrow (P_2(E))^{\Omega'}$ – A_2-ізоморфізм. Це і буде означати, що E_2 і E_2' є еквівалентними.

Еквівалентність модулів E_0 і E_0' отримується внаслідок дії функтора F_2, який є коваріантним і точним зліва, на точні послідовності

$$0 \to E_2' \xrightarrow{P_2(\lambda)} E_2^{\Omega} \to K_2\ , \quad 0 \to E_2 \xrightarrow{P_2(\lambda')} E'^{\Omega'}_2 \to K_2'\ .$$

Навпаки, нехай E_1, E_1' є еквівалентними A_1-модулями і E_2, E_2' є еквівалентними A_2-модулями. Нагадаємо, що

$$E_1 = Hom_A(A_1, E),\ E_2 = Hom_A(A_2, E),\ E_1' = Hom_A(A_1, E') \text{ і } E_2' = Hom_A(A_2, E').$$

За теоремою 1 модулі E і E' є ін'єктивними.

Враховуючи те, що (E_1, E_2, α) і (E_1', E_2', α') є об'єктами категорії $\mathcal{C}$, яка є розшарованим добутком категорій A_1-Mod і A_2-Mod, можна побудувати коуніверсальні квадрати

$$\begin{tikzcd}
E & E_1 \arrow[l, "\pi_1"'] & E' & E_1' \arrow[l, "\pi_1'"'] \\
E_2 \arrow[u, "\pi_2"] & E_0 \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1\eta"'] & E_2' \arrow[u, "\pi_2'"] & E_0' \arrow[l, "\varphi_2'"] \arrow[u, "\varphi_1'\eta"']
\end{tikzcd}, \qquad (1)$$

де всі модулі розглядаються як A - модулі і всі стрілки є A - гомоморфізмами.

Оскільки модулі E_1 і E_1', E_2 і E_2' та E_0 і E_0' є попарно еквівалентними у відповідних категоріях, то існують такі мономорфізми: $\mu_1 : E_1' \to E_1^{\Omega_1}$, $\mu_2 : E_2' \to E_2^{\Omega_2}$ *і* $\mu_0 : E_0' \to E_0^{\Omega_0}$, де Ω_1, Ω_2, Ω_0 – деякі множини. Серед цих множин виберемо множину найбільшої потужності і позначимо іі через Ω. Зрозуміло, що наведені вкладення будуть існувати і для степеня Ω, тобто можна записати $\mu_1 : E_1' \to E_1^{\Omega}$, $\mu_2 : E_2' \to E_2^{\Omega}$ *і* $\mu_0 : E_0' \to E_0^{\Omega}$. Крім того, діаграма

$$\begin{tikzcd}
E^{\Omega} & E_1^{\Omega} \arrow[l, "\pi_1^{\Omega}"'] \\
E_2^{\Omega} \arrow[u, "\pi_2^{\Omega}"] & E_0^{\Omega} \arrow[l, "\varphi_2^{\Omega}"] \arrow[u, "(\varphi_1\eta)^{\Omega}"']
\end{tikzcd}$$

є теж коуніверсальним квадратом, що випливає із коуніверсальності відповідних квадратів (1).

Розглянемо тепер діаграму

$$\begin{tikzcd}
E^{\Omega} & & & E_1^{\Omega} \arrow[lll, "\pi_1^{\Omega}"'] \\
& E' \arrow[ul] & E_1' \arrow[l, "\pi_1'"'] \arrow[ur, "\mu_1"] & \\
& E_2' \arrow[u, "\pi_2'"] \arrow[dl, "\mu_2"] & E_0' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dr, "\mu_0"'] & \\
E_2^{\Omega} \arrow[uuu, "\pi_2^{\Omega}"] & & & E_0^{\Omega} \arrow[lll] \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

З основної властивості коуніверсального квадрату отримаємо, що існує гомоморфізм $\mu : E' \to E^{\Omega}$. За лемою 6 гомоморфізм μ є мономорфізмом.

Проводячи аналогічні міркування, замінивши місцями E і E' одержимо мономорфізм $\mu' : E \to E'^{\Omega'}$. Існування мономорфізмів μ і μ' доводить еквівалентність модулів E і E'. Лему доведено.

Гратку всіх скрутів, визначених у категорії A-Mod, позначатимемо через A-$Tors$. Нехай τ_1 – скрут в A_1-Mod і τ_2 – скрут в A_2-Mod з котвірними ін'єктивними модулями

$E_1 \in A_1$-Mod і $E_2 \in A_2$-Mod. Тоді розшарованим добутком скрутів τ_1 і τ_2 в категорії $\mathcal{C}$ назвемо скрут τ, копороджений об'єктом (E_1, E_2, θ). Скрут τ в категорії A-Mod копороджений таким ін'єктивним модулем E, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} E & \longleftarrow & E_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_2 & \longleftarrow & E_0 \end{array} \tag{2}$$

є коуніверсальним квадратом також називатимемо розшарованим добутком скрутів. Ін'єктивний модуль $E_0 \in A_0$-Mod копороджує скрут τ_0. Позначатимемо розшарований добуток скрутів в категорії $\mathcal{C}$ через $\tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$. Надалі називатимемо його розшарованим добутком скрутів τ_1 і τ_2 над скрутом τ_0.

3. Кільця дробів розшарованого добутку кілець стосовно розшарованого добутку скрутів.

Твердження 4. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ – розшарований добуток кілець, S, S_1, S_2 і S_0 – мультиплікативно-замкнені множини в кільцях A, A_1, A_2 і A_0 відповідно, такі що $S = S_1 \times_{S_0} S_2$, і існують ліві кільця дробів вказаних кілець стосовно заданих множин A_S, A_{1S_1}, A_{2S_2} і A_{0S_0}. Тоді $A_S = A_{1S_1} \times_{A_{0S_0}} A_{2S_2}$.*

Доведення. Нехай розшарований добуток кілець $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ заданий універсальним квадратом

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & A_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ A_2 & \xrightarrow[f_2]{} & A_0 \end{array}.$$

Оскільки мультиплікативно-замкнена множина $S \subset A$ є розшарованим добутком мультиплікативно-замкнених множин $S_1 \subset A_1$ і $S_2 \subset A_2$ над множиною $S_0 \subset A_0$, тому

$$p_1(S) \subseteq S_1,\ p_2(S) \subseteq S_2,\ f_1(S_1) \subseteq S_0,\ \text{і}\ f_2(S_2) \subseteq S_0.$$

Утворимо ліві кільця дробів A_S, A_{1S_1}, A_{2S_2} і A_{0S_0}. Для кожного з цих кілець дробів існують кільцеві гомоморфізми

$$\lambda : A \to A_S,\ \lambda_1 : A_1 \to A_{1S_1},\ \lambda_2 : A_2 \to A_{2S_2},\ \text{і}\ \lambda_0 : A_0 \to A_{0S_0}.$$

Розглянемо композицію гомоморфізмів

$$\lambda_1 \circ p_1 : A \longrightarrow A_{1S_1}.$$

Для будь-якого елемента $s \in S$ $\lambda_1(s) \in S_1$, а тому елемент $\lambda_1 p_1(s)$ є оборотним в A_{1S_1}. У такій ситуації існує і єдиний гомоморфізм

$$\mu_1 : A_S \longrightarrow A_{1S_1}$$

такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[r, "\mu_1"] & A_{1S_1} \\ A \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "\lambda_1 p_1"'] & \end{tikzcd}$$

є комутативною. Аналогічним чином можна знайти гомоморфізми

$$\mu_2 : A_S \to A_{2S_2},\ \eta_1 : A_{1S_1} \to A_{0S_0},\ \text{і}\ \eta_2 : A_{2S_2} \to A_{0S_0},$$

для яких діаграми

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[r, "\mu_2"] & A_{2S_2} \\ A \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "\lambda_2 p_2"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A_{1S_1} \arrow[r, "\eta_1"] & A_{0S_0} \\ A_1 \arrow[u, "\lambda_1"] \arrow[ur, "\lambda_0 f_1"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A_{2S_2} \arrow[r, "\eta_2"] & A_{0S_0} \\ A_2 \arrow[u, "\lambda_2"] \arrow[ur, "\lambda_0 f_2"'] & \end{tikzcd}$$

будуть комутативими.

Побудуємо тепер комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[rrr, "\mu_1"] \arrow[ddd, "\mu_2"'] & & & A_{1S_1} \arrow[ddd, "\eta_1"] \\ & A \arrow[ul, "\lambda"'] \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[d] & \\ & A_2 \arrow[dl, "\lambda_2"] \arrow[r] & A_0 \arrow[dr, "\lambda_0"'] & \\ A_{2S_2} \arrow[rrr, "\eta_2"'] & & & A_{0S_0} \end{tikzcd}.$$

У кільці дробів A_S задано відношення еквівалентності "$\sim$", відповідно до якого будь-які два елементи $(a,s),(b,t) \in A_S$, де $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in A$, $s = (s_1, s_2)$, $t = (t_1, t_2) \in S$ є еквівалентними

$$\big((a_1, a_2), (s_1, s_2)\big) \sim \big((b_1, b_2), (t_1, t_2)\big), \tag{3}$$

якщо існують елементи (c_1, c_2), $(d_1, d_2) \in A$ такі, що

$$(a_1, a_2)(c_1, c_2) = (b_1, b_2)(d_1, d_2) \ \text{ тобто } \ a_1c_1 = b_1d_1,\ a_2c_2 = b_2d_2 \text{ і}$$

$$(s_1, s_2)(c_1, c_2) = (t_1, t_2)(d_1, d_2) \ \text{ тобто } \ s_1c_1 = t_1d_1,\ s_2c_2 = t_2d_2$$

(див. [17]).

Отже, ми отримали, що для елементів $a_1, b_1 \in A_1$ і $s_1, t_1 \in S_1$ існують такі $c_1, d_1 \in A_1$, що $a_1c_1 = b_1d_1$ і $s_1c_1 = t_1d_1$. Це означає, що $(a_1, s_1) \sim (b_1, t_1)$. Так само отримаємо, що $(a_2, s_2) \sim (b_2, t_2)$. Отже, при дії гомоморфізмів μ_1 і μ_2 еквівалентність елементів у кільцях дробів зберігається. Крім того, $\eta_1(a_1, s_1) = (a_0, s_0)$ і $\eta_2(a_2, s_2) = (a_0, s_0)$, оскільки $f_1(a_1) = f_2(a_2) = a_0$ і $f_1(s_1) = f_2(s_2) = s_0$.

Отже, ми отримали, що

$$A_S = \Big\{ \big((a_1, a_2), (s_1, s_2)\big) \in A \times S \mid f_1(a_1) = f_2(a_2), f_1(s_1) = f_2(s_2) \Big\} =$$

$$= \Big\{ \big((a_1, s_1), (a_2, s_2)\big) \in A_{1S_1} \times A_{2S_2} \mid \eta_1(a_1, s_2) = \eta_2(a_2, s_2) \in A_{0S_0} \Big\}.$$

Тому, знаючи зображення розшарованого добутку кілець, наведене вище, маємо, що кільце дробів A_S рівне розшарованому добутку кілець дробів A_{1S_1} і A_{2S_2} над кільцем дробів A_{0S_0}. Лему доведено.

Нехай τ – скрут в категорії A-Mod, копороджений ін'єктивним модулем E. Нехай $S = End_A(E)$ кільце ендоморфізмів модуля E і

$$B_E(-) = Hom_S(Hom_R(-, E), E)$$

ендофунктор в категорії A-Mod. Тоді існує канонічне природне перетворення δ з тотожнього ендофунктора в A-Mod в $B_E(-)$ таке, що для будь-якого елемента $m \in M$ і кожного елемента $\alpha \in Hom_A(M, E)$ справджується рівність $(m\delta_M)(\alpha) = m\alpha$). Для кожного модуля $M \in A$-Mod періодична частина його $\tau(M)$ дорівнює ядру $\mathrm{Ker}(\delta_M)$ (див. [5]).

Теорема 5. *Нехай $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ – розшарований добуток кілець, заданий універсальним квадратом*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & A_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ A_2 & \xrightarrow[f_2]{} & A_0 \end{array},$$

де гомоморфізми f_1 і f_2 є сюр'єктивними, $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$ – розшарований добуток скрутів $\tau_1 \in A_1$-$Tors$ і $\tau_2 \in A_2$-$Tors$ над $\tau_0 \in A_0$-$Tors$ і існують A-ізоморфізми

$$Hom_A(B_E(A_1), E) \cong Hom_A(A_1, E),$$

$$Hom_A(B_E(A_2), E) \cong Hom_A(A_2, E),$$

$$Hom_{A_2}(B_E(A_0), E) \cong Hom_{A_2}(A_0, E).$$

Тоді, якщо існують модулі часток $Q_\tau(A)$, $Q_{\tau_1}(A_1)$, $Q_{\tau_2}(A_2)$ і $Q_{\tau_0}(A_0)$ A-модулів A, A_1, A_2 і A_0 стосовно скрутів τ, τ_1, τ_2 і τ_0 відповідно, то

$$Q_\tau(A) = Q_{\tau_1}(A_1) \times_{Q_{\tau_0}(A_0)} Q_{\tau_2}(A_2).$$

Доведення. Нехай τ_1, τ_2 і τ_0 – скрути в категоріях A_1-Mod, A_2-Mod і A_0-Mod відповідно і $\tau = \tau_1 \times_{\tau_0} \tau_2$ – розшарований добуток скрутів. Для вказаних скрутів можна знайти ін'єктивні ендоциклічні котвірні $E_1 \in A_1$-Mod, $E_2 \in A_2$-Mod і $E_0 \in A_0$-Mod. Побудуємо коуніверсальний квадрат

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\pi_1} & E_1 \\ {\scriptstyle \pi_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ E_2 & \xleftarrow[\varphi_2]{} & E_0 \end{array} . \tag{4}$$

Для кожного з цих модулів знайдемо кільця ендоморфізмів $S = End_A(E)$, $S_1 = End_{A_1}(E_1)$, $S_2 = End_{A_2}(E_2)$, $S_0 = End_{A_0}(E_0)$. Діаграма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\bar{p}_1} & S_1 \\ {\scriptstyle \bar{p}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_1} \\ S_2 & \xrightarrow[\bar{f}_2]{} & S_0 \end{array}$$

є універсальним квадратом, $S = S_1 \times_{S_0} S_2$ і гомоморфізм $\bar{f}_1$ є сюр'єктивним. Замінивши місцями E_1 і E_2 отримаємо, що гомоморфізм $\bar{f}_2$ є сюр'єктивним.

Гомоморфізми $\bar{p}_1$ і $\bar{p}_2$ є теж сюр'єктивними. Модуль E_1 є циклічним правим S_1-модулем, тобто $E_1 = e_1 S_1$ для деякого $e_1 \in E_1$. Крім того, E_1 г правим S-модулем і, оскільки $\bar{p}_1$ – епіморфізм, $E_1 = e_1\bar{p}_1(S)$. Отже, E_1 є циклічним S-модулем. Так само E_2 – циклічний S-модуль.

Враховуючи те, що

$$E = E_1 \oplus E_2/E' \ , \quad \text{де } E' = \{(\varphi_1(x), -\varphi_2(x)) \mid x \in E_0\},$$

отримаємо, що модуль E є скінченно-породженим правим S-модулем, тобто ендоскінченним модулем.

Тепер до діаграми (4), де всі модулі розглядатимемо як праві S-модулі, застосуємо функтор $Hom_S(-, E_S)$. Отримаємо діаграму

$$\begin{array}{ccc} Hom_S(E,E) & \longrightarrow & Hom_S(E_1,E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Hom_S(E_2,E) & \longrightarrow & Hom_S(E_0,E) \end{array} . \tag{5}$$

Оскільки ін'єктивний котвірний E скруту τ є ендоскінченним модулем, то бікомутатор $Hom_S(E, E)$ модуля E співпадає з кільцем часток $Q_\tau(A)$ кільця A стосовно скруту τ (див. [5]).

За умовою

$$Hom_A(B_E(A_1), E) \cong Hom_A(A_1, E),$$

тому модуль часток $Q_\tau(A_1)$ A-модуля A_1 стосовно скруту τ є ізоморфним до

$$B_E(A_1) = Hom_S(Hom_A(A_1, E), E) = Hom_S(E_1, E).$$

Аналогічним чином отримуємо, що

$$Q_\tau(A_2) \cong Hom_S(E_2, E) \text{ і } Q_\tau(A_0) \cong Hom_S(E_0, E).$$

Отже, ми отримали діаграму

$$\begin{array}{ccc} Q_\tau(A) & \longrightarrow & Q_\tau(A_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_\tau(A_2) & \longrightarrow & Q_\tau(A_0) \end{array},$$

яка завершує доведення теореми.

Автор виражає щиру подяку М.Я. Комарницькому за керівництво роботою.

1. Басс Х. Алгебраическая K-теория. – М., Мир, 1973. – 591 с.
2. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. – М., Мир, 1972. – 259 с.
3. Вовк Р.В. *Абсолютно σ-чистые модули над расслоенным произведением колец* // Тезисы сообщений. VI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Львов. – 1990. – С.33.
4. Вовк Р.В., Комарницький М.Я. *Розшаровані добутки деяких некомутативних нетерових кілець* // Алгебра і топологія. Тематичний збірник наукових праць, Київ. – 1993. – С.26–32.
5. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. – Кишинев, Штиинца, 1983. – 154 с.
6. Ламбек И. Кольца и модули. – М.,Мир, 1971. – 279 с.
7. Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. – М., Мир, 1974.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. т.1 – М., Мир, 1977; т.2 – М., Мир, 1979. – 688 с.
9. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules. – Berlin, Springer-Varlag, 1974. – 339 p.
10. Facchini A. *Fibre product and Morita duality for commutative rings* // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1981. – Vol. 67. – P. 143–156.
11. Facchini A., Vamos P. *Injective modules over pullbacks* // J. London Math. Soc. – 1985. – Vol. 31, N 2. – P. 425–438.
12. Gabriel P. *Des catégories abéliennes* // Bull. Soc. Math. France. – 1962. – Vol. 90. – P. 323–448.
13. Golan J.S. Torsion theories, – New York: J. Willey & Sons, 1986. – 651 p.
14. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings and their applications* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. – Vol. 97. – P. 231–241.

15. Ogoma T. *Fibre products of Noetherian rings* // Advanced Studies in Pure Mathematics. – 1987. – Vol. 11. – P. 173–182.

16. Popescu N. Abelian categories with application to rings and modules. – London, Acad. Press, 1973.

17. Stenström B. Rings of quotients. – Berlin, Springer-Verlag, 1975. – 309 p.

18. Wiseman A.N. *Proective modules over pullback rings* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. – Vol. 97. – P. 399–406.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.96

УДК 512.536

ПРО ОСЛАБЛЕННЯ ТОПОЛОГІЇ ПРЯМОЇ СУМИ НА НАПІВГРУПІ БРАКА

О. В. Гутік

Gutik O. V. On a coarsening of a direct sum topology on the Bruck semigroup. The Bruck semigroup of a topological semigroup with a compact ideal admits the only direct sum topology. The method of coarsening of a direct sum topology on the Bruck semigroup of a regular topological inverse semigroup without a minimal idempotent is described.

Нехай S — напівгрупа, $a, b \notin S$. Напівгрупа $\mathcal{C}(S)$ породжується множиною $S \cup \{a, b\}$, та задається такими співвідношеннями $ab = 1$, $as = a$, $sb = b$ для всіх $s \in S$, а також співвідношеннями, що виконуються в S. Одиницею 1 напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ є або одиниця напівгрупи S. якщо $1 \in S$, або ж приєднана звичайним чином до $\mathcal{C}(S)$ одиниця, якщо S не містить одиниці. Напівгрупу $\mathcal{C}(S)$, побудовану таким чином, будемо називати напівгрупою Брака на S. Кожен елемент напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ єдиним чином зображається у вигляді $b^i t a^j$, де $t \in S^1$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Напівгрупа S алгебраїчно вкладається в $\mathcal{C}(S)$ і $\mathcal{C}(S)$ - проста напівгрупа [1], [2, с.139-140], причому, якщо S – інверсна напівгрупа, то $\mathcal{C}(S)$ – інверсна [2, теорема 8.48.]. Довільна топологічна (інверсна) напівгргрупа (S, τ) топологічно ізоморфно вкладається в просту топологічну (інверсну) напівгрупу $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$, де τ^* – топологія прямої суми на $\mathcal{C}(S)$. Напівгрупа $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$ гомеоморфна $\mathbb{Z}_+ \times S^1 \times \mathbb{Z}_+$ з топологією тихоновського добутку, де $\mathbb{Z}_+$ – зліченний дискретний простір [3]. Виявляється, що для топологічних інверсних напівгруп S, які містять мінімальний ідемпотент, топологія прямої суми на $\mathcal{C}(S)$ є єдиною серед топологій τ, що індукують на S вихідну, і таких, що $(\mathcal{C}(S), \tau)$ – топологічна інверсна напівгрупа [3, теорема 2]. Існування мінімального ідемпотента в напівгрупі S є суттєвим.

У даній праці доведено, що топологію прямої суми τ^* на $\mathcal{C}(S)$ можна послабити до напівгрупової лише в точках $b^i a^j$ $i, j \in \mathbb{N}$, а також отримано аналоги теореми 2 з праці [3] для компактних напівгруп, та напівгруп, що містять компактні ідеали.

Надалі будемо вважати, що (S, τ) – довільна гаусдорфова топологічна напівгрупа, $\mathcal{C}(S)$ – напівгрупа Брака на S, $\tilde{\tau}$ – топологія на $\mathcal{C}(S)$, що задовольняє наступні умови:

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22A15; Secondary 20M17.

1) $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа;

2) (S, τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$.

Введемо позначення $S_{i,j} = \{b^i s a^j | s \in S^1\}$, де $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Лема 1. *Для довільного $s \in S_{i,i} \subset \mathcal{C}(S)$, $i \in \mathbb{Z}_+$ існує окіл, що перетинається лише зі скінченною кількістю множин $S_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.*

Доведення. Припустимо, що дане твердження не виконується. Тоді існує елемент $s = b^i t a^i \in S_{i,i}$, довільний окіл якого перетинається з нескінченною кількістю множин $S_{m,n}$. Нехай $f = b^{i+1}a^{i+1}$, тоді $s \cdot f = f$ і $f \cdot s = f$. Оскільки $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа, то існують околи $V(s)$, $V(f)$ і $W(f)$, що задовольняють наступним умовам $V(s)V(f) \subseteq W(f)$, $V(f)V(s) \subseteq W(f)$ і $V(s) \cap V(f) = V(s) \cap W(f) = \emptyset$. За припущенням окіл $V(s)$ перетинається з нескінченною кількістю множин $S_{m,n}$, отже існує $x = b^k p a^l \in V(s)$ $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $p \in S^1$, причому виконується одна з умов : $k > i+1$ або $l > i+1$.

Якщо $k > i+1$ $(l > i+1)$, то $fx = b^k p a^l$ $(xf = b^k p a^l)$, що суперечить гаусдорфовості $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. Лему доведено.

Лема 2. *Для довільного $s \in S_{i,i} \subset \mathcal{C}(S)$ існує окіл $U(s)$ такий, що $U(s) \subset \cup_{k=0}^{i} S_{k,k}$.*

Доведення. З леми 1 випливає, що існує окіл $O(s)$, що перетинає скінченну кількість множин $S_{k,l}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Покажемо, що для довільного $s \in S_{i,i}$ існує окіл $V(s)$, що перетинає лише множини $S_{k,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Нехай $O(s) \cap S_{m,n} \neq \emptyset$ для деяких $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $m \neq n$. Розглянемо відображення $\phi : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$ означене $\phi(x) = b^{m+n}a^{m+n}x$. Нехай $t \in O(s) \cap S_{m,n}$, тоді $t = b^m t_1 a^n$, $\phi(t) = b^{m+n}a^{m+n}t = b^{m+n}a^{2n}$. Множина $\Phi_{m,n} = \phi^{-1}(b^{m+n}a^{2n})$ замкнена в $\mathcal{C}(S)$, як прообраз точки при неперервному відображенні. Отже, $V(s) = O(s) \setminus (\cup\{\Phi_{m,n} | m, n \in \mathbb{Z}_+, m \neq n$ і $O(s) \cap S_{m,n} \neq \emptyset\})$ – окіл точки $s \in S_{i,i}$, що перетинає лише множини $S_{k,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Припустимо, що для довільного околу $V(s)$ існує $x \in V(s) \cap S_{j,j}$ де $j > i$. Нехай $s = b^i s_1 a^i$, тоді $sb^{i+1}a^{i+1} = b^{i+1}a^{i+1}$. Оскільки $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа, то існують околи $V(s)$, $V(b^{i+1}a^{i+1})$, $W(b^{i+1}a^{i+1})$ такі, що $V(s)V(b^{i+1}a^{i+1}) \subseteq W(b^{i+1}a^{i+1})$, $V(s) \cap V(b^{i+1}a^{i+1}) = V(s) \cap W(b^{i+1}a^{i+1}) = \emptyset$. За припущенням існує $x \in V(s) \cap S_{j,j}$ для деякого $j > i$. Тоді $xb^{i+1}a^{i+1} = x$, що суперечить гаусдорфовості $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. Лему доведено.

Лема 3. *Для довільного $i \in \mathbb{N}$ існує окіл $U(b^i a^i)$ такий, що $U(b^i a^i) \subset S_{i,i} \cup S_{i-1,i-1}$.*

Доведення. Нехай $V(b^i a^i)$ – окіл, що задовольняє умови леми 2. Визначимо неперервне відображення $h : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$ наступним чином $h(x) = xb^{i-1}a^{i-1}$. Окіл $U(b^i a^i) = V(b^i a^i) \setminus h^{-1}(b^{i-1}a^{i-1})$ шуканий.

Лема 4. *Для довільного $s \in S_{i,i} \setminus \{b^i a^i\}$ існує окіл $U(s) \subset S_{i,i}$.*

Доведення. Нехай $V(s)$ – окіл, що задовольняє умови леми 2. Визначимо неперервне відображення $l : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{C}(S)$ таким чином $l(x) = xb^i a^i$. Окіл $U(s) = V(s) \setminus l^{-1}(b^i a^i)$ шуканий.

Лема 5. *Для довільного $\tilde{s} \in \mathcal{C}(S)$ існує окіл, що перетинає лише скінченну кількість множин $S_{i,j}$ $i, j \in \mathbb{Z}_+$*

Доведення. Нехай $\tilde{s} = b^i s a^j$. $\tilde{s} \cdot b^j p a^i = b^i s p a^i$, $b^j p a^i \cdot \tilde{s} = b^j p s a^j$, $(p \neq 1_S)$. Для околів $W(b^i s p a^i) \subseteq S_{i,i}$, $W(b^j p s a^j) \subseteq S_{j,j}$ існують околи $U(\tilde{s})$ і $V(b^j p a^i)$ такі, що

1) $U(\tilde{s})V(b^j pa^i) \subseteq W(b^i spa^i)$;
2) $V(b^j pa^i)U(\tilde{s}) \subseteq W(b^j psa^j)$;
3) $U(\tilde{s}) \cap V(b^j pa^i) = U(\tilde{s}) \cap W(b^i spa^i) = U(\tilde{s}) \cap W(b^j psa^j) = \emptyset$.

Припустимо, що окіл $U(\tilde{s})$ перетинає нескінченну кількість множин $S_{r,q}$ $r, q \in \mathbb{Z}_+$. Тоді існує $x = b^k ta^l \in U(\tilde{s})$ такий, що $l > j$ або $k > i$. Якщо $l > j$, то $b^k ta^l \cdot b^j pa^l = b^k ta^{l-j+i} \in S_{i,i}$, отже, $k = i$, $l = j$, що суперечить тому, що $l > j$. Якщо $k > i$, то $b^j pa^i \cdot b^k ta^l = b^{k-i+j} ta^l \in S_{j,j}$, аналогічно $k = i$, $l = j$. Прийшли до протиріччя. Лему доведено.

Лема 6. *Для довільного $\tilde{s} \in S_{i,j}$ $i, j \in \mathbb{Z}_+$ існує окіл*
$U(\tilde{s}) \subset \cup_{m,n \in \mathbb{Z}_+} \{S_{m,n} | m \leqslant i, n \leqslant j, m - n = i - j\}$.

Доведення. Спочатку покажемо, що для довільного $\tilde{s} \in S_{i,j}$ існує окіл $V(\tilde{s})$, що перетинає скінченну кількість множин $S_{m,n}$, де $m - n = i - j$. Аналогічно як і в лемі 2 доводиться, що множини $M_l(p) = \cup_{k=0}^{p} S_{l+k,k} \cup \{b^{l+p+1} a^{p+1}\}$ і $M_{-l}(p) = \cup_{k=0}^{p} S_{k,l+k} \cup \{b^{p+1} a^{l+p+1}\}$ замкнені в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. За лемою 5 існує окіл $O(\tilde{s})$, що перетинає лише скінченну кількість множин $S_{k,l}$ $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Аналогічно, як і в лемі 2 будується окіл $V(\tilde{s})$, що перетинає лише скінченну кількість множин $S_{m,n}$ таких, що $m - n = i - j$.

Нехай $\tilde{s} = b^i sa^j$. Тоді $\tilde{s} b^{j+1} a^{j+1} = b^{i+1} a^{j+1}$. Оскільки $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ – гаусдорфова топологічна напівгрупа, то існують околи $V(\tilde{s})$, $V(b^{j+1} a^{j+1})$, $W(b^{i+1} a^{j+1})$ такі, що

$$V(\tilde{s})V(b^{j+1} a^{j+1}) \subseteq W(b^{i+1} a^{j+1})$$

$$V(\tilde{s}) \cap V(b^{j+1} a^{j+1}) = V(\tilde{s}) \cap W(b^{i+1} a^{j+1}) = V(b^{j+1} a^{j+1}) \cap W(b^{i+1} a^{j+1}) = \emptyset.$$

Нехай $x \in V(\tilde{s}) \cap S_{i+k,j+k}$ $k \in \mathbb{N}$, тоді $x b^{j+1} a^{j+1} = x$, що суперечить гаусдорфовості $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$. Лему доведено.

Оскільки, для довільних $l, p \in \mathbb{N}$ множини $M_l(p)$, $M_{-l}(p)$ замкнені в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$, то для довільного $s \in S_{i,j} \backslash \{b^i a^j\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, існує окіл $U(s) \subseteq S_{i,j}$ та для довільних $i, j \in \mathbb{N}$ існує окіл $U(b^i a^j)$ такий, що $U(b^i a^j) \subseteq S_{i,j} \cup S_{i-1,j-1}$. Таким чином доведена

Теорема 1. *Топологію прямої суми на $\mathcal{C}(S)$ можна послабити лише в точках $b^i a^j$ $i, j \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2. *Нехай (S, τ) – гаусдорфова топологічна напівгрупа, що містить компактний лівий, або правий, або двосторонній ідеал, $\mathcal{C}(S)$ – напівгрупа Брака на S. Топологія прямої суми τ^* на $\mathcal{C}(S)$ єдина серед гаусдорфових, для яких (S, τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$.*

Доведення. Нехай J – правий компактний ідеал в S. Покажемо, що в точках $b^i a^j$ послаблення топології прямої суми неможливе. Припустимо, що в точках $b^i a^j$ можна послабити топологію τ^* до напівгрупової $\tilde{\tau}$. Нехай U – довільний окіл $b^i a^j$, причому $U \cap S_{i-1,j-1} \neq \emptyset$. Покладемо $V = U \backslash b^{i-1} J a^{j-1}$. Оскільки напівгрупова операція в $\mathcal{C}(S)$ неперервна і $b^{i-1} J a^{j-1} \cdot b^i a^j = b^i a^j$, то існує окіл $U^*(b^i a^j)$ такий, що $b^{i-1} J a^{j-1} U^*(b^i a^j) \subseteq V$ і $U^*(b^i a^j) \cap S_{i-1,j-1} \neq \emptyset$. Але $b^{i-1} J a^{j-1} (U^*(b^i a^j) \cap S_{i-1,j-1}) \subseteq b^{i-1} J a^{j-1}$, що суперечить тому, що $V \cap b^{i-1} J a^{j-1} = \emptyset$. У випадку лівого ідеалу доведення аналогічне.

Наслідок 1. *Нехай (S,τ) – компактна гаусдорфова топологічна напівгрупа. $\mathcal{C}(S)$ – напівгрупа Брака на S. Топологія прямої суми τ^* на $\mathcal{C}(S)$ єдина серед таких гаусдорфових, для яких (S,τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S),\tau^*)$.*

З наслідку 1 випливає, що на біциклічній напівгрупі існує лише дискретна топологія [4, наслідок 1.2].

Теорема 3. *Якщо (S,τ) – топологічна інверсна напівгрупа без мінімального ідемпотента, що є регулярним топологічним простором, то на $\mathcal{C}(S)$ можна послабити топологію прямої суми τ^* до напівгрупової інверсної гаусдорфової топології $\tilde{\tau}$ такої, що (S,τ) топологічно ізоморфно вкладається в $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$ і $\tilde{\tau}|_S=\tau$.*

Доведення. Піднапівгрупа ідемпотентів $E(S)$ – регулярний топологічний простір як замкнений підпростір регулярного S. Тоді для довільного околу $U(e)$ ідемпотента e існує окіл $V(e)\subseteq U(e)$ в $E(S)$ такий, що $\overline{V(e)}\subseteq U(e)$. $E(S)\backslash\overline{V(e)}$ – множина відкрита в $E(S)$ для довільних $e \in E(S)$ і $V(e)$, причому $(E(S)\backslash\overline{V(e)}) \cap V(e) = \emptyset$. Розглянемо функцію $h(x)=xe$. Покладемо $V_e=\{h^{-1}(f)|f\in V(e)\}$ і $\tilde{V}_e=\{h^{-1}(f)|f\in\overline{V(e)}\}$. V_e – відкрита множина в $E(S)$ і $\tilde{V}_e$ – замкнена в $E(S)$, причому $(E(S)\backslash\tilde{V}_e)\cap V_e=\emptyset$. Покладемо $VO_e=E(S)\backslash\tilde{V}_e$. Зауважимо, що $VO_e\cdot VO_e\subseteq VO_e$.

Топологію $\tilde{\tau}$ на $\mathcal{C}(S)$ задамо таким чином. В точках b^isa^j, a^i, b^i, 1 де $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $s\in S\backslash\{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}$ і τ^* співпадають. Базу топології $\tilde{\tau}$ в точках b^ia^j $i,j\in\mathbb{N}$ задамо таким чином $\mathcal{B}(b^ia^j)=\{M_e(b^ia^j)=b^{i-1}V_e^oa^{j-1}\cup b^iMa^j|M\in\mathcal{B}(1),\ V_e^o=\phi^{-1}(VO_e)\cap\psi^{-1}(VO_e)$, де $\phi(x)=xx^{-1}$, $\psi(x)=x^{-1}x$, $e\in E(S)$, $V(e)\in\mathcal{B}(e)\}$, $i,j\in\mathbb{N}$.

Неперервність множення в $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$ достатньо перевірити в трьох наступних випадках:

1) $b^ia^j\cdot b^ka^l$ $i,j,k,l\in\mathbb{N}$;

2) $b^ia^j\cdot b^ksa^l$ $i,j\in\mathbb{N}$, $k,l\in\mathbb{Z}_+$, $s\in S$;

3) $b^isa^j\cdot b^ka^l$ $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $k,l\in\mathbb{N}$, $s\in S$.

1) Нехай $b^ia^j\cdot b^ka^l=\begin{cases} b^{i-j+k}a^l, & j\leqslant k\\ b^ia^{l-k+j}, & j>k.\end{cases}$

Тоді $M_e(b^ia^j)\cdot P_e(b^ka^l)\subseteq R_e(b^ia^j\cdot b^ka^l)$, де M,P,R – околи одиниці в S^1 такі, що $M\cdot P\subset R$.

2) Нехай $b^ia^j\cdot b^ksa^l=\begin{cases} b^{i-j+k}sa^l, & j\leqslant k\\ b^ia^{l-k+j}, & j>k.\end{cases}$

Тоді

а) якщо $j\leqslant k$, то $M_e(b^ia^j)\cdot b^kW(s)a^l\subseteq b^{i+k-j}V(s)a^l$, де $M\cdot W(s)\subseteq V(s)$ і M – окіл 1 в S^1;

б) якщо $j>k$, то для довільного околу $W(s)$ $M_e(b^ia^j)\cdot b^kW(s)a^l\subseteq M_e(b^ia^{j-k+l})$.

3) Нехай $b^isa^j\cdot b^ka^l=\begin{cases} b^{i-j+k}a^l, & j<k\\ b^isa^{l-k+j}, & j\geqslant k.\end{cases}$

Тоді

а) якщо $j<k$, то для довільного околу $W(s)$ $b^iW(s)a^j\cdot M_e(b^ka^l)\subseteq M_e(b^{i-j+k}a^l)$;

б) якщо $j\geqslant k$, то $b^iW(s)a^j\cdot M_e(b^ka^l)\subseteq b^iV(s)a^{j-k+l}$, де $W(s)\cdot M\subseteq V(s)$ і M – окіл 1 в S^1.

Отже, множення неперервне в $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$.

Неперервність інверсії достатньо показати в точках $b^i a^j$ $i, j \in \mathbb{N}$, оскільки лише в них відбувається послаблення топології прямої суми. Якщо $P^{-1} \subseteq M$, де P і M– околи одиниці в S і $e \in E(S)$, тоді $(M_e(b^i a^j))^{-1} \subseteq P_e(b^j a^i)$.

1. Bruck R.H. *A survey of binary systems* // Ergebnisse der Math. – 1958. – Heft 20.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. т.2. – М.: Мир, 1972. – 424 с.
3. Гутик О.В. *Вложение топологических полугрупп в простые* // Математичні студії. – 1994. – N 3. – С. 10-14.
4. Eberhart C., Selden J. *On the closure of the bicyclic semigroup* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 115-126.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.95

УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Г. М. Онишкевич

Onyshkevych G. M. Liapunov's stability of variational inequality for the equation of the type of a plate vibration. The variational inequality for a plate vibration type equation is considered. The class of existence and uniqueness of solutions and some conditions of Liapunov's stability have been obtained for this inequality. This class is defined by coefficients of the inequality.

У праці [1] запропоновано застосування методу Гальоркіна до дослідження стійкості нульового розв'язку одного нелінійного параболічного рівняння Цей підхід є ефективним у тих випадках, коли не працюють теореми типу Ляпунова. Підтвердженням цього є можливість дослідження стійкості нульового розв'язку варіаційних нерівностей. У даній праці розглянуто стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку варіаційної нерівності для рівняння типу коливання пластинки. Наскільки нам відомо, такі результати отримано вперше.

Нехай Ω – довільна обмежена область простору $\mathbb{R}^n$, $S = [0; +\infty)$, $Q = \Omega \times S$, $V = \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $K-$ замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент. Розглянемо задачу визначення функції $u(x,t)$, що задовольняє нерівність

$$\int_0^T \Big(u_{tt} + A(t)u - f, v - u_t \Big)\, dt \geqslant 0, \tag{1}$$

де T–довільна стала, для довільної $v(x,t)$, $v \in L^2(S;V)$, $v \in K$ майже для всіх $t \in S$; включення

$$u,\ u_t \in L^\infty_{\text{loc}}(S;V),\ u_{tt} \in L^\infty_{\text{loc}}(S;H), \tag{2}$$

$$u_t \in K \text{ майже для всіх } t \in S, \tag{3}$$

а також умови

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x),\ x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega. \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B35; Secondary 35R45.

Дія оператора A визначається рівністю

$$\langle A(t)u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,t) u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_j} v_{x_i} + c(x,t) u_t v + h(x,t) uv \right) dx.$$

Вважатимемо, що виконуються умови

$$\begin{gathered} a_{ij}^{kl} = a_{kl}^{ij},\ b_{ij} = b_{ji},\ \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,t)\eta_{kl}\eta_{ij} \geqslant a_0 \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ij}^2,\ a_0 > 0, \\ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_j\xi_i \geqslant b_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \text{ для довільних } \eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2},\ \xi \in \mathbb{R}^n, \\ b_0 + \frac{a_0\gamma_1}{\varkappa_1} \geqslant \delta_1,\ h(x,t) + \frac{a_0\gamma_2}{\varkappa_0} \geqslant \delta_1,\ c_0 \leqslant c(x,t) \leqslant c^0,\ (x,t) \in Q, \end{gathered} \tag{5}$$

де $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \delta_1-$ додатні сталі, причому $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (5) і, крім того,*

$$\begin{gathered} a_{ij}^{kl},\ a_{ijt}^{kl},\ a_{ijtt}^{kl},\ b_{ij},\ b_{ijt},\ b_{ijtt},\ h,\ h_t,\ h_{tt},\ c,\ c_t \in L^\infty(Q);\ c_0 \geqslant 0,\ u_0 \in V, \\ A(0)u_0 \in H,\ u_1 \in K, \quad \text{а функція } f(x,t) \text{ така, що } f,\ f_t \in L^2_{\text{loc}}(S; H). \end{gathered} \tag{6}$$

Тоді нерівність (1) має єдиний розв'язок, який задовольняє включення (2), (3) і умови (4).

Доведення. Зауважимо, що доведення цієї теореми проводиться за схемою доведення теореми 7.1 ([2], с.418). Ми наводимо його для повноти викладу. Візьмемо обмежену область $Q_T = \Omega \times (0;T)$, $T < +\infty$. Розглянемо задачу зі штрафом

$$u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_{\varepsilon t}) = f(x,t),\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ u_{\varepsilon t}(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{7}$$

де $\varepsilon > 0$, $\beta(u) = J(u - P_K(u))$, $J-$ оператор двоїстості між V і V^*, P_K- оператор проектування на K. Очевидно, що $u_{\varepsilon tt}(x,0) = f(x,0) - A(0)u_0$, $u_2(x) = f(x,0) - A(0)u_0 \in H$. Розглянемо задачу, яка отримується з рівняння (7) після формального диференціювання по t:

$$\begin{gathered} u_{\varepsilon ttt} + A(t)u_{\varepsilon t} + A'(t)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon t}) = f_t(x,t), \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ u_{\varepsilon t}(x,0) = u_1(x),\ u_{\varepsilon tt}(x,0) = u_2(x),\ x \in \Omega. \end{gathered} \tag{8}$$

У монографії [2], с. 413 показано, що

$$\int_0^T (\beta'(u_{\varepsilon t}), u_{\varepsilon tt})dt \geqslant 0 \tag{9}$$

і тому задача (8) має єдиний розв'язок u_ε, $u_{\varepsilon t} \in L^\infty(0,T;V)$, $u_{\varepsilon tt} \in L^\infty(0,T;H)$. Помножимо рівняння (7) на $u_{\varepsilon t}$ і зінтегруємо по τ від 1 до t. Тоді отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_t}\Bigg(u_{\varepsilon\tau\tau}u_{\varepsilon\tau} + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,\tau)u_{\varepsilon x_k x_l}u_{\varepsilon\tau x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,\tau)u_{\varepsilon x_j}u_{\varepsilon\tau x_i} + \tag{10}$$

$$+c(x,\tau)(u_{\varepsilon\tau})^2 + h(x,\tau)u_\varepsilon u_{\varepsilon\tau}\Bigg)dx\,d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_t}\beta(u_{\varepsilon\tau})u_{\varepsilon\tau}dx\,d\tau = \int\limits_{Q_t} f(x,\tau)u_{\varepsilon\tau}dx\,d\tau.$$

Оператор штрафу β є монотонним, тобто $(\beta(u_{\varepsilon\tau}), u_{\varepsilon\tau}) \geqslant 0$. Враховуючи умови теореми, з рівності (10) одержимо

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + 2c_0\int\limits_{Q_t}|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t(\beta(u_{\varepsilon\tau}), u_{\varepsilon\tau})d\tau \leqslant |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2 + 2\int\limits_{Q_t} f u_{\varepsilon\tau}dx\,d\tau, \tag{11}$$

де $|v(t)|^2 = \int\limits_\Omega v^2(x,t)dx$, а a_1, b_1, h_1 – такі додатні сталі, що

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}(x,t)\eta_{kl}\eta_{ij} \leqslant a_1\sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}^2,\ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_j\xi_i \leqslant b_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ h(x,t) \leqslant h_1$$

для довільних $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $(x,t) \in Q$. Тоді з нерівності (11) будемо мати оцінку

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leqslant |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2 +$$
$$+\int_0^t|f(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 + \|u_\varepsilon(\tau)\|_V^2\big)d\tau,$$

де $\|v(t)\|_V^2 = \int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(v_{x_i x_j})^2dx$. Позначимо $A_1 = \min\{1, a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\}$, $C_1 = |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2 + \int_0^T|f(\tau)|^2d\tau$. Отже, маємо

$$A_1(|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_V^2) \leqslant C_1 + \int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 + \|u_\varepsilon(\tau)\|_V^2\big)d\tau. \tag{12}$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана до нерівності (12), одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leqslant \frac{C_1}{A_1}\exp\left(\frac{T}{A_1}\right), \quad t \in [0;T]. \tag{13}$$

Згідно з оцінкою (13) маємо, що $u_{\varepsilon t}$ – обмежені в $L^\infty(0,T;H)$, u_ε – обмежені в $L^\infty(0,T;V)$. Помножимо рівняння (8) на $u_{\varepsilon tt}$ і зінтегруємо по τ від 1 до t. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_t}\Bigg(u_{\varepsilon\tau\tau\tau}u_{\varepsilon\tau\tau}+\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}\,u_{\varepsilon\tau x_kx_l}u_{\varepsilon\tau\tau x_ix_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\,u_{\varepsilon\tau x_j}u_{\varepsilon\tau\tau x_i}+$$
$$+c\,(u_{\varepsilon\tau\tau})^2+h\,u_{\varepsilon\tau}u_{\varepsilon\tau\tau}+\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij\tau}^{kl}\,u_{\varepsilon x_kx_l}u_{\varepsilon\tau\tau x_ix_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij\tau}\,u_{\varepsilon x_j}u_{\varepsilon\tau\tau x_i}+$$
$$+c_\varepsilon\,u_{\varepsilon\tau}u_{\varepsilon\tau\tau}+h_\varepsilon\,u_\varepsilon u_{\varepsilon\tau\tau}\Bigg)dx\,d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_t}\beta'(u_{\varepsilon\tau})u_{\varepsilon\tau\tau})dx\,d\tau=\int\limits_{Q_t}f_\tau\,u_{\varepsilon\tau\tau}dx\,d\tau. \qquad (14)$$

Враховуючи нерівність (9), з рівності (14) одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon tt}(t)|^2+a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2\leqslant|u_2|^2+(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_1\|_V^2+$$
$$+\int_0^t\big((1+c^0)|u_{\varepsilon\tau\tau}(\tau)|^2+(a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0)\|u_\varepsilon(\tau)\|_V^2\big)d\tau+$$
$$+c^0\int_0^t|u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2d\tau+\int_0^t|f_\tau(\tau)|^2d\tau,$$

де c^0, a_2, b_2, h_2 – такі додатні сталі, що

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ijtt}^{kl}(x,t)\eta_{kl}\eta_{ij}\leqslant a_2\sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}^2,\ \sum_{i,j=1}^{n}b_{ijtt}(x,t)\xi_j\xi_i\leqslant b_2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$
$$h(x,t)\leqslant h_2,\ |c(x,t)|\leqslant c^0$$

для довільних $\eta\in\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(x,t)\in Q$. Покладемо $A_2=\max\{1+c^0,\ a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0\}$, $C_2=|u_2|^2+(a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\|u_1\|_V^2+\int_0^T|f_\tau(\tau)|^2d\tau$. Використовуючи оцінку (13), отримаємо нерівність

$$A_1(|u_{\varepsilon tt}(t)|^2+\|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2)\leqslant C_2+A_2\int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau\tau}(\tau)|^2+\|u_{\varepsilon\tau}(\tau)\|_V^2\big)d\tau+$$
$$+(c^0+a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0)\int_0^t\frac{C_1}{A_1}\exp\left(\frac{\tau}{A_1}\right)d\tau.$$

Позначимо $C_3=C_2+(c^0+a_2+b_2\varkappa_1+h_2\varkappa_0)C_1\left(\exp\left(\frac{T}{A_1}\right)-1\right)$. Тоді

$$A_1(|u_{\varepsilon tt}(t)|^2+\|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2)\leqslant C_3+A_2\int_0^t\big(|u_{\varepsilon\tau\tau}(\tau)|^2+\|u_{\varepsilon\tau}(\tau)\|_V^2\big)d\tau.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла – Беллмана, одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon tt}(t)|^2 + \|u_{\varepsilon t}(t)\|_V^2 \leqslant \frac{C_3}{A_1} \exp\left(\frac{C_3 T}{A_1}\right), \quad t \in [0; T]. \tag{15}$$

Тобто $u_{\varepsilon tt}$– обмежені в $L^\infty(0,T;H)$, $u_{\varepsilon t}$– обмежені в $L^\infty(0,T;V)$. Згідно з оцінками (13) і (15) з послідовності $\{u_\varepsilon\}$ можна виділити таку підпослідовність $\{u^{\varepsilon_k}\}$, що

$$u^{\varepsilon_k} \to u^T,\ u_t^{\varepsilon_k} \to u_t^T * -\text{ слабо в } L^\infty(0,T;V),$$
$$u_{tt}^{\varepsilon_k} \to u_{tt}^T * -\text{ слабо в } L^\infty(0,T;H),\ \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Отже, функція $u^T(x,t)$ задовольняє умови (4). Покажемо, що для $u^T(x,t)$ має місце включення (3). Згідно з рівнянням (7) $\beta(u_{\varepsilon t}) = \varepsilon(f - u_{\varepsilon tt} - A(t)u_\varepsilon)$, тобто $\beta(u_{\varepsilon t}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в $L^2(0,T;V^*)$. Крім того, використовуючи (9) і (11), отримаємо

$$0 \leqslant \int_0^T (\beta(u_{\varepsilon t}), u_{\varepsilon t})dt \leqslant \varepsilon C.$$

Отже, $\beta(u_t^T) = 0$, звідки випливає, що $u_t^T(x,t) \in K$ майже скрізь в $S_T = (0;T)$.

Візьмемо $v(x,t)$, $v \in L^2(S;V)$, $v \in K$ майже скрізь. Тоді

$$(u_{tt}^\varepsilon + A(t)u^\varepsilon - f, v - u_t^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(\beta(v) - \beta(u_t^\varepsilon), v - u_t^\varepsilon) \geqslant 0 \tag{17}$$

для довільного ε. Зокрема, для $v = u_t^T$ маємо

$$(u_{tt}^\varepsilon + A(t)u^\varepsilon - f, u_t^T - u_t^\varepsilon) \geqslant 0.$$

Звідси отримаємо нерівність

$$(A(t)(u^T - u^\varepsilon), u_t^T - u_t^\varepsilon) \leqslant (A(t)u^T, u_t^T - u_t^\varepsilon) + (u_{tt}^\varepsilon, u_t^T - u_t^\varepsilon) + (f, u_t^T - u_t^\varepsilon). \tag{17}$$

Оцінимо ліву частину нерівності (17) знизу, а саме

$$\int_0^t (A(\tau)(u^T - u^\varepsilon), u_\tau^T - u_\tau^\varepsilon)d\tau \geqslant \frac{1}{2}a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) \int\limits_{D_t} \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j}^T - u_{x_i x_j}^\varepsilon)^2 dx. \tag{18}$$

Таким чином, одержали оцінку

$$\frac{1}{2}a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2)\|u^T - u^\varepsilon\|_V^2 \geqslant \int_0^t (A(\tau)(u^T - u^\varepsilon), u_\tau^T - u_\tau^\varepsilon)d\tau \geqslant A_3$$

для довільного $t \in [0;T]$, де A_3 – це права частина нерівності (18). Очевидно, що $A_3 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді $A(t)(u^T - u^\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ сильно. Отже, можна перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ у нерівності (16). Матимемо

$$(u_{tt}^T + A(t)u^T - f, v - u_t^T) \geqslant 0 \text{ для } t \in [0;T].$$

Звідси $u^T(x,t)$ задовольняє нерівність (1), тобто $u^T(x,t)$ є шуканою функцією. Згідно з оцінками (13), (15) існує така підпослідовність $\{u^{i,\varepsilon_k}\}$, що

$$u^{i,\varepsilon_k} \to u^i,\ u_t^{i,\varepsilon_k} \to u_t^i * - \text{слабо в } L^\infty(S_i;V),$$
$$u_{tt}^{i,\varepsilon_k} \to u_{tt}^i * - \text{слабо в } L^\infty(S_i;H),\ \text{при } \varepsilon_k \to 0.$$

Очевидно, що $u^i \equiv u^{i-1}$ в Q_{i-1}. Продовжимо кожну функцію $u^{i,\varepsilon_k}(x,t)$ нулем на область $Q \setminus Q_i$. Виберемо таку послідовність $u^{m,\varepsilon_k}(x,t)$, що для фіксованого i має місце

$$u^{m,\varepsilon_k} \to u^i,\ u_t^{m,\varepsilon_k} \to u_t^i * - \text{слабо в } L^\infty(S_i;V),$$
$$u_{tt}^{m,\varepsilon_k} \to u_{tt}^i * - \text{слабо в } L^\infty(S_i;H),\ \text{при } \varepsilon_k \to 0.$$

Позначимо через $u(x,t)$ функцію, яка для кожного i в Q_i співпадає з $u^i(x,t)$. Очевидно, що $u(x,t)$ задовольняє нерівність (1) і включення (2), (3).

Нехай u_1 і u_2 є два можливі розв'язки нерівності (1). Тоді

$$\int_0^T (u_{1tt} + A(t)u_1 - f, v - u_{1t})dt \geqslant 0,\ \int_0^T (u_{2tt} + A(t)u_2 - f, v - u_{2t})dt \geqslant 0.$$

Підставимо у ці нерівності відповідно функції

$$v = \begin{cases} u_{2t} & , t \in [0;\tau]; \\ 0 & , t \in (\tau;+\infty), \end{cases} \qquad v = \begin{cases} u_{1t} & , t \in [0;\tau]; \\ 0 & , t \in (\tau;+\infty), \end{cases}$$

де τ – довільне додатне число, $\tau < T$. Отримаємо:

$$\int_0^T (u_{1tt} + A(t)u_1 - f, u_{2t} - u_{1t})dt \geqslant 0,\ \int_0^T (u_{2tt} + A(t)u_2 - f, u_{1t} - u_{2t})dt \geqslant 0.$$

Додамо дві останні нерівності:

$$-\int_0^T (u_{1tt} - u_{2tt} + A(t)(u_1 - u_2), u_{1t} - u_{2t})dt \geqslant 0.$$

Поклавши $w = u_1 - u_2$, одержимо оцінку

$$-\int_0^T (w_{tt} + A(t)w, w_t)dt \geqslant 0,\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0,\ x \in \Omega. \tag{19}$$

Використовуючи інтегрування частинами, з (19) отримаємо

$$|w_t(\tau)|^2 + \int\limits_{D_\tau} \Bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl} w_{x_i x_j} w_{x_k x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} w_{x_i} w_{x_j} + hw^2 \Bigg) dx + 2c_0 \int\limits_{Q_\tau} w_t^2 dx\, dt \leqslant 0.$$

Звідси

$$|w_t(\tau)|^2 + a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2)\|w(\tau)\|_V^2 + 2c_0 \int_0^\tau |w_t(t)|^2 dt \leqslant 0.$$

Отже, $w \equiv 0$ в Q і теорему 1 доведено.

Зауваження. *Якщо в нерівності (1)* $f(x,t) \equiv 0$, $c_0 > 0$ *і*

$$\langle A(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl}(x) u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i} + c(x,t) u_t v + h(x) uv \Big) dx,$$

то включення (2) для $u(x,t)$ *набудуть вигляду*

$$u,\ u_t \in L^2(S;V), \quad u_{tt} \in L^2(S;H).$$

Доведення. Враховуючи дані припущення, нерівність (11) перепишеться таким чином

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + 2c_0 \int\limits_{Q_t} |u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 d\tau \leqslant$$
$$\leqslant |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2.$$

Звідси

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leqslant C_4 \int_0^t |u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 d\tau \leqslant \frac{C_4}{2c_0}, \quad t \in S \tag{20}$$

для довільного ε, де $C_4 = |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2$. Тобто $u_{\varepsilon t} \in L^2(S;H)$ для довільного ε. Зробимо таку оцінку

$$\left|\int_0^T (u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon, u_{\varepsilon t}) dt\right| = \left|\frac{1}{2}|u_{\varepsilon t}(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_1|^2 + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{D_T} \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl} u_{\varepsilon x_i x_j} u_{\varepsilon x_k x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{\varepsilon x_i} u_{\varepsilon x_j} + h u_\varepsilon^2 \Big) dx -$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{D_0} \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl} u_{0 x_i x_j} u_{0 x_k x_l} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{0 x_i} u_{0 x_j} + h u_0^2 \Big) dx +$$
$$\left. + \int\limits_{Q_T} c(x,t) u_{\varepsilon t}^2 dx\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2}|u_{\varepsilon t}(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}(a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_\varepsilon(T)\|_V^2 + c_0 \int_0^T |u_{\varepsilon t}(t)|^2 dt.$$

Використовуючи оцінки (20), отримаємо нерівність

$$\left|\int_0^T (u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon, u_{\varepsilon t}) dt\right| \leqslant C_5$$

для довільних T і ε, де стала C_5 не залежить від T, ε. Тоді

$$\left|\int_0^\infty (u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon, u_{\varepsilon t}) dt\right| = \lim_{T\to\infty}\left|\int_0^T (u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon, u_{\varepsilon t}) dt\right| \leqslant C_5$$

для довільного ε. Отже, отримали оцінку

$$\left| \int_0^\infty (u_{tt} + A(t)u, u_t) dt \right| \leqslant C_5,$$

звідки випливають включення: $u,\ u_t \in L^2(S;V)$, $u_{tt} \in L^2(S;H)$.

Нехай $f(x,t) \equiv 0$ в Q. Введемо позначення

$$\rho(u(x,t)) = \left(\iint\limits_{\Omega} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова (5) і, крім того,*

$$u_0 \in V,\ A(0)u_0 \in H,\ u_1 \in K;\ c_0 \geqslant 0;$$
$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijt}^{kl}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl} \leqslant 0,\ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant 0,\ h_t \leqslant 0$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $(x,t) \in Q$. *Тоді нульовий розв'язок нерівності (1) буде стійким за Ляпуновим. Якщо ж* $c_0 > 0$, *то нульовий розв'язок буде асимптотично стійким і* $\|u\|_V \leqslant \sqrt{A_7}e^{-\lambda t}$ *для майже всіх* $t \in S$, *де* A_7 *і* λ *– додатні сталі.*

Доведення. Побудований розв'язок $u(x,t)$ є граничною точкою послідовності розв'язків задачі (7). Для довільного $\varepsilon > 0$ можна отримати нерівність

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + 2c_0 \int_0^t |u_{\varepsilon\tau}(\tau)|^2 d\tau \leqslant$$
$$\leqslant |u_1|^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0)\|u_0\|_V^2.$$

Нехай $A_4 = \max\{1;\ a_1 + b_1\varkappa_1 + h_1\varkappa_0\}$. Тоді одержимо оцінку

$$|u_{\varepsilon t}(t)|^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_V^2 \leqslant \frac{A_4}{A_1}(|u_1|^2 + \|u_0\|_V^2).$$

Тобто

$$\rho^2(u_\varepsilon(x,t)) \leqslant \frac{A_4}{A_1}\rho^2(u_\varepsilon(x,0)) \leqslant \frac{A_4}{A_1}\rho^2(u(x,0))$$

для $t \in S$ і довільних ε. Отже, існує така додатна стала C_6, яка не залежить від ε і t, що

$$\rho(u_\varepsilon(x,t)) \leqslant C_6 \rho(u(x,0)). \tag{21}$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ в (21), одержимо $\rho(u(x,t)) \leqslant C_6\rho(u(x,0))$ для майже всіх $t \in S$. Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку доведено.

Розглянемо випадок, коли $c_0 > 0$. Асоційовану задачу зі штрафом для u_ε запишемо таким чином

$$u_{\varepsilon tt} + A(t)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta((u_{\varepsilon t} + \lambda u_\varepsilon)e^{-\lambda t})e^{\lambda t} = 0, \tag{22}$$

де $\lambda > 0$, а β – оператор штрафу , аналогічно як в задачі (7). Покладемо $u_\varepsilon = we^{-\lambda t}$. Тоді згідно з рівністю (20) одержимо, що

$$w_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \left(a_{ij}^{kl} w_{x_i x_j}\right)_{x_k x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} w_{x_i}\right)_{x_j} + (h + \lambda(\lambda - c))w + (c - 2\lambda)w_t + \frac{1}{\varepsilon}\beta(w_t) = 0. \tag{23}$$

Помножимо рівність (23) на w_t і зінтегруємо по області Q_t. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_t} \Bigg(w_{tt}w_t + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl} w_{x_i x_j} w_{t x_k x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} w_{x_i} w_{t x_j} +$$
$$+ (h + \lambda(\lambda - c))ww_t + (c - 2\lambda)w_t^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (\beta(w_t), w_t) \Bigg) = 0.$$

Після нескладних перетворень одержимо нерівність

$$\int\limits_{D_t} \left(w_t^2 + (a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(\lambda - c^0)) \sum_{i,j=1}^{n} w_{x_i x_j}^2 \right) dx + 2(c_0 - 2\lambda) \int\limits_{Q_t} w_t^2 dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{D_0} \left((1 + \lambda)u_1^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + \varkappa_0(h_1 + \lambda(\lambda + 1))) \sum_{i,j=1}^{n} u_{0x_i x_j}^2 \right) dx.$$

Повертаючись до u_ε, отримаємо оцінку

$$\int\limits_{D_t} \left((1 - \lambda)u_{\varepsilon t}^2 + (a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(2\lambda - c^0 - 1)) \sum_{i,j=1}^{n} u_{\varepsilon x_i x_j}^2 \right) dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{D_0} \left((1 + \lambda)u_1^2 + (a_1 + b_1\varkappa_1 + \varkappa_0(h_1 + \lambda(\lambda + 1))) \sum_{i,j=1}^{n} u_{0x_i x_j}^2 \right) dx e^{-2\lambda t}.$$

Виберемо λ так, щоб справджувались умови:

$$c_0 \geqslant 2\lambda, \; a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(2\lambda - c^0 - 1) > 0. \tag{24}$$

Позначимо $A_5 = \min\{1 - \lambda;\; a_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \lambda\varkappa_0(2\lambda - c^0 - 1)\}$, $A_6 = \max\{1 + \lambda;\; a_1 + b_1\varkappa_1 + \varkappa_0(h_1 + \lambda(\lambda + 1))\}$, тоді одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_t}\left(u_{\varepsilon t}^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_{\varepsilon x_ix_j}^2\right)dx\leqslant\frac{A_6}{A_5}\int\limits_{D_0}\left(u_1^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_{0x_ix_j}^2\right)dx\,e^{-2\lambda t}$$

для довільних ε, $t\in[0;T]$, де T – довільне додатне число. Отже, маємо нерівність

$$\|u_\varepsilon\|_V^2\leqslant\frac{A_6}{A_5}\int\limits_{D_0}\left(u_1^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_{0x_ix_j}^2\right)dx\,e^{-2\lambda t}=A_7e^{-2\lambda t}$$

для довільних ε і $t\in S$, що й завершує доведення теоеми 2.

1. Лавренюк С.П., Онишкевич Г.М. *Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку одного нелінійного параболічного рівняння*// Доп. НАН України. – 1996. – N 6. – С. 10-12.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., Мир, 1972. – 588 с.

Стаття надійшла до редколегії ***20.09.96***

УДК 517.95

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ БЕЗТИПНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І. О Бобик , О. І. Бобик, Б. Й. Пташник

Bobyk I. O., Bobyk O. I., Ptashnyk B. Yo. Boundary value problem for a higher-order equation. Well-posed of a problem with the local two-point conditions on time and periodic conditions on space variables for general (type independent) equations with partial derivatives with constant complex coefficients is investigated. Solvability of a problem is connected with a question of the small denominations. Metric method is used to obtain the low estimations of denominations.

1. Задачі з даними на всій границі обмеженої області для загальних (у тому числі гіперболічних) диференціальних операторів з частинними похідними є, взагалі, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і є нестійкою відносно малих змін області та коефіцієнтів рівнянь і граничних умов (див. [1,2]). У даній роботі, яка є продовженням і розвитком праць [3,4], досліджено коректність задачі з локальними двоточковими крайовими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за $x_1, ..., x_p$ для загальних (незалежно від типу) рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Значне місце в роботі займає метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, які мають складну нелінійну конструкцію.

Нижче використовуватимемо позначення введені в праці [4], а також такі функціональні простори: $B_\delta(\Omega^p)$ $(\delta > 0)$ – простори 2π-періодичних за $x_1, \dots, x_p$ комплекснозначних функцій $v(x) = \sum\limits_{|k|\geqslant 0} v_k \exp(i(k,x))$, для яких є обмеженою норма

$$\|v(x)\|_{B_\delta(\Omega^p)} = \sum_{|k|\geqslant 0} |v_k| \exp(\delta\|k\|);$$

$C^n\Big([0,T], B_\delta(\Omega^p)\Big)$ – простір таких функцій $g(t,x)$, що $\dfrac{\partial^r g(t,x)}{\partial t^r} \in B_\delta(\Omega^p)$, $t \in [0;T]$, $r = 0, 1, ..., n$ і неперервні за t в нормі $B_\delta(\Omega^p)$,

$$\|g(t,x)\|_{C^n([0;T],B_\delta(\Omega^p))} = \sum_{j=1}^{n} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left\| \frac{\partial^j g(t,x)}{\partial t^j} \right\|_{B_\delta(\Omega^p)};$$

Γ – простір тригонометричних многочленів, а Γ' – простір лінійних неперервних функціоналів над Γ з відповідними топологіями (простір Γ' співпадає з простором формальних

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G15.

тригонометричних рядів [5, гл. 2]); $C^n([0;T],\Gamma)$ $(C^n([0;T],\Gamma'))$ – простір функцій $u(t,x)$ таких, що $\dfrac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} \in \Gamma(\Gamma')$, $j = 0,1,...,n$ для довільного $t \in [0;T]$.

2. В області D^p, що є декартовим добутком відрізка $0 \leqslant t \leqslant T$ на p-вимірний тор Ω^p, розглянемо задачу

$$\sum_{|s|=n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1} ... \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{s_p} u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{j_1-1}u}{\partial t^{j_1-1}}\Big|_{t=0} = \varphi_{j_1}(x), \quad \frac{\partial^{j_2-1}u}{\partial t^{j_2-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_{m+j_2}(x), \tag{2}$$

де $j_1 = 1,\dots,m$; $j_2 = 1,\dots,n-m$; $1 \leqslant m \leqslant n-1$; A_s – комплексні числа; $A_{n,0,\dots,0} \neq 0$ (не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $A_{n,0,\dots,0} = 1$). Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за $x_1,\dots,x_p$ на функції $u(t,x)$ та $\varphi_q(x)$, $q = 1,\dots,n$. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_k(t)\exp(i(k,x)). \tag{3}$$

Підставляючи ряд (3) у рівняння (1) та умови (2), для визначення кожної з функцій $u_k(t)$ отримаємо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння

$$\sum_{|s|=n} A_s k_1^{s_1} ... k_p^{s_p} \frac{d^{s_0}u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{4}$$

$$U_{j_1}[u_k(t)] \equiv \frac{\partial^{j_1-1}u_k(t)}{\partial t^{j_1-1}}\Big|_{t=0} = \varphi_{j_1,k}, \quad U_{m+j_2}[u_k(t)] \equiv \frac{\partial^{j_2-1}u}{\partial t^{j_2-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_{m+j_2,k}, \tag{5}$$

де $j_1 = 1,\dots,m$; $j_2 = 1,\dots,n-m$; $1 \leqslant m \leqslant n-1$; $\varphi_{j,k}$ – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$.

Зауважимо, що при $k = (0)$ завжди існує єдиний розв'язок $u_{(0)}(t)$ задачі (4), (5), який є многочленом степеня $n-1$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{(0)\}$ фундаментальна система розв'язків рівняння (4) має вигляд $u_{k,q,r_q}(t) = t^{r_q-1}\exp(\|k\|\lambda_q(k)t)$, $q = 1,...,\ell$; $r_q = 1,...,m_q$, де $\lambda_q(k)$ – корені рівняння

$$\sum_{|s|=n} A_s \left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p} \lambda^{s_0} = 0, \tag{6}$$

з кратностями m_q відповідно, $m_1 + \dots + m_\ell = n$ (для спрощення викладок будемо вважати, що кратності коренів не залежать від k). Зауважимо, що корені рівняння (6) є рівномірно обмежені відносно k; тому $|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)| \leqslant C$, $j = 1,...,\ell$, де стала C не залежить від k. Характеристичний визначник задачі (4),(5) має вигляд

$$\triangle(k) = \det\Big\|U_j[u_{k,q,r_q}(t)]\Big\|_{j;q;r_q=1}^{n;\ell;m_q} = \|k\|^{\alpha}\triangle_1(k),$$

де $\alpha = \dfrac{2m^2 - 2mn + n^2 - n}{2} - \sum\limits_{j=1}^{\ell} \dfrac{m_j(m_j-1)}{2}$, а визначник $\triangle_1(k)$ обчислюється за формулою

$$\triangle_1(k) = \sum_{g \in G^{m,\ell}} P_g(\|k\|T)\exp\Big[\|k\|(\lambda(k), g)T\Big],$$

де $G^{m,\ell} = \{g = (g_1, \ldots, g_\ell) \in \mathbb{Z}_+^\ell : g_r \leqslant m_r (r = 1, \ldots, \ell), |g| = n - m\}$; $P_g(\xi)$ – многочлен степеня $f(g) = \sum\limits_{r=1}^{\ell} g_r(m_r - g_r)$, коефіцієнти якого поліноміально залежать від координат вектора $\lambda(k) = (\lambda_1(k), \ldots, \lambda_\ell(k))$, $(\lambda(k), g) = \sum\limits_{\nu=1}^{\ell} \lambda_\nu(k) g_\nu$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^n([0;T], \Gamma')$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\triangle_1(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}. \tag{7}$$

Доведення випливає з єдиності розвинення в ряд Фур'є функції з класу Γ'.

При виконанні умов (7) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок задачі (4), (5), а розв'язок задачі (1), (2) формально зображається у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_{(0)}(t) + \sum_{|k|>0} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{\ell} \sum_{r_q=1}^{m_q} \frac{\triangle_{j,q,r_q}(k)}{\triangle(k)} u_{k,q,r_q}(t)\varphi_{j,k} \right\} \exp(i(k,x)), \tag{8}$$

де $\triangle_{j,q,r_q}(k)$ – алгебраїчне доповнення елемента j-го рядка і стовпця з номером $m_1 + \cdots + m_{q-1} + r_q$ у визначнику $\triangle(k)$.

На підставі формули (8) отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (7) і нехай $\varphi_j(x) \in \Gamma(\Gamma')$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді існує розв'язок задачі (1), (2), який належить простору $C^n\big([0;T], \Gamma\big)$ $\big(C^n([0;T], \Gamma')\big)$.*

Існування розв'язку розглядуваної задачі в інших функціональних просторах пов'язане з проблемою малих знаменників, бо величина $|\triangle(k)|$, що відмінна від нуля, може ставати як завгодно малою для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \big\{(0)\big\}$ $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_{j+1}(k)$, $j = 1, \ldots, \ell - 1$. Позначимо через $\tilde{\lambda}_r(k)$, $r = 1, \ldots, n$ всі корені рівняння (6), враховуючи їх кратність; при цьому $\widetilde{\lambda}_{m_1+\cdots+m_{q-1}+j}(k) = \lambda_q(k)$ $q = 1, \ldots, \ell$, $r_q = 1, ..., m_q$; $\widetilde{m} = \min\{m; n-m\}$,

$$\beta_1 = \begin{cases} 2\widetilde{m} + 1, & \text{якщо} \quad n < 2m, \\ 2\widetilde{m}, & \text{якщо} \quad n \geqslant 2m, \end{cases} \qquad \beta_2 = \begin{cases} 2\widetilde{m} + 1, & \text{якщо} \quad n > 2m, \\ 2\widetilde{m}, & \text{якщо} \quad n \leqslant 2m. \end{cases}$$

Теорема 3. *Нехай існують* $M > 0$ *і* $\chi \in \mathbb{Z}$ *такі, що для довільного* $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K$ *виконуються нерівності*

$$|\triangle_1(k)| > M\|k\|^{-\chi} \exp\left(\|k\| \sum_{j=1}^{n-m} \widetilde{\lambda}_j(k)T\right) \tag{9}$$

і нехай $\varphi_{j_1}(x) \in B_{\delta_1}(\Omega^p)$, $j_1 = 1, \ldots, m$; $\varphi_{m+j_2}(x) \in B_{\delta_2}(\Omega^p)$, $j_2 = 1, ..., n-m$, *де* $\delta_i > \beta_i CT$, $i = 1, 2$.

Тоді існує розв'язок задачі (1), (2), який належить простору $C^n\big([0;T],\ B_\delta(\Omega^p)\big)$ $\big(\delta < \min\limits_{r=1,2}\{\delta_r - \beta_r T\}\big)$ *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Доведення. Для довільного $t \in [0;T]$ справедливі нерівності

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} \triangle_{j_1,q,r_q}(k) u_{k,q,r_q}(t)\right| \leqslant C_1 |k|^{h_r - j_1} \exp\Big[\|k\|\big(\mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_m(k)t + \sum_{j=m+1}^{n} \mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_j(k)T\big)\Big], \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} \triangle_{m+j_2,q,r_q}(k) u_{k,q,r_q}(t)\right| \leqslant C_2 |k|^{h_r - j_2} \exp\Big[\|k\|\big(\mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_{m+1}(k)t + \sum_{j=m+2}^{n} \mathrm{Re}\ \widetilde{\lambda}_j(k)T\big)\Big].$$

де $r = 0, 1, ..., n$, $q = 1, \ldots, \ell$; $r_q = 1, \ldots, m_q$; $j_1 = 1, \ldots, m$; $j_2 = 1, \ldots n - m$; $h_r = r + \alpha + \max\limits_{g \in G^{m,\ell}} \big\{f(g) + \max\limits_{i=1,\ldots,\ell}(m_i - g_i)\big\}$. На підставі формули (8), оцінок (9), (10) та елементарної нерівності $q^\nu \leqslant D(\nu)\exp(\varepsilon q)$, яка справедлива для довільного $\varepsilon > 0$ і для всіх $q > 0$ і $\nu \geqslant 0$, отримуємо, що

$$\begin{aligned} \big\|u(t,x)\big\|_{C^n([0;T],\ B_\delta(\Omega^p))} &\leqslant C_3 \sum_{|k|>0} \Big\{ \sum_{j_1=1}^{m} \|k\|^{\chi + h_n - j_1} \big|\varphi_{j_1,k}\big| \exp\Big(\|k\|\beta_1 CT\Big) + \\ &+ \sum_{j_2=1}^{n-m} \|k\|^{\chi + h_n - j_2} \big|\varphi_{m+j_2,k}\big| \exp\Big(\|k\|\beta_2 CT\Big) \Big\} \exp\Big(\delta\|k\|\Big) \leqslant \\ &\leqslant C_4 \Big\{ \sum_{j_1=1}^{m} \|\varphi_{j_1}(x)\|_{B_{\delta_1}(\Omega^p)} + \sum_{j_2=1}^{n-m} \|\varphi_{m+j_2}(x)\|_{B_{\delta_2}(\Omega^p)} \Big\}. \end{aligned} \tag{11}$$

де $C_4 = C_4(C_1, C_2, M, m, n, T, A_s)$. З нерівності (11) випливає доведення теореми.

3. Дослідимо можливість виконання оцінок (9). Позначимо $y = (y_1, \ldots, y_{pn})$, де $y_{jn+r} = \mathrm{Re}\ A_{n-r,\underbrace{0,\ldots,0}_{j},r,0,\ldots,0}$ $j = 0, \ldots, p-1$; $r = 1, \ldots, n$.

Лема 1. *Нехай* $B \equiv B\big(\tilde{\lambda}_1(k), \ldots, \tilde{\lambda}_n(k)\big)$ – *симетричний многочлен степеня* q *щодо кожної зі змінних* $\tilde{\lambda}_1(k), \ldots, \tilde{\lambda}_n(k)$. *Тоді для майже всіх (щодо міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^{pn}$*) векторів* y *виконуються нерівності*

$$|B| \geqslant \|k\|^{-pq-\varepsilon_1},\ k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| > K_1(y), \quad \varepsilon_1 > 0. \tag{12}$$

Доведення. При доведенні леми будемо вважати, що $y \in Y$, де Y – довільний паралелепіпед розмірності pn, оскільки простір $\mathbb{R}^{pn}$ можна представити у вигляді зліченного об'єднання pn-вимірних паралелепіпедів.

З основної теореми про симетричні многочлени [6] випливає, що

$$B = \sum_{\chi \in K} b_\chi \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{|\hat{s}|=j} A_{n-j,\hat{s}} \left(\frac{k_1}{\|k\|} \right)^{s_1} \cdots \left(\frac{k_p}{\|k\|} \right)^{s_p} \right)^{\chi_j},$$

де $\hat{s} = (s_1, ..., s_p)$, $K = \left\{ \chi = (\chi_1, ..., \chi_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j=1}^{n} j\chi_j = q \right\}$, $b_\chi \in \mathbb{C}$ не всі дорівнюють нулю. Нехай, наприклад, $\mathrm{Re}\ b_{\tilde{\chi}} \neq 0$. Зафіксуємо вектор $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.

Нехай $|k_\alpha| = \max_{j=1,\dots,p} |k_j|$. Тоді

$$\left| \frac{\partial^{|\tilde{\chi}|} \mathrm{Re}\ B}{\partial y_{(\alpha-1)n+1}^{\tilde{\chi}_1} \cdots \partial y_{\alpha n}^{\tilde{\chi}_n}} \right| = \left| \mathrm{Re}\ b_{\tilde{\chi}} \right| \left(\frac{|k_\alpha|}{\|k\|} \right)^q \geqslant \frac{\left| \mathrm{Re}\ b_{\tilde{\chi}} \right|}{p^{q/2}},$$

де $|\tilde{\chi}| = \tilde{\chi}_1 + \cdots + \tilde{\chi}_n \leqslant q$. Нехай $Y = Y_n \times Y_{n(p-1)}$, де $Y_n \ni (y_{(\alpha-1)n+1}, ..., y_{\alpha n})$. Використовуючи лему 2.3 з [2, гл.1] і нерівність $|\mathrm{Re}\ B| \leqslant |B|$, знайдемо, що міра множини $M_1(k)$ тих векторів $(y_{(\alpha-1)n+1}, \dots, y_{\alpha n})$ з Y_n (при фіксованих решта компонентах вектора Y), для яких справджується нерівність

$$|B| < \|k\|^{-pq-\varepsilon_1}, \tag{13}$$

має оцінку

$$\mathrm{mes}\ M_1(k) \leqslant d_1 \|k\|^{-(pq+\varepsilon_1)/|\tilde{\chi}|}. \tag{14}$$

Інтегруючи оцінку (14) по паралелепіпеду $Y_{n(p-1)}$ отримуємо, що міра множини $M_2(k)$ векторів $y \in Y$, для яких виконується (13), має оцінку, аналогічну до (14), тільки з іншою сталою, тобто $\mathrm{mes}\ M_2(k) \leqslant d_2 \|k\|^{-(pq+\varepsilon_1)/|\tilde{\chi}|}$. Оскільки ряд $\sum_{|k|>0} \|k\|^{-(pq+\varepsilon_1)/|\tilde{\chi}|}$ збігається, то, застосовуючи лему Бореля-Кантеллі (див. [7], розд. 1, § 1) маємо, що для майже всіх векторів $y \in Y$ виконуються нерівності (12). Лему 1 доведено.

У багатьох випадках оцінку (12) можна покращити, коли відомо явне зображення симетричного многочлена B через коефіцієнти рівняння (6). Підтвердженням сказаного є таке твердження.

Лема 2. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^p$*) векторів* y *виконуються нерівності*

$$\prod_{1 \leqslant j < r \leqslant n} \left| \tilde{\lambda}_j(k) - \tilde{\lambda}_r(k) \right| \geqslant \|k\|^{-\frac{p(n-1)}{2} - \varepsilon_2},\ k \in \mathbb{Z}^p,\ |k| > K_2(y),\ \varepsilon_2 > 0.$$

Доведення базується на ідеї доведення теореми 6 в [8].

Теорема 4. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^{pn}$*) векторів* y *і для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівності (9) виконуються при* $\chi > p(\omega+\sigma-1)$, *де* $\sigma = C_n^m$, $\omega = \dfrac{n-1}{2} + v$, $v = \sum\limits_{\ell=2}^{\tilde{m}} C_{n-1}^{\ell-1} C_{n-\ell}^{\ell}$, $\tilde{m} = \min\{m,\, n-m\}$.

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що $0 \leqslant t_1 \leqslant T \leqslant t_2 < \infty$, а y належить деякому паралелепіпеду Y розмірності pn. З леми 2 випливає, що для майже всіх векторів $y \in Y$ і для довільного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ всі корені рівняння (6) є різні, тобто $\ell = n$. У такому випадку визначник $\triangle_1(k)$ зображається у вигляді

$$\triangle_1(k) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} (-1)^{\theta_{r_\nu}} V_{r_{\nu,1},\dots,r_{\nu,n-m}}(k) V_{r_{\nu,n-m+1},\dots,r_{\nu,n}}(k) \exp\Big[\|k\|\big(\lambda(k), g^{(\nu)}\big)T\Big],$$

де

$$\theta_{r_\nu} = n(n-m) + \frac{m(m-1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-m} r_{\nu,j},$$

$g^{(\nu)} \in G^{m,n}$, $r_\nu = (r_{\nu,1}, \dots, r_{\nu,n})$ – така перестановка чисел $(1, \dots, n)$, що $g^{(\nu)}_{r_{\nu,1}} = \dots = g^{(\nu)}_{r_{\nu,n-m}} = 1$, $g^{(\nu)}_{r_{\nu,n-m+1}} = \dots = g^{(\nu)}_{r_{\nu,n}} = 0$, $\nu = 1, \dots, \sigma$, $V_{j_1,\dots,j_s}(k) = \prod\limits_{1 \leqslant \xi < \eta \leqslant s} \big(\lambda_{j_\xi}(k) - \lambda_{j_\eta}(k)\big)$.
Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що

$$\Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k), g^{(\nu)}\Big) \leqslant \Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k), g^{(\nu+1)}\Big),\ \nu = 1, 2, ..., \sigma - 1, \tag{15}$$

звідки, зокрема, $g^{(1)} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}, 0, \dots, 0)$.

Розглянемо функції

$$\begin{gathered} F_1\big(\lambda(k), T\big) = \exp\Big[-\|k\|\big(\lambda(k), g^{(1)}\big)T\Big] \triangle_1(k), \\ F_\nu\big(\lambda(k), T\big) = \frac{1}{\|k\|} \exp\Big[\|k\|\big(\lambda(k), g^{(\nu-1)} - g^{(\nu)}\big)T\Big] \frac{dF_{\nu-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \end{gathered} \tag{16}$$

$(\nu = 2, \dots, \sigma)$. Зауважимо, що для $F_\sigma(\lambda(k), T)$ справедлива оцінка

$$\Big|F_\sigma\big(\lambda(k), T\big)\Big| \geqslant \alpha_1 |V_{1,\dots,n}(k)| \Phi\big(\lambda(k)\big)|, \tag{17}$$

де $\Phi^2\big(\lambda(k)\big)$ – симетричний многочлен степеня $2\sum\limits_{\ell=2}^{\tilde{m}} C_{n-1}^{\ell-1} C_{n-\ell}^{\ell}$. З нерівності (17) та лем 1, 2 випливає, що для майже всіх векторів $y \in Y$

$$\Big|F_\sigma\big(\lambda(k), T\big)\Big| \geqslant a_1 \|k\|^{-p\omega-\delta_1},\ a_1 > 0,\ \ \delta_1 > 0 \tag{18}$$

для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. З формул (16) та нерівностей (15), (17) отримуємо, що для майже всіх векторів $y \in Y$ і для довільного $T \in [t_1; t_2]$ при досить великих $|k|$ виконується нерівність

$$\left| \frac{dF_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \right| \geqslant a_1 \|k\|^{-p\omega+1-\delta_1}. \tag{19}$$

Для довільних фіксованих $y \in Y$ і $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що справедлива оцінка (19), відрізок $[t_1; t_2]$ розбивається на підмножини (які, можливо, перетинаються) $G_1(k)$ та $H_1(k)$ такі, що

$$\forall T \in G_1(k) \ \left| \mathrm{Re}\ \frac{dF_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \right| \geqslant \frac{a_1}{\sqrt{2}} \|k\|^{-p\omega+1-\delta_1}, \tag{20}$$

$$\forall T \in H_1(k) \ \left| \mathrm{Im} \frac{dF_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)}{dT} \right| \geqslant \frac{a_1}{\sqrt{2}} \|k\|^{-p\omega+1-\delta_1}. \tag{21}$$

Покажемо, що для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \big\{(0)\big\}$ множина $G_1(k)$ (як і $H_1(k)$) складається з інтервалів, число яких не перевищує $d_{1,\sigma-1}\|k\|$, де стала $d_{1,\sigma-1}$ не залежить від k. На підставі теореми Ролля на кожному з інтервалів (крім, можливо, двох крайніх), де виконується (20), функція $\mathrm{Re}\frac{d^2F_{\sigma-1}(\lambda(k),T)}{dT^2} = y_{\sigma-1}(\|k\|T) \equiv y_{\sigma-1}(z)$ має хоча б один нуль. Зауважимо, що $y_{\sigma-1}(z)$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + 2\Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k), g^{(\sigma)} - g^{(\sigma-1)}\Big) \frac{d}{dz} + \Big| \Big(\lambda(k), g^{(\sigma)} - g^{(\sigma-1)}\Big) \Big|^2 \right) y = 0. \tag{22}$$

Згідно з теоремою Валле-Пуссена (див. [9], розд. 4) існує стала $h_{\sigma-1} > 0$ така, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння (22) має на інтервалі довжиною $h_{\sigma-1}$ не більше одного нуля. Отже, на відрізку $\Big[\|k\|t_1; \|k\|t_2\Big]$ функція $y_{\sigma-1}(z)$ може мати не більше, ніж $\Big[(t_2 - t_1)\|k\|/h_{\sigma-1}\Big] + 1$ нулів, де $[a]$ – ціла частина a.

Застосовуючи на кожному з інтервалів множини $G_1(k)$ лему 2 з [8] маємо, що міра множини значень T, для яких

$$|\mathrm{Re}F_{\sigma-1}(\lambda(k), T)| < \|k\|^{-p(\omega+1)-\delta_2}, \tag{23}$$

не перевищує $d_{2,\sigma-1}\|k\|^{-p-1-\delta_2+\delta_1}$. Отже, нерівність (23) виконується для множини значень $T \in G_1(k)$, міра якої не перевищує $d_{3,\sigma-1}\|k\|^{-p-\delta_2+\delta_1}$, де $d_{3,\sigma-1} = d_{1,\sigma-1} \cdot d_{2,\sigma-1}$.

На підставі оцінки (21) аналогічно доводиться, що міра множини тих значень $T \in H_1(k)$, для яких

$$\Big|\mathrm{Im}\ F_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)\Big| < \|k\|^{-p(\omega+1)-\delta_2}, \tag{24}$$

також не перевищує величини $d_{3,\sigma-1}\|k\|^{-p-\delta_2+\delta_1}$. З нерівностей (23), (24) випливає, що міра множини $D_1(k)$ тих значень $T \in [t_1; t_2]$, для яких виконується нерівність $\Big|F_{\sigma-1}\big(\lambda(k), T\big)\Big| \geqslant \|k\|^{-p(\omega+1)-\delta_2}$, має оцінку mes $D_1(k) \geqslant t_2 - t_1 - 2d_{3,\sigma-1}\|k\|^{-p-\delta_2+\delta_1}$.

Аналогічними міркуваннями, переходячи послідовно від оцінки функції $F_j\big(\lambda(k),T\big)$ до оцінки $F_{j-1}\big(\lambda(k),T\big)$ $(j=\sigma-1,\dots,2)$, отримаєм, що нерівність

$$\big|\triangle_1(k)\big| \geqslant \|k\|^{-p(\omega+\sigma-1)-\delta_\sigma} \exp\Big(\|k\|(\mathrm{Re}\ \lambda(k),g^{(1)})T\Big) \tag{25}$$

може не виконуватись лише для множини $D_\sigma(k)=[t_1;t_2]\setminus D_{\sigma-1}(k)$ значень T такої, що

$$\mathrm{mes}\ D_\sigma(k) \leqslant 2\sum_{j=1}^{\sigma-1} d_{3,\sigma-j}\|k\|^{-p-\delta_{j+1}+\delta_j}.$$

Покладемо $\delta_j=\varepsilon/(\sigma+1-j)$, $j=1,\dots,\sigma$; $\varepsilon>0$. Тоді ряд $\sum\limits_{|k|>0} d_{3,\sigma-j}\|k\|^{-p-\delta_{j+1}+\delta_j}$ збігається. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі міра Лебега множини значень $T\in[t_1;t_2]$, для яких нерівність (25) не виконується для нескінченної множини значень $k\in\mathbb{Z}^p$, дорівнює нулю. Оскільки $\Big(\mathrm{Re}\ \lambda(k),g^{(1)}\Big)=\mathrm{Re}\ \lambda_1(k)+\ldots+\mathrm{Re}\ \lambda_{n-m}(k)$, то з нерівності (25) випливає твердження теореми.

З теорем 3, 4 випливає, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{pn}$) векторів y і для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з класу $C^n(D^p)$.

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев, Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференцииальных уравнений с частными производными. – Киев, Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. Пташник Б.И., Штабалюк П.И. *Краевая задача для гиперболичеиских уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным*// Диференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, N 4. – С. 669–678.
4. Бобик І.О., Пташник Б.Й. *Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами* // Укр. матем. журн. – 1994. – Т. 46, N 7. – С. 795–802.
5. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев, Наук. думка, 1984. – 283 с.
6. Завало С.Т. Курс алгебри. – Київ, Вища школа. Головне вид-во, 1985. – 503 с.
7. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. – М., Наука, 1977. – 143 с.
8. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. *Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами*// Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, N 4. – С. 637–645.
9. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М., Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.

Стаття надійшла до редколегії 21.10.95

УДК 517.95

КОРЕКТНІСТЬ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

М. М. Бокало

Bokalo M. M. Well-posedness of first boundary value problems for some quasi-linear elliptic equations in unbounded domains without conditions at infinity. The conditions are obtained when the first boundary problem for a second order quasi-linear elliptic equations at unbounded domains has a unique weak solution without assumptions about its behaviour and increasing of initial data at infinity. The estimation of the weak solution is obtained and its continuous dependence is discovered in this case.

Вступ. Для лінійних і багатьох нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь єдиність розв'язків крайових задач в необмежених областях має місце в класах функцій з кваліфікованою поведінкою на нескінченності, а існування доводиться при певних припущеннях про зростання на нескінченності вихідних даних або зв'язку зростання вихідних даних з геометрією області ([1-3]). Але серед нелінійних рівнянь існують такі, для яких розв'язки відповідних крайових задач єдині без будь-яких обмежень на їх поведінку на нескінченності і існують при вихідних даних з довільним зростанням на нескінченності([4-9]). У даній праці описані нові еліптичні рівняння, для яких справедливі результати такого роду стосовно першої крайової задачі. Крім того, доведена неперервна залежність узагальненого розв'язку розглянутої задачі від правої частини рівняння. При цьому використано методику праць [5,9].

1.Формулювання задачі і основний результат. Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$. Позначимо $S = \partial\Omega$.

Розглядається задача

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, \delta u) + a_0(x, \delta u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) \quad \text{в} \quad \Omega\ , \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad S\ . \tag{2}$$

Тут і далі використано позначення $\delta u = (u, \nabla u)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35J65.

Ця робота частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження". Грант N APU 061007

Припустимо, що:

(A) функції $a_i(x,\xi), i=\overline{1,n}$, визначені для $x\in\Omega$, $\xi=(\xi_0,\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ і каратеодорівські, тобто вимірні за x для всіх ξ і неперервні по ξ для майже всіх x;

(B) для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{n+1}$

$|a_i(x,\xi)-a_i(x,\eta)|\leqslant A_i\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j-\eta_j|,\quad A_i=\mathrm{const}>0,\ a_i(x,0)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ i=\overline{1,n};$

(C) для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}$

$|a_0(x,\xi)|\leqslant b_1(x)\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^{2(p-1)/p}+b_2(x)|\xi_0|^{p-1}+b_3(x),$

де $b_1,b_2\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $b_3\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\quad p>2,\ 1/p+1/p'=1;$

(D) для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{n+1}$

$\sum\limits_{i=0}^{n}(a_i(x,\xi)-a_i(x,\eta))(\xi_i-\eta_i)\geqslant K_1\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2+K_2|\xi_0-\eta_0|^2+K_3|\xi_0-\eta_0|^p,$

де $K_1,K_3=\mathrm{const}>0$, а $K_2=\mathrm{const}\geqslant 0$, якщо $p\in(2;2n/(n-1))$,
і $K_2=\mathrm{const}>0$, якщо $p\in[2n/(n-1);+\infty)$.

(E) $f_0(x)\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\quad f_i(x)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\quad i=\overline{1,n}.$

Під $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $q\geqslant 1$ розуміємо простір визначених і вимірних на Ω функцій, звуження яких на довільну обмежену вимірну множину $\Omega'\subset\Omega$ належать простору $L^q(\Omega')$. Через $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначимо простір функцій $v(x)$ з $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, що мають узагальнені похідні $v_{x_1},...,v_{x_n}$ з $L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, а через $\overset{o}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначимо підпростір функцій з простору $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, які мають рівний нулеві слід на S.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) назвемо функцію $u(x)\in\overset{o}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\cap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i(x,\delta u)\psi_{x_i}+a_0(x,\delta u)\psi\right\}dx=\iint\limits_{\Omega}\left\{f_0\psi-\sum_{i=1}^{n}f_i\,\psi_{x_i}\right\}dx \tag{3}$$

для довільних $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Зауваження 1. *У тотожності (3) можна взяти за пробну функцію ψ будь-яку функцію $\tilde{\psi}(x)\in H^1(\Omega)\bigcap L^p(\Omega)$ таку, що $\tilde{\psi}=0$ на $\partial\Omega$ і поза деякою (залежною від ψ) обмеженою областю.*

Щоб переконатися в цьому, досить вибрати послідовність $\{\psi_m(x)\}\subset C_0^\infty(\Omega)$, яка збігається до $\tilde{\psi}(x)$ в $H^1(\Omega)\bigcap L^p(\Omega)$, підставити ψ_m замість ψ в (3) і перейти до границі, коли $m\to\infty$. Граничний перехід гарантується умовами (A)–(E).

Означення 2. *Говоритимемо, що задача (1),(2) коректна, янщо її узагальнений розв'язок 1) існує для будь-яких $f_0(x)\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), f_i(x)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\quad i=\overline{1,n};$ 2) єдиний ; 3) неперервно залежить від правої частини рівняння (1), тобто, якщо для будь-яких послідовностей $\{f_{0,k}(x)\}\subset L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\{f_{i,k}(x)\}\subset L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ таких, що $f_{0,k}(x)\to f_0(x)$ в $L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$,*

$f_{i,k}(x) \to f_i(x)$ в $L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, відповідна послідовність $\{u_k(x)\}$ узагальнених розв'язків задач, які відрізняються від задачі (1),(2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) записано $f_{0,k}$, $f_{i,k}$ замість f_0, f_i ,збігається в $\overset{o}{H}{}^1_{\rm loc}(\overline{\Omega}) \cap L^p_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ до узагальненого розв'язку u задачі (1),(2).

Нагадаємо,що $f_k(x) \to f(x)$ в $L^q_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ ($\overset{o}{H}{}^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$) при $k \to +\infty$, якщо для довільної обмеженої області $\Omega' \subset \Omega$ $f_k(x) \to f(x)$ в нормі $L^q(\Omega')$ $(\overset{o}{H}{}^1(\Omega'))$.

Перейдемо до формулювання основного результату. Спочатку введемо деякі позначення. Будемо вважати, що точка $x = 0$ належить Ω. Нехай для довільного числа $R > 0$ Ω_R – зв'язна компонента множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, яка містить точку $x = 0$. Тоді, очевидно, $\Omega_R \subset \Omega_{R_1}$ для будь-яких $R < R_1$.

Теорема. *Нехай виконуються умови $(A)-(E)$. Тоді задача (1),(2) коректна. Крім того, для довільних чисел R_1, R_2 таких, що $1 \leqslant R_1 < R_2$, справедлива оцінка*

$$\int\limits_{\Omega_{R_1}} \{|\nabla u|^2 + |u|^p\}\, dx \leqslant \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)^{\kappa} \left(C_1 R_2^{-\gamma} + C_2 \iint\limits_{\Omega_{R_2}} \{|f_0|^{p'} + \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\}\, dx \right), \qquad (4)$$

де κ, γ – додатні сталі, які залежать тільки від n, p, K_2; C_1, C_2 – додатні сталі, які залежать тільки від $n, p, K_i (i = 1,2,3), A_i (i = \overline{1,n})$.

2. Допоміжна лема. Перш ніж доводити теорему, покажемо справедливість такого твердження .

Лема. *Нехай $u(x)$ – узагальнений розв'язок задачі (1),(2), $\tilde{u}(x)$ – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (1),(2) тільки тим, що в правій частині рівняння (1) замість f_0, f_i стоять $\tilde{f}_0, \tilde{f}_i$. Тоді для довільних чисел R_0, R таких, що $1 \leqslant R_0 < R$, справедлива оцінка*

$$\int\limits_{\Omega_R} \{|\nabla(u - \tilde{u})|^2 + |u - \tilde{u}|^p\}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^{s} \left(B_1 R^{n - \frac{q}{q-2}} + B_2 \int\limits_{\Omega_R} \left\{ |f_0 - \tilde{f}_0|^{p'} + \sum_{i=1}^{n} |f_i - \tilde{f}_i|^2 \right\} dx \right), \qquad (5)$$

де $q = p$, якщо $K_2 = 0$, і $q \in (2; p]$, якщо $K_2 > 0$; s – довільне число таке, що $s > 2q/(q-2)$; B_1, B_2 – додатні сталі, які залежать тільки від $n, p, s, K_i (i = 1,2,3), A_i (i = \overline{1,n})$.

Доведення. Нехай $R > 1$ – довільне число. Визначимо функцію $\zeta(x)$ за правилом: $\zeta(x) = \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2)$, коли $|x| \leqslant R$, і $\zeta(x) = 0$, коли $|x| > R$.

Віднімемо від інтегральної тотожності (3) для u аналогічну інтегральну тотожність для $\tilde{u}$ і візьмемо (див. зауваження 1) в отриманій тотожності $\psi = w\zeta^s$, де $w = u - \tilde{u}$, $s > 0$ – поки що довільне достатньо велике додатне число. Тоді отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))w_{x_i}\zeta^s+s\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))w\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}+$$

$$+(a_0(x,\delta u)-a_0(x,\delta\tilde{u}))w\zeta^s\Big\}\,dx=\int\limits_{\Omega_R}\Big\{(f_0-\tilde{f}_0)w\zeta^s-\sum_{i=1}^{n}(f_i-\tilde{f}_i)(w\zeta^s)_{x_i}\Big\}\,dx. \qquad (6)$$

Перепишемо (6) у вигляді

$$\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))(u_{x_i}-\tilde{u}_{x_i})+(a_0(x,\delta u)-a_0(x,\delta\tilde{u}))(u-\tilde{u})\Big\}\zeta^s\,dx= \qquad (7)$$

$$-s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\delta u)-a_i(x,\delta\tilde{u}))w\zeta^{s-1}\zeta_{x_i}\,dx+\int\limits_{\Omega_R}\Big\{(f_0-\tilde{f}_0)w\zeta^s-\sum_{i=1}^{n}(f_i-\tilde{f}_i)(w\zeta^s)_{x_i}\Big\}\,dx.$$

Використовуючи умови (A)–(D) та оцінку $|\zeta'|\leqslant 2$, з (7) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\{K_1|\nabla w|^2+K_2|w|^2+K_3|w|^p\}\zeta^s\,dx\leqslant 2s\int\limits_{\Omega_R}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)(|\nabla w|+|w|)|w|\zeta^{s-1}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_R}\{|f_0-\tilde{f}_0|\,|w|\zeta^s+2s\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||w|\zeta^{s-1}+\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||\nabla w|\zeta^s\}\,dx. \qquad (8)$$

Тепер зауважимо, що

$$K_2|w|^2+2^{-1}K_3|w|^p\geqslant K_4|w|^q, \qquad (9)$$

де $q=p$ і $K_4=K_3/2>0$, якщо $K_2=0$, та q – довільне число з відрізка $[2;p]$ і $K_4=\min\{K_2,K_3/2\}>0$, якщо $K_2>0$. З (8) і (9) маємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\{K_1|\nabla w|^2++\frac{1}{2}K_3|w|^p+K_4|w|^q\}\zeta^s\,dx\leqslant 2sA\int\limits_{\Omega_R}w^2\zeta^{s-1}\,dx+2sA\int\limits_{\Omega_R}|\nabla w||w|\zeta^{s-1}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_R}\{|f_0-\tilde{f}_0|\,|w|\zeta^s+2s\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||w|\zeta^{s-1}+\sum_{i=1}^{n}|f_i-\tilde{f}_i||\nabla w|\zeta^s\}\,dx, \qquad (10)$$

де $A=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

Оцінимо члени правої частини (10). Для цього використаємо нерівність Юнга $ab\leqslant\varepsilon a^p+M(\varepsilon,p)b^{p'}$, де $\varepsilon>0$ – довільне число, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$, $M(\varepsilon,p)$ – стала, яка залежить від ε і p.

Взявши в нерівності Юнга $a = w^2\zeta^{2s/q}$, $b = \zeta^{s(q-2)/q-1}$, матимемо оцінку першого члена нерівності (10)

$$\int\limits_{\Omega_R} w^2\zeta^{s-1}\,dx \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{\Omega_R} |w|^q\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_1, q)\int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{q}{q-2}}\,dx, \tag{12}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ – довільне число.

Аналогічно оцінимо решту членів правої частини (10)

$$\int\limits_{\Omega_R} |\nabla w||w|\zeta^{s-1}\,dx \leqslant \varepsilon_2 \int\limits_{\Omega_R} |\nabla w|^2\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_2, 2)\int\limits_{\Omega_R} |w|^2\zeta^{s-2}\,dx, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} (f_0 - \tilde{f}_0)w\zeta^s\,dx \leqslant \varepsilon_3 \int\limits_{\Omega_R} |w|^p\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_3, p)\int\limits_{\Omega_R} |f_0 - \tilde{f}_0|^{p'}\zeta^s\,dx, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i||w|\zeta^{s-1}\,dx \leqslant \varepsilon_4 \int\limits_{\Omega_R} |w|^2\zeta^{s-2}\,dx + M(\varepsilon_4, 2)\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i|^2\zeta^s\,dx, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i||\nabla w|\zeta^s\,dx \leqslant \varepsilon_5 \int\limits_{\Omega_R} |\nabla w|^2\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_5, 2)\int\limits_{\Omega_R} |f_i - \tilde{f}_i|^2\zeta^s\,dx, \tag{16}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} |w|^2\zeta^{s-2}\,dx \leqslant \varepsilon_6 \int\limits_{\Omega_R} |w|^q\zeta^s\,dx + M(\varepsilon_6, q)\int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{2q}{q-2}}\,dx, \tag{17}$$

де $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0$ – довільні числа.

Вибираючи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ досить малими, з (10), (12)-(17) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \{|\nabla w|^2 + |w|^p\}\zeta^s\,dx \leqslant C_3\int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{2q}{q-2}}\,dx + C_4\int\limits_{\Omega_R} \zeta^{s-\frac{q}{q-2}}\,dx +$$

$$+C_5\int\limits_{\Omega_R} \{|f_0 - \tilde{f}_0|^{p'} + \sum_{i=1}^n |f_i - \tilde{f}_i|^2\}\zeta^s\,dx. \tag{18}$$

Нехай R_0 – довільне число з проміжку $[1, R)$. Враховуючи те, що $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, $R - R_0 \leqslant \zeta(x)$, коли $|x| \leqslant R_0$, і вибираючи $s > \frac{2q}{q-2}$, з (18) легко отримуємо (5).

3.Доведення основного результату.

Існування. Виберемо послідовність областей $\{\Omega^m\}$ таку, що $\Omega_m \subset \Omega^m$, $\mathrm{dist}(\partial\Omega^m \setminus \partial\Omega, \partial\Omega^{m+1} \setminus \partial\Omega) > 0$, $\partial\Omega^m$ – кусково-гладка поверхня. Очевидно, що $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \Omega^m = \Omega$, $\mathrm{dist}(O, \partial\Omega^m \setminus \partial\Omega) > m$, де O – початок координат. Позначимо $S^m = \partial\Omega^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо сім'ю крайових задач

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}a_i(x, \delta u_m) + a_0(x, \delta u_m) = f_0(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x) \quad \text{в} \quad \Omega^m, \tag{1_m}$$

$$u_m = 0 \quad \text{на} \quad S^m. \tag{2_m}$$

Означення 3. *Узагальненим розв'язком задачі* $(1_m), (2_m)$ *назвемо функцію* $u_m(x) \in \overset{o}{H}{}^1(\Omega^m) \cap L^p(\Omega^m)$, *яка задовольняє інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{\Omega^m} \{a_i(x, \delta u_m)\psi_{x_i} + a_0(x, \delta u_m)\psi\} \, dx = \iint\limits_{\Omega^m} \{f_0\psi - \sum_{i=1}^{n} f_i\psi_{x_i}\} \, dx \tag{3_m}$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(\Omega^m)$ *таких, що* $\psi = 0$ *на* $\partial\Omega^m$.

З [11] випливає, що існує єдиний узагальнений розв'язок u_m задачі $(1_m), (2_m)$. Довизначимо u_m нулем на $\Omega \setminus \Omega_m$ і отриману функцію позначимо знову через u_m. Послідовність $\{u_m\}$ є фундаментальною в нормі $H^1(\Omega_k) \bigcap L^p(\Omega_k)$, де k – будь-яке фіксоване натуральне число. Покажемо це.

Нехай m, l, ν, k – довільні натуральні числа такі, що $m, l > \nu > 2k$. Оскільки $\Omega^m \supset \Omega_\nu, \Omega^l \supset \Omega_\nu$, $\partial\Omega^m \bigcap \partial\Omega \supset \partial\Omega_\nu \bigcap \partial\Omega, \partial\Omega^l \bigcap \partial\Omega \supset \partial\Omega_\nu \bigcap \partial\Omega$, то справедлива нерівність (5) з $u = u_m, \tilde{u} = u_l, R_0 = k, R = \nu, \tilde{f}_i = f_i, i = \overline{0,n}$ (щоб показати це, досить повторити доведення леми). Звідси

$$\iint\limits_{\Omega_k} (|\nabla(u_m - u_l)|^2 + |u_m - u_l|^p) \, dx \leqslant B_1^* \ \nu^{n-q/(q-2)}, \tag{19}$$

де $B_1^* = \mathrm{const} > 0$, яка не залежить від ν.

Виберемо $q \in (2; 2n/(n-1))$. Тоді $n - q/(q-2) < 0$ і праву частину (19) можна зробити як завгодно малою за рахунок вибору досить великого значення ν. Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\nu \in \mathbb{N}$ ($\nu > 2k$) таке, що коли $m, l > \nu$, то ліва частина (19) менша за ε, тобто послідовність $\{u_m\}$ – фундаментальна в нормі $H^1(\Omega_k) \cap L^p(\Omega_k)$, де k – довільне натуральне число. Отже, існує функція $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ така, що

$$u_m \to u \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{в} \quad H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \tag{20}$$

Звідси і з умови (B) маємо, що

$$a_i(x, \delta u_m) \to a_i(x, \delta u) \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i = \overline{1, N}. \tag{21}$$

З (20) та умов (A) і (C) випливає існування підпослідовності $\{u_{m_\mu}\}$ послідовності $\{u_m\}$ такої, що

$$u_{m_\mu}(x) \to u(x), \quad \nabla u_{m_\mu}(x) \to \nabla u(x), \tag{22}$$

$$a_0(x, \delta u_{m_\mu}(x)) \to a_0(x, \delta u(x)) \tag{23}$$

при $\mu \to \infty$ майже всюди в Ω,

$$a_0(x, \delta u_{m_\mu}(x)) \to \chi^*(x) \quad \text{при } \mu \to \infty \text{ слабо в } L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \tag{24}$$

З (23),(24) та леми [10,ст.25] отримаємо

$$a_0(x, \delta u_{m_\mu}) \to a_0(x, \delta u) \quad \text{при } \mu \to \infty \text{ слабо в } L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \tag{25}$$

Тепер покажемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (1),(2).Нехай $\psi(x)$ – довільна функція з $C_0^\infty(\Omega)$. Тоді для будь-яких $\mu \in \mathbb{N}$ таких, що supp$\psi \subset \Omega^{m_\mu}$, маємо (див.$(3_m)$)

$$\int\limits_\Omega \{a_i(x,\delta u_{m_\mu})\psi_{x_i} + a_0(x,\delta u_{m_\mu})\psi\}\,dx = \iint\limits_\Omega f\psi\,dx.$$

Перейдемо в цій рівності до границі, спрямувавши μ до ∞. Врахувавши (20),(21), (25), отримаємо (3). Існування узагальненого розв'язку задачі (1),(2) встановлено.

Оцінка розв'язку випливає з (5), врахувавши, що, коли $\tilde f_i = a_i(x,0), i = \overline{0,n}$, то $\tilde u = 0$ є розв'язком відповідної задачі.

Єдиність. Нехай $u_1(x), u_2(x)$ – два розв'язки задачі (1),(2). З леми, поклавши $R = 2R_0$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} (|\nabla w|^2 + |w|^p)\,dx \leqslant B_3 R_0^{n-q/(q-2)}, \tag{26}$$

де $w = u_1 - u_2$, а B_3 – додатна стала, яка не залежить від R_0. Виберемо $q \in (2; \frac{2n}{n-1})$, що можна зробити згідно з умовою (D) і твердженням леми. Тоді $n - q/(q-2) < 0$. Враховуючи це, перейдемо в (26) до границі, спрямувавши R_0 до $+\infty$. Тоді отримаємо $w = 0$ майже всюди на Ω, що й треба було показати.

Неперервна залежність. Нехай $\{f_{0,k}\} \subset L^{p'}_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, $\{f_{i,k}\}, \subset L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega}), i = \overline{1,n}$, – такі послідовності, що $f_{0,k} \to f_0$ в $L^{p'}_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, $f_{i,k} \to f_i$ в $L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, а $\{u_k\}$ – послідовність узагальнених розв'язків відповідних задач. Покажемо, що тоді $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в $H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega}) \bigcap L^p_{\rm loc}(\overline{\Omega})$.

Справді, нехай $\varepsilon > 0$ – будь-яке число, а Ω' – довільна обмежена підобласть області Ω. Тоді існують таке число $R_0 \geqslant 1$, що $\Omega' \subset \Omega_{R_0}$. Візьмемо $R > 2R_0$. З леми маємо

$$\int\limits_{\Omega'} (|\nabla(u-u_k)|^2 + |u-u_k|^p)\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega_{R_0}} (|\nabla(u-u_k)|^2 + |u-u_k|^p)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \left(B_1\ R^{n-q/(q-2)} + B_2 \iint\limits_{\Omega_R} \{|f_0 - f_{0,k}|^{p'} + \sum_{i=1}^n |f_i - f_{i,k}|^2\}\,dx\right). \tag{27}$$

Виберемо $q \in (2; 2n/(n-1))$. Тоді $n - q/(q-2) < 0$. Звідси випливає, що існує таке R, для якого

$$2^s\ B_1 \cdot R^{n-q/(q-2)} < \varepsilon/2. \tag{28}$$

Зафіксуємо це значення R. З того, що $f_{0,k} \to f_0$ в $L^{p'}_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, $f_{i,k} \to f_i$ в $L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega}), i = \overline{1,n}$, маємо існування такого $k_0 \in \mathbb{N}$, що

$$2^s\ B_2 \iint\limits_{\Omega_R} \{|f_0 - f_{0,k}|^{p'} + \sum_{i=1}^n |f_i - f_{i,k}|^2\}\,dx < \varepsilon/2 \quad \forall k \geqslant k_0. \tag{29}$$

Очевидно,

$$\frac{R}{R-R_0}=\frac{R-R_0+R_0}{R-R_0}=1+\frac{R_0}{R-R_0}\leqslant 2. \tag{30}$$

На підставі (28)-(30) отримаємо, що права частина (27) менша за ε для всіх $k \geqslant k_0$, тобто те, що потрібно було показати. Теорему доведено.

1. Тихонов А.Н. *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Матем. сб. – 1935. – N 2. – С. 199-216.
2. Oleinik O.A. Some asymptotic problems of the theory of partial differential equations. Lezioni Lincei.Accad.naz.Lincei. Cambridge University Press, 1995.
3. Калашников А.С. *О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9, N 4. – С. 682-691.
4. Brezis H. *Semilinear equations in R^N without condition at infinity* // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12. – P. 271-282.
5. Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity* // Arch. Ration Mech. and Anal. – 1989. – Vol. 106, N 3. – P. 217-241.
6. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. М., Изд-во Моск. ун-та. – 1989. – Вып. 14. – С. 3-44.
7. Diaz J.I.,Oleinik O.A. *Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of their solutions*// C.R.Acad.Sci.Paris. Ser.1. – 1992. – Vol. 315. – P. 787-792.
8. Гладков А.Л. *Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением* // Сиб.мат. журн. – 1993. – Т.34, N 1. – С. 47-64.
9. Бокало М.М. *Коректність задачі Фур'є для деяких квазілінійних параболічних рівнянь у необмежених по просторових змінних областях без умов на нескінченності* // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.– Чернівці, Рута. – 1995. – С. 31-41.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., Мир, 1972.
11. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., Наука, 1964.

Стаття надійшла до редколегії 15.10.96

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Н. М. Задорожна

Zadorohna N. M. Nonlocal boundary value problem for systems of parabolic equaions of arbitrary order. The problem with nonlocal time conditions and periodic conditions in space variables for the system of Shilov's parabolic equations of arbitrary order with constant coefficients is studied. Conditions of existence and uniqueness of a solution of the problem are established. The metric theorems on lower bounds of small denominators which appear in the construction of a solution in the form of series of orthogonal functions, are proved.

Коректність нелокальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчали багато авторів (див., наприклад, [1-5]). Так у працях [2,5] за допомогою перетворення Фур'є для систем параболічних рівнянь 1-го порядку досліджено нелокальні за часовою координатою крайові задачі у шарі.

У даній праці встановлено умови коректності задачі з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовими змінними для систем параболічних за Г.Є.Шиловим рівнянь довільного порядку зі сталими коефіцієнтами. Аналогічні задачі для систем гіперболічних та безтипних рівнянь вивчалися в працях [1,3].

Такі задачі є умовно-коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемами малих знаменників, для аналізу яких застосовується метричний підхід.

1. Будемо використовувати такі позначення:

$$x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p; \quad k = (k_1, ..., k_p) \in \mathbb{Z}^p; \quad |k| = |k_1| + \cdots + |k_p|;$$

$(k, x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$; $(k, k) = \|k\|^2$; $\Omega - p$-вимірний тор $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \leqslant x_r \leqslant 2\pi, \quad r = \overline{1,p}\}$; $D = [0, T] \times \Omega$; $A_s^\beta(s > 0, \beta > 0)$ – простір 2π-періодичних функцій

$$\phi(x) = \sum_{|k| \geqslant 0} \phi_k exp(ik, x) \quad \text{зі скінченною нормою} \quad \|\phi\|_{s,\beta} = \sum_{|k| \geqslant 0} |\phi_k \mid \exp(s \mid k \mid^\beta);$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K50.

Робота профінансована Фондом підтримки фундаментальних досліджень Західного наукового центру НАН України

$\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)$ – банахів простір вектор-функцій $u(t,x)$ $(u(t,x) = (u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$ з нормою

$$\|u\|_{\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|s|\leqslant q,\, s_0\leqslant n_j} \max_{(t,x)\in D} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} \right|, \quad \bar{n} = (n_1,\ldots,n_m).$$

Легко показати, що $A_s^\beta \subset G_{1/\beta}$, де $G_{1/\beta}-$ клас Жевре $2\pi-$ періодичних функцій порядку $1/\beta$ типу Берлінга [6].

2. В області D розглянемо задачу

$$L_j\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_j} u_j + \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u_r = 0, \tag{1}$$

$$M_{jl}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u_j \equiv \sum_{|s|\leqslant q,\, s_0\leqslant n_j-1} b_{j\hat{s}}^{l}\frac{\partial^s}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\left(\left.\frac{\partial^{s_0}u_j}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=0} - \mu\left.\frac{\partial^{s_0}u_j}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=T}\right) = f_{jl}(x), \tag{2}$$

де $l=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,m}$; $P_{jr}(\lambda,\xi_1,\ldots,\xi_p)$ – поліном з дійсними коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1,\ldots,\xi_p$ не перевищує числа q, а за змінною λ – не перевищує $(n_j-1)(q\geqslant \max n_j)$; $b_{j\hat{s}}^l\in\mathbb{C}$; $\mu\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$; $n_1+\cdots+n_m=n$.

Припустимо, що система (1) параболічна за Г.Є. Шиловим, тобто корені $\lambda_i(\eta)$, $i=\overline{1,n}$ рівняння

$$\det P(\lambda(\eta)) \equiv \det\|P_{jr}(\lambda,i\eta_1,\ldots,i\eta_p)+\lambda^{n_j}\delta_{jr}\|_{j,r=\overline{1,m}} = 0 \tag{3}$$

для довільного дійсного вектора η задовольняють нерівність

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Re}\lambda_i(\eta) \leqslant -c_1|\eta|^h + c_2; \quad c_1>0, \quad c_2>0, \quad h>0. \tag{4}$$

Розв'язок задачі (1),(2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_k(t)\exp(ik,x), \tag{5}$$

де $u(t,x) = \mathrm{colon}(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$, а вектор-функція $u_k(t)=\mathrm{colon}(u_{k1}(t),\ldots,u_{km}(t))$ є розв'язком відповідної задачі

$$L_j\left(\frac{d}{dt},ik\right)u_k(t) = 0, \quad j=\overline{1,m}, \tag{6}$$

$$M_{j,l}\left(\frac{d}{dt},ik\right)u_{kj}(t) = f_{k,j,l}, \quad l=\overline{1,n_j}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{7}$$

а $f_{k,j,l}$, $\;k\in\mathbb{Z}^p-$ коефіцієнти Фур'є функції $f_{j,l}(x)$.

Припустимо, що при $\eta=k\in\mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j(k)\equiv\lambda_j$, $\;j=\overline{1,n}$, рівняння (3) попарно різні і відмінні від нуля. Тоді система (6) має таку фундаментальну матрицю розв'язків:

$$Y = \|Y_{r\nu}\|_{r=\overline{1,m},\,\nu=\overline{1,n}}, \quad Y_{r\nu} = \gamma_r(\lambda_\nu)\exp(\lambda_\nu t), \tag{8}$$

де $\gamma_r(\lambda_\nu)$, $\quad r=\overline{1,m}$ визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{m}(P_{jr}(\lambda_\nu,ik)+\lambda_\nu^{n_j}\delta_{jr})\gamma_r(\lambda_\nu)=0,\quad j=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Визначником системи (9) є $\det P(\lambda_\nu(k))$. Оскільки всі корені $\lambda_\nu(k)$, $\nu=\overline{1,n}$, є простими, то $\mathrm{rang}P(\lambda_\nu(k))=m-1$, $\nu=\overline{1,n}$, тобто один з мінорів $(m-1)$-го порядку визначника $\det P(\lambda_\nu(k))$ відмінний від нуля. Не обмежуючи загальності припустимо, що $\det\|P_{jr}(\lambda_\nu,ik)+\lambda_\nu^{n_j}\delta_{jr}\|_{j,r=\overline{1,m-1}}\equiv D_m(\lambda_\nu)\neq 0$. Тоді

$$\gamma_m(\lambda_\nu)=D_m(\lambda_\nu)\equiv\sum_{l=0}^{n-n_m}B_{ml}(k)\lambda_\nu^{n-n_m-l}, \tag{10}$$

$$\gamma_r(\lambda_\nu)=D_r(\lambda_\nu)\equiv\sum_{l=0}^{n-n_r-1}B_{rl}(k)\lambda_\nu^{n-n_r-l-1},\quad r=\overline{1,m-1}, \tag{11}$$

де $D_r(\lambda_\nu)-$ визначник, який отримується з визначника $D_m(\lambda_\nu)$ шляхом заміни $r-$ стовпця на стовпець $(P_{1m}(\lambda_\nu,ik),\ldots,(P_{m-1,m}(\lambda_\nu,ik))$. Відомо [4], що однорідна крайова задача, яка відповідає задачі (6),(7), має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник $\Delta(k)$ матриці $\|M_{j,l}(Y_{j\nu})\|_{l=\overline{1,n_j};j=\overline{1,m};\nu=\overline{1,n}}$ дорівнює нулеві.

Легко бачити, що

$$\Delta(k)\equiv\prod_{s=1}^{n}(1-\mu\exp(\lambda_sT))\prod_{1\leqslant\gamma<\alpha\leqslant n}(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma)\prod_{j=1}^{m}\beta_j(k)B(k), \tag{12}$$

де $\quad \beta_j(k)\equiv\det\left\|\sum_{|s|\leqslant q}b_{j,\hat{s}}^{l}i^{|s|}k_1^{s_1}\ldots k_p^{s_p}\right\|_{l=\overline{1,n_j};s_0=\overline{0,n_j-1}},\quad j=\overline{1,m},$

$$B(k)=\begin{vmatrix}\underbrace{0\ldots0}_{n_1-1} & B_{1,n-n_1-1} & \ldots & B_{11} & B_{10} & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ B_{1,n-n_1-1} & \ldots & B_{12} & B_{11} & B_{10} & \underbrace{0\ldots0}_{n_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \underbrace{0\ldots0}_{n_m-1} & B_{m,n-n_m} & \ldots & B_{m2} & B_{m1} & B_{m0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ B_{m,n-n_m} & \ldots & B_{m2} & B_{m1} & B_{m0} & \underbrace{0\ldots0}_{n_m-1}\end{vmatrix}.$$

Зауваження 1. *Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник $B(k)$ відмінний від нуля, бо він входить співмножником у вираз вронскіана $W(k)$ фундаментальної системи розв'язків (8), який дорівнює*

$$W(k) = (-1)^{\omega} \prod_{1\leqslant\gamma<\alpha\leqslant n} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma) B(k) \exp(t \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha(k)),$$

де

$$\omega = 1/2 \left(\sum_{r=1}^{m-2} (n_{r+1} - n_{r+2})(n_{r+1} + n_{r+2} - 1) + (m-1)(n_m - 1)n_m + \sum_{r=1}^{m} n_r(n_r - 1) \right).$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення $\Delta(k)$:

$$\Delta_{h_{\delta\sigma},l}(k) = (-1)^{h_{\delta\sigma}+l} \prod_{s=1,\, s\neq l}^{n} (1 - \mu \exp(\lambda_s T)) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{m} \sum_{\chi=1}^{n_\delta} \sum_{j=1,\, j\neq\delta}^{m} \beta_j(k) \times$$
$$\times (\beta_\delta)_{\sigma,\chi} B_{h_{\delta,\chi},\nu}(k) S^l_{n-\nu} \prod_{1\leqslant\gamma<\alpha\leqslant n,\, \alpha\neq l,\, \gamma\neq l} (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma), \tag{13}$$

де $h_{\delta\sigma} = n_1 + \cdots + n_{\delta-1} + \sigma$; $B_{l,r}(k)$, $(\beta_\delta)_{l,r}$– визначники, які отримуються з визначників $B(k), \beta_\delta(k)$ шляхом викреслення l–го рядка і r–го стовпця; $S^l_{n-\nu}$– сума всіх можливих добутків елементів $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq l$, взятих у кількості $(n-\nu)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1),(2) в просторі $\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)$* ***необхідно і достатньо****, щоб рівняння*

$$1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T) = 0, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{14}$$
$$\beta_\delta(k) = 0, \qquad \delta = \overline{1,m} \tag{15}$$

не мали розв'язків в цілих числах $k_1, ..., k_p$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 4.1 [5. гл.2] і випливає з теореми про єдиність розвинення періодичної функції у ряд Фур'є.

3. Припустимо, що має місце єдиність розв'язку задачі (1).(2). Тоді для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує розв'язок задачі (6),(7), який на основі формул (8)-(13) зображується у вигляді

$$u_{kj}(t) = \sum_{l,\nu=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{m} \sum_{\chi,\sigma=1}^{n_\delta} (-1)^{n-h_{\delta,\sigma}} \exp(\lambda_l t) \gamma_j(\lambda_l) (\beta_\delta)_{\sigma,\chi} B_{h_{\delta,\chi},\nu}(k) \times$$
$$\times S^l_{n-\nu} f_{k,\delta,\sigma} \Big(\prod_{\alpha=1,\, \alpha\neq l}^{n} (\lambda_l - \lambda_\alpha) \beta_\delta(k) B(k) (1 - \mu \exp(\lambda_l T)) \Big)^{-1}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{16}$$

Компоненти розв'язку задачі (1),(2) формально зображуються рядами

$$u_j(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} u_{kj}(t) \exp(ik,x), \qquad j = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Ряд (17), де функції $u_{kj}(t)$ визначені формулами (16), взагалі кажучи, є розбіжний, бо вирази $|\lambda_l(k) - \lambda_\alpha(k)|$, $|B(k)|$, $|\beta_\delta(k)|$, будучи відмінними від нуля, можуть приймати як завгодно малі значення для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому питання існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Легко бачити, що для довільного $a \in (0,1)$ при $|k| > K_1$, де

$$K_1^h = C_1^{-1}(C_2 + T^{-1}\ln(|\mu|/(1-a))),$$

справджується оцінка

$$|1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T)| \geqslant a. \tag{18}$$

З вигляду рівняння (3) випливає, що

$$|\lambda_j(k)| \leqslant \omega |k|^q, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash 0. \tag{19}$$

Теорема 2. *Нехай існують додатні сталі* $s_1, s_2, s_3, C_3, C_4, C_5$ *такі, що для всіх векторів* $k \in \mathbb{Z}^p, |k| > K_2$, *виконуються нерівності*

$$\prod_{\alpha=1,\, \alpha\neq l}^{n} |\lambda_l(k) - \lambda_\alpha(k)| \geqslant C_3|k|^{-s_1}, \quad l = \overline{1,n}; \tag{20}$$

$$|B(k)| \geqslant C_4|k|^{-s_2}; \tag{21}$$

$$|\beta_\nu(k)| \geqslant C_5|k|^{-s_3}, \quad \nu = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Якщо $f_{\delta,\sigma}(x) \in C^\gamma(\Omega)$, $\gamma > q(2n+m(2n-m-1)/2)+p+\sum_{i=1}^3 s_i$, $\delta = \overline{1,m}$; $\sigma = \overline{1,n_\delta}$, *то в просторі* $\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)$ *існує розв'язок задачі (1),(2), який неперервно залежить від* $f_{\delta,\sigma}(x)$, $\delta = \overline{1,m}$; $\sigma = \overline{1,n_\delta}$.

Доведення. Зауважимо, що при $k \in \mathbb{Z}^p \backslash 0$ справджуються оцінки

$$|B_{h_{\delta,\chi},\nu}(k)| \leqslant C_6|k|^{q(m-1)(n-1-m/2)}, \tag{23}$$

$$|(\beta_\delta)_{\sigma,\chi}(k)| \leqslant C_7|k|^{q(n_\delta-1)}, \quad \delta = \overline{1,m}. \tag{24}$$

З формул (5),(16),(17) та оцінок (18)-(24) випливає, що

$$\|u\|_{\bar{C}^{(\bar{n},q)}(D)} \leqslant C_8 \sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n_\delta}\Big(\sum_{|k|\leqslant K}|f_{k,\delta,\sigma}| + \sum_{|k|>K}\|k\|^\eta |f_{k,\delta,\sigma}|\Big) \leqslant C_9 \sum_{\delta=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n_\delta}\|f_{\delta,\sigma}\|_{C^\gamma(\Omega)},$$

де $K = \max K_1, K_2$; $\eta = q(2n + m(2n-m-1)/2) + \sum_{i=1}^3 s_i$. Теорему доведено.

Зауваження 2. *Якщо* $f_{\delta,\sigma}(x) \in A_s^q$, $s > \omega T$, $\delta = \overline{1,m}$, $\sigma = \overline{1,n_\delta}$, *то при виконанні всіх інших умов теореми 2 розв'язок задачі (1),(2) належить до простору* $\bar{C}^{\bar{n}}([0,T], A_\epsilon^q)$, $0 < \epsilon < s - \omega T$.

Дослідимо, коли виконуються оцінки (20)-(22). Позначимо через $y = (y_1, ..., y_\gamma)$ вектор, складений з коефіцієнтів рівняння (3), де γ – число всіх коефіцієнтів.

Теорема 3. *Для майже всіх (за Лебегом) векторів* y *нерівності (20) виконуються при* $s_1 > (n-1)(p-q+q(n-2))/2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення. Доведення теореми базується на тому, що дискримінант $D(P)$ характеристичного полінома

$$\det P(\lambda(k)) \equiv \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i A_i(k)$$

з (3) можна зобразити як через коефіцієнти $A_i(k)$ у вигляді

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} n^n A_0^{n-1}(k) + F, \tag{25}$$

де F містить степені коефіцієнта $A_0(k)$ менші за $n-1$, так і через корені $\lambda_j(k)$, $\quad j = \overline{1,n}$ полінома $\det P(\lambda(k))$ за формулою [4]

$$D(P) = \prod_{1 \leqslant l < q \leqslant n} (\lambda_q(k) - \lambda_l(k))^2. \tag{26}$$

Доведемо, що для майже всіх векторів y, які належать до деякого паралелепіпеда $P_\gamma = [\alpha_1, \beta_1] \times P_{\gamma-1} \subset \mathbb{R}^\gamma$, для $D(P)$ виконується оцінка

$$|D(P)| \geqslant |k|^{-s_4} \tag{27}$$

при досить великих $|k|$. Позначимо через E множину тих y, для яких протилежна нерівність

$$|D(P)| < |k|^{-s_4} \tag{28}$$

справджується для нескінченного числа векторів k, а через E_k- множину тих векторів y, для яких нерівність (28) є правильною при фіксованому k. Не порушуючи загальності вважатимемо, що

$$|k_1| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |k_i|, \quad \alpha = P_{11}(0, q, 0, ..., 0) \neq 0$$

і, використавши (25) і те, що $A_0(k)$ лінійно залежить від α, знайдемо

$$\left| \frac{\partial^{n-1} D(P)}{\partial \alpha^{n-1}} \right| = n^n (n-1)! \quad |k_1|^{q(n-1)}.$$

На підставі леми 2.2 [4] одержуємо, що міра множини E_k^1 тих значень $\alpha \in [\alpha_1, \beta_1]$, які задовольняють (28) (коли решта коефіцієнтів рівняння (3) фіксовані), має таку оцінку:

$$|E_k^1| \leqslant C_{10} |k|^{-(s_4/(n-1)+q)}. \tag{29}$$

Інтегруючи (29) по паралелепіпеду $P_{\gamma-1}$, маємо

$$|E_k| \leqslant C_{11} |k|^{-(s_4/(n-1)+q)}.$$

Оскільки ряд $\sum_{|k|\geqslant 0}|E_k|$ збігається при $s_4 > (p-q)(n-1)$, то згідно з лемою 2.1 [4] міра множини E дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх (за Лебегом) векторів y виконується нерівність (27) для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. На підставі формули (26) та оцінок (19) дістаємо нерівності (20) при $s_1 > (n-1)(p-q+q(n-2))/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Теорему доведено.

Розглянемо нерівність (21). Зобразимо значення визначника $B(k)$ у вигляді

$$B(k) \equiv \sum_{|s|\leqslant q(m-1)(n-m/2)} B_s k_1^{s_1}...k_p^{s_p}$$

і позначимо через $b^{(1)} = (b_1^{(1)},...,b_h^{(1)}),\quad b^{(2)} = (b_1^{(2)},...,b_h^{(2)})-$ вектори, складені відповідно з дійсних і уявних частин коефіцієнтів B_s, де $h-$ кількість цілочислових розв'язків нерівності $|s| \leqslant q(m-1)(n-m/2)$. Зокрема, $b_1^{(1)} = ReB_0,\quad b_1^{(2)} = \mathrm{Im}B_0$.

Теорема 4. *Для майже всіх (за Лебегом) векторів $b^{(1)}$ і для всіх векторів $b^{(2)}$ (або для всіх $b^{(1)}$ та майже всіх $b^{(2)}$) нерівність (21) виконується при $s_2 > p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Доведення. Оскільки $|B(k)| \geqslant \max\{\mathrm{Re}|B(k)|, \mathrm{Im}|B(k)|\}$, то для доведення (21) нам досить довести виконання нерівності

$$\mathrm{Re}|B(k)| \geqslant C_4|k|^{-s_2}. \tag{30}$$

Позначимо через D множину тих векторів $b^{(1)}$, які належать до деякого $h-$ вимірного паралелепіпеда $P_h = [\alpha_1, \beta_1] \times P_{h-1} \subset \mathbb{R}^h$, для яких нерівність

$$\mathrm{Re}|B(k)| < |k|^{-s_2} \tag{31}$$

має нескінченне число розв'язків $k = (k_1, ..., k_p) \in \mathbb{Z}^p$. Зафіксуємо k і $b_j^{(1)},\quad j = 2, ..., h$. Тоді для $D_k(b_2^{(1)}, ...b_h^{(1)})$ множини тих $b_1^{(1)} \in [\alpha_1, \beta_1]$, для яких виконується нерівність (31), правильна оцінка

$$|D_k(b_2^{(1)}, ..., b_h^{(1)})| < 2|k|^{-s_2}, \tag{32}$$

де $|B|-$ міра множини B. Інтегруючи (32) по паралелепіпеду P_{h-1}, знаходимо, що міра множини $D(k)$ тих векторів $b^{(1)} \in P_h$, для яких виконується (31) при фіксованому k, задовольняє оцінку

$$|D(k)| < 2C|k|^{-s_2},$$

де $C-$ об'єм P_{h-1}. Оскільки ряд $\sum_{|k|\geqslant 0} 2C|k|^{-s_2}$ збігається при $s_2 > p$, то згідно з лемою 2.1 [4] $|D| = 0$. Отже, для майже всіх $b^{(1)} \in P_h$ та для всіх $b^{(2)}$ виконується нерівність (21) при$s_2 > p$. Теорему доведено.

Переходячи до нерівностей (22) відзначимо, що значення визначників $\beta_\nu(k),\quad \nu = \overline{1,m}$, зображаються у вигляді

$$\beta_\nu(k) = \sum_{|s|\leqslant qn_\nu} a_{\nu s} k_1^{s_1}...k_p^{s_p}, \quad \nu = \overline{1,m}.$$

Позначимо через $A_\nu^{(1)}$ і $A_\nu^{(2)}$ вектори з компонентами $\mathrm{Re}\, a_{\nu s}$ і $\mathrm{Im}\, a_{\nu s}$ відповідно, а через $z_\nu-$ число невід'ємних розв'язків у цілих числах $s_1, ..., s_p$ нерівності $|s| \leqslant qn_\nu$.

Теорема 5. *Для майже всіх (за Лебегом) векторів $A_\nu^{(1)}$ і для всіх $A_\nu^{(2)}$ (або для майже всіх векторів $A_\nu^{(2)}$ і для всіх $A_\nu^{(1)}$) кожна з оцінок (21) виконується при $s_3 > p$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.*

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 4 з урахуванням того, що

$$|\beta_\nu(k)| \geqslant \max\left\{|\mathrm{Re} \sum_{|s|\leqslant qn_\nu} a_{\nu s} k_1^{s_1} ... k_p^{s_p}|, |\mathrm{Im} \sum_{|s|\leqslant qn_\nu} a_{\nu s} k_1^{s_1} ... k_p^{s_p}|\right\}, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

1. Ількив В.С., Пташник Б.Й. *Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами* // Дифференц.уравнения. — 1984. — Т.20, N 6. — С. 1012-1023.
2. Корбут Л.І., Матійчук М.І. *Про нелокальну параболічну крайову задачу*// Тези допов. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь." — Дрогобич: Інститут матем-ки НАН України, 1994. — С. 72.
3. Полищук В.Н. *Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболической системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*// Докл.АН УССР, Сер.А. — 1979. — N 3. — С.171-175.
4. Пташник Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - К., Наук. думка, 1984. — 264 с.
5. Савченко Г.Б. *О корректности одной нелокальной задачи*// Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, N 8. — С. 1450-1453.
6. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально- операторных уравнений.- К., Наук.думка, 1984. — 284 с.
7. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. - М., Наука, 1977. — 143 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.05.94

УДК 517.95

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. В. Волошин

Voloshin V. V. Periodic problem for a system of the first order hyperbolic differential equations with a small parameter. The asymptotic expansion of a solution of the periodic problem for the singular hyperbolic first order system is obtained employing the boundary layer method.

Ця праця є певним продовженням досліджень періодичних задач, проведених в [1], стосовно гіперболічного рівняння другого порядку з малим параметром та результатів автора з вивчення системи першого порядку з малим параметром, що вироджується у систему звичайних диференціальних рівнянь за змінною t [2].

Тут при відповідних припущеннях побудовано асимптотичне розвинення розв'язку сингулярно збуреної системи у випадку її повного виродження (вироджена система є системою алгебраїчних рівнянь). При дослідженні задачі використано метод, описаний у працях [3], [4], і результати праці [5].

У смузі $G = \Big\{(x,t) : 0 < x < \ell, -\infty < t < +\infty\Big\}$, де $0 < \ell < \infty$, розглянемо систему з малим параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial x}\right) + A(x,t)u(x,t,\varepsilon) = f(x,t), \tag{1}$$

де $u(x,t,\varepsilon) =$ colon $\{ u_1(x,t,\varepsilon),\ u_2(x,t,\varepsilon),\ \ldots,\ u_n(x,t,\varepsilon)\}$; $f(x,t) =$ $=$ colon $\{ f_1(x,t),\ f_2(x,t),\ \ldots\ ,\ f_n(x,t)\ \}$; $A(x,t)$ – $n \times n$ симетрична матриця з елементами $a_{jm}(x,t)$, $j = \overline{1,n}$, $m = \overline{1,n}$; $\Lambda(x,t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t)\}$, причому перші $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ величин додатні, решта $(n-k)$ від'ємні всюди в G.

Для системи (1) задаємо умови періодичності за t

$$u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+2\pi,\varepsilon), \tag{2}$$

та граничні умови

$$u_j(0,t,\varepsilon) = 0,\ j = \overline{1,k};\ u_j(\ell,t,\varepsilon) = 0,\ j = \overline{k+1,n}. \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35L50; Secondary 35B25.

Нехай $N \geqslant 1$ – задане натуральне число і виконані наступні умови:

1) функції $\lambda_j(x,t)$ неперервно диференційовні за сукупністю змінних x, t до $(N+1)$ порядку в G, функції $a_{jm}(x,t)$, $f_j(x,t)$ – неперервно диференційовні за сукупністю змінних x, t до $N+2$ порядку в G;

2) функції $\lambda_j(x,t)$, $a_{jm}(x,t)$, $f_j(x,t)$ періодичні за t з періодом 2π;

3) матриця $A(x,t)$ з діагональним переважанням, тобто для деякого $\mu > 0$ в G справедлива нерівність

$$a_{jj}(x,t) \geqslant \sum_{m=1}^{n} (1-\delta_{jm})|a_{jm}(x,t)| + \mu,$$

δ_{jm} – символ Кронекера;

4) якщо матриці $Z(t)$ та $Z^*(t)$ такі, що зводять матриці $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$ та $\Lambda^{-1}(\ell,t)A(\ell,t)$ відповідно до діагонального вигляду, причому в отриманих матрицях у першому випадку перші k елементів додатні, а в другому останні $(n-k)$ від'ємні, то $\det Z_{11}(t) \neq 0$, $\det Z^*_{22}(t) \neq 0$, де $Z_{11}(t)$ та $Z^*_{22}(t)$ – матриці (блоки) розмірів $k \times k$, $(n-k)\times(n-k)$ відповідно матриць

$$Z(t) = \begin{pmatrix} Z_{11}(t) & Z_{12}(t) \\ Z_{21}(t) & Z_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad Z^*(t) = \begin{pmatrix} Z^*_{11}(t) & Z^*_{12}(t) \\ Z^*_{21}(t) & Z^*_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що стовпчики матриць $Z(t)$ і $Z^*(t)$ є власними векторами матриць $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$ та $\Lambda^{-1}(\ell,t)A(\ell,t)$ відповідно і їх можна завжди розмістити в такому порядку, який забезпечує відповідний порядок додатних і від'ємних елементів в отриманих діагональних матрицях.

Зауважимо, що при виконанні цих умов для кожного фіксованого ε задача (1)-(3) однозначно розв'язна [6].

Асимптотичне розвинення розв'язку цієї задачі шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Big(u^i(x,t) + \Pi^i(\xi,t) + Q^i(\eta,t) \Big) + \varepsilon^{N+1} R_N(x,t,\varepsilon), \tag{4}$$

де $u^i(x,t)$ – функції регулярної частини асимптотики, $\Pi^i(\xi,t)$, $Q^i(\eta,t)$ – функції примежевого шару, $\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon)$ – зилишковий член асимптотики; $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $\eta = \dfrac{\ell - x}{\varepsilon}$ – регуляризуючі перетворення в околах $x=0$ та $x=\ell$ відповідно.

Якщо в (1) формально покласти $\varepsilon = 0$, то система вироджується в систему алгебраїчних рівнянь. При виродженні маємо втрату крайових умов (3). Тому в околах $x=0$ та $x=\ell$ виникають примежеві шари.

Стандартним способом отримуємо задачі для функцій розвинення (4). Зокрема, для функцій регулярної частини асимптотики маємо такі системи алгебраїчних рівнянь

$$A(x,t)u^i(x,t) = F^i(x,t), \ i = \overline{0,N}, \tag{5}$$

де

$$F^0(x,t) = f(x,t), \ F^i(x,t) = -\Lambda(x,t)\frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial t}, \ i = \overline{1,N},$$

до яких додаються умови

$$u^i(x,t) = u^i(x,t+2\pi), \ i = \overline{0,N}. \tag{6}$$

Для функцій примежевого шару задачі мають такий вигляд

$$\frac{\partial\, \Pi^i(\xi,t)}{\partial \xi} + \Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)\,\Pi^i(\xi,t) = \Psi^i(\xi,t), \ i = \overline{0,N}, \tag{7}$$

де $\Psi^0(\xi,t) \equiv 0$, $\Psi^i(\xi,t)$ $(i = \overline{1,N})$ лінійно виражаються через $\Pi^m(\xi,t)$ та їх похідні за ξ та t з періодичними коефіцієнтами $(m = \overline{0,i-1})$,

$$\Pi^i_j(0,t) = -u^i_j(0,t), \ j = \overline{1,k}, \ i = \overline{0,N}, \tag{8}$$

$$\Pi^i(\xi,t) = \Pi^i(\xi,t+2\pi), \ i = \overline{0,N}, \tag{9}$$

$$\lim_{\xi\to\infty} \Pi^i(\xi,t) = 0, \ i = \overline{0,N} \tag{10}$$

та

$$\frac{\partial Q^i(\eta,t)}{\partial \eta} - \Lambda^{-1}(\ell,t)A(\ell,t)Q^i(\eta,t) = \Phi^i(\eta,t), \ i = \overline{0,N}, \tag{11}$$

де $\Phi^0(\eta,t) \equiv 0$, $\Phi^i(\eta,t)$ $(i = \overline{0,N})$ лінійно виражаються через $Q^m(\eta,t)$ та їх похідні за η та t з періодичними коефіцієнтами $(m = \overline{0,i-1})$,

$$Q^i_j(0,t) = -u^i_j(\ell,t), \ j = \overline{k+1,n}, \ i = \overline{0,N}, \tag{12}$$

$$Q^i(\eta,t) = Q^i(\eta,t+2\pi), \ i = \overline{0,N}, \tag{13}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} Q^i(\eta,t) = 0, \ i = \overline{0,N}. \tag{14}$$

Розглянемо системи (5) для визначення функцій регулярної частини асимптотики.

Зауважимо, що оскільки матриця $A(x,t)$ з діагональним переважанням, то з теореми Леві - Десппланка [7] отримуємо додатну визначеність цієї матриці. Звідси випливає, що $\det\, A(x,t) \neq 0$ і ця властивість забезпечує існування матриці $A^{-1}(x,t)$.

Тому розв'язок систем (5) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &u^0(x,t) = A^{-1}(x,t)f(x,t),\\ &u^i(x,t) = A^{-1}(x,t)\left[-\Lambda(x,t)\frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u^{i-1}(x,t)}{\partial t}\right], \ i = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{15}$$

Періодичність цих розв'язків, тобто виконання умов (6), легко довести методом математичної індукції, враховуючи періодичність та відповідну гладкість $A(x,t)$ та $f(x,t)$.

Для функцій примежевого шару отримали систему звичайних диференціальних рівнянь за ξ (t входить параметром) з відповідними умовами. Для прикладу розглянемо задачі, що підправляють розв'язок в околі $x = 0$.

Оскільки матриця $\Lambda^{-1}(0,t)$ симетрична, а матриця $A(0,t)$ симетрична і додатно визначена, то існує [8] невироджена матриця $Z(t)$, що зводить матрицю $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$ до діагонального вигляду, тобто

$$Z^{-1}(t)\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)Z(t) = D(t) = \mathrm{diag}\{d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)\}.$$

Далі, оскільки матриця $A(0,t)$ додатно визначена, k елементів діагональної матриці $\Lambda^{-1}(0,t)$ додатні, а решта $(n-k)$ від'ємні, то матриця $\Lambda^{-1}(0,t)A(0,t)$, а отже і $D(t)$, мають k додатних і $(n-k)$ від'ємних власних значень [9]. Зазначимо, що матрицю $Z(t)$ можна вибрати 2π-періодичною і такою, що $d_j(t) > 0$, $j = \overline{1,k}$, $d_j(t) < 0$, $j = \overline{k+1,n}$ та всі $d_j(t)$ періодичні з періодом 2π.

Зробимо заміну $\Pi^i(\xi,t) = Z(t)P^i(\xi,t)$ та домножимо (7) зліва на $Z^{-1}(t)$. Система зведеться до вигляду

$$\frac{\partial P^i_j(\xi,t)}{\partial\xi} + d_j(t)P^i_j(\xi,t) = \sum_{m=1}^{n} z^{-1}_{jm}(t)\Psi^i_m(\xi,t),\ j=\overline{1,n}, i=\overline{0,N},$$

де $z^{-1}_{jm}(t)$ – елементи матриці $Z^{-1}(t)$. Розв'язуючи цю систему, отримаємо

$$P^i_j(\xi,t) = \left(C^i_j(t) + \int_{a_j}^{\xi} \sum_{m=1}^{n} z^{-1}_{jm}(t)\Psi^i_m(s,t)\exp(d_j(t)s)ds\right)\exp(-d_j(t)\xi), \tag{16}$$

$j=\overline{1,n}$, $i=\overline{0,N}$, де $a_j = 0$, $j=\overline{1,k}$, $a_j = +\infty$, $j=\overline{k+1,n}$. Щоб визначити функції та встановити властивості розв'язків (16), використаємо результати, викладені в роботі [10].

Оскільки повинні виконуватися умови (10), то $C^i_j(t) \equiv 0$, $j=\overline{k+1,n}$, $i=\overline{0,N}$. Враховуючи, що $\det Z_{11}(t) \neq 0$, решта $C^i_j(t)$ однозначно визначаємо з умов (8). Доведемо методом математичної індукції експоненціальну оцінку та періодичність цих розв'язків. Для $P^0_j(\xi,t)$ маємо

$$P^0_j(\xi,t) = C^0_j(t)\mathrm{e}^{-d_j(t)\xi},\ j=\overline{1,k},\ P^0_j(\xi,t)\equiv 0,\ j=\overline{k+1,n}, \tag{17}$$

де

$$\mathrm{colon}\{C^0_1(t), C^0_2(t), \dots, C^0_k(t)\} = -Z^{-1}_{11}(t)\ \mathrm{colon}\{u^0_1(t), u^0_2(t), \dots, u^0_k(t)\}.$$

Враховуючи періодичність $C^0_j(t)$, $d_j(t)$, $j=\overline{1,k}$ та додатність $d_j(t)$, $j=\overline{1,k}$, маємо періодичність та експоненціальну оцінку. Зауважимо, що з представлення (17) випливає, що й похідні $P^0_j(\xi,t)$ (а отже і $\Pi^0(\xi,t)$) за ξ й t до порядку, що визначається гладкістю коефіцієнтів системи, періодичні й експоненціально спадні за ξ.

Далі, припускаючи періодичність і експоненціальну оцінку для функцій $\Pi^q(\xi,t)$, $q=\overline{0,i-1}$ та їх похідних, доведемо оцінку для $P^i(\xi,t)$. Для цього звернемося до зображення (16). Зауважимо, що оскільки, $\Psi^i_m(\xi,t)$ експоненціально спадні за ξ, коефіцієнти $z^{-1}_{jm}(t)$ обмежені, то у випадку $j=\overline{k+1,n}$ інтеграли у правій частині збіжні. Використовуючи умови (10) і (8), визначаємо функції $C_j^i(t)$. Внаслідок періодичності $C_j^i(t)$, $z_{jm}(t)$, $\Psi_m^j(\xi,t)$, $d_j(t)$ та експоненціального спадання $\Psi_m^i(\xi,t)$, з [10] випливає, що й $P_j^i(\xi,t)$ періодичні за t та експоненціально спадні за ξ. Тому $\Pi^i(\xi,t) = Z(t)P^i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$ є розв'язком задачі (7)-(10) типу примежевого шару.

Задачі (11)-(14) для функцій $Q^i(\eta,t)$, $i = \overline{0,N}$ подібні до розглянутих. Аналогічно доводимо, що й $Q^i(\eta,t)$, $i = \overline{0,N}$ типу примежевого шару. Отже, усі функції $u^i(x,t)$, $\Pi^i(\xi,t)$, $Q^i(\eta,t)$, $(i = \overline{0,N})$ знайдені, тобто знайдено формальну асимптотику розв'язку задачі (1)-(3).

Для доведення асимптотичної коректності розвинення розв'язку вихідної задачі необхідно отримати оцінку залишкового члена. Щоб отримати задачу для залишкового члена, підставимо в (1) замість $u(x,t,\varepsilon)$ вираз (4), причому на кожен доданок подіємо оператором з урахуванням відповідного регуляризуючого перетворення. Оскільки функції $u^i(x,t)$ є розв'язками систем (5), функції $\Pi^i(\xi,t)$ та $Q^i(\eta,t)$ – розв'язки систем (7), (11) відповідно, то $R_N(x,t,\varepsilon)$ є розв'язком системи

$$\varepsilon\left(\frac{\partial R_N}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial R_N}{\partial x}\right) + A(x,t)R_N = F_N(x,t,\varepsilon), \tag{18}$$

де $F_N(x,t,\varepsilon)$ легко виписується в явному вигляді, причому елементи цієї вектор-функції обмежені за ε. Підставляючи (4) у (2) і (3), враховуючи співвідношення (6), (9), (13) та (8), (14), (12), (10), отримаємо умови

$$R_N(x,t,\varepsilon) = R_N(x,t+2\pi,\varepsilon), \tag{19}$$

$$R_{N_j}(0,t,\varepsilon) = \chi_j(t,\varepsilon),\ j = \overline{1,k},\ R_{N_j}(\ell,t,\varepsilon) = \chi_j(t,\varepsilon),\ j = \overline{k+1,n}, \tag{20}$$

де $\chi_j(t,\varepsilon)$, $(j = \overline{1,n})$ обмежені за ε і легко виписуються у явному вигляді.

Розв'язок задачі (18)-(20) можна шукати у вигляді суми двох функцій γ_1 та γ_2. Причому перша з них є достатньо гладкою і повинна задовольняти умови (19), (20), а друга, відповідно, буде розв'язком системи (18) з можливо зміненою правою частиною, яку позначимо $f_N(x,t,\varepsilon) = \mathrm{colon}\{f_{N_1}, f_{N_2}, \ldots, f_{N_n}\}$ (порядок малості за ε збережеться), з умовами (19) та нульовими умовами (20). За першу функцію можна взяти, наприклад, стовпчик $\chi_j(t), j = \overline{1,n}$, що задовольняє вказаним умовам. Тому, не обмежуючи загальності, можна розглядати задачу для залишкового члена з нульовими умовами (20). Встановимо оцінку розв'язку цієї задачі методом інтегралів енергії [5]. Для цього домножимо j-те рівняння (18) (зі зміненою правою частиною) на $R_{N_j}(x,t,\varepsilon)$, підсумуємо всі рівняння по j, результат зінтегруємо по області $D = \Big\{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant \ell, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\Big\}$. Після очевидних перетворень отримаємо

$$\varepsilon\int\limits_0^{\ell}\sum_{j=1}^{n}R_{N_j}^2(x,0,\varepsilon)dx-\varepsilon\int\limits_0^{\ell}\sum_{j=1}^{n}R_{N_j}^2(x,2\pi,\varepsilon)dx+\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\ell,t)R_{N_j}^2(\ell,t,\varepsilon)dt-$$
$$-\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(0,t)R_{N_j}^2(0,t,\varepsilon)dt+2\iint\limits_D\sum_{j,m=1}^{n}a_{jm}(x,t)R_{N_m}R_{N_j}dxdt=$$
$$=2\iint\limits_D\sum_{j=1}^{n}f_{N_j}R_{N_j}dxdt+\varepsilon\iint\limits_D\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_j(x,t)}{\partial x}R_{N_j}^2dxdt.$$

Враховуючи періодичність $R_N(x,t,\varepsilon)$, додатну визначеність $A(x,t)$, знак функцій $\lambda_j(x,t)$, $j=\overline{1,n}$, при достатньо малому ε отримаємо оцінку

$$\iint\limits_D\sum_{j=1}^{n}R_{N_j}^2dxdt\leqslant M\iint\limits_D\sum_{j=1}^{n}f_{N_j}^2dxdt, \tag{21}$$

де стала M не залежить від ε. Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1)-4). Тоді розв'язок задачі (1)-(3) при достатньо малих ε зображається у вигляді (4), де $u^i(x,t)$ – розв'язки задач (5), (6), функції примежевого шару $\Pi^i(\xi,t)$, $Q^i(\eta,t)$ – розв'язки задач (7)-(10) та (11)-(14) відповідно, $R_N(x,t,\varepsilon)$ задовольняє (21).*

1. Васильева А.Б., Сайдаматов М.М. *О периодическом решении сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа* // Изв. АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1986. – N 2. – С. 9-14.
2. Волошин В.В. *Періодична задача для сингулярно збуреної системи гіперболічних диференціальних рівнянь першого порядку* // Праці Всеукраінськоі конференції молодих вчених. Математика. - Київ, 1994. – С. 121-129.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, N 5. – С. 3-122.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.- М., Высшая школа, 1990. – 208 с.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными.- М., Мир, 1964. – 830 с.
6. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Краевая задача без начальных условий для линейной одномерной системы уравнений гиперболического типа* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, N 3. – С. 463-469.

7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М., Мир, 1989. – 655 с.

8. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре.- М., Наука, 1984. – 416 с.

9. Wielandt Helmut. *On the eigenvalues of $A+B$ and AB* // Journal of research of the National Poured of Standards. Mathematical Sciences.– 1973. – Vol. 77B, N. 182, January - June. – P. 61-63.

10. Еругин М.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Минск, 1979. – 744 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.94

УДК 517.95

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

М. І. Іванчов

Ivanchov M. I. On an inverse problem for parabolic equation. The inverse problem for finding unknown time-dependent factor of major coefficient in parabolic equation is considered. The existence and uniqueness conditions of solution of the problem are established.

У даній праці досліджено можливість ідентифікації старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні у випадку, коли він є добутком двох функцій різних аргументів, одна з яких є відомою, а друга підлягає визначенню. Подібні задачі розглядались у працях [1,2].

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)b(x)u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)$, початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Розв'язком даної задачі будемо вважати пару функцій $(a(t), u(x,t))$, яка належить до класу $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ [3], $a(t) > 0,\ t \in [0,T]$ і задовольняє умови (1)–(4).

Припустимо, що виконуються такі умови:

$(\mathbf{A_1})$ $b(x), \varphi(x) \in C^1[0,h];\ \mu_i(t) \in C^1[0,T], i = 1,2,\ \mu_3(t) \in C[0,T];$
$f(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T);$

$(\mathbf{A_2})$ $b(x) > 0, b'(x) \leqslant 0, \varphi'(x) > 0, x \in [0,h]; \mu_1'(t) - f(0,t) \leqslant 0,$
$\mu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0, \mu_3(t) > 0, t \in [0,T];\ f_x(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in \overline{Q}_T;$

$(\mathbf{A_3})$ $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(h) = \mu_2(0).$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

Вважаючи заданою неперервну на $[0,T]$ функцію $a(t)>0$, подамо розв'язок прямої задачі (1)–(3) у вигляді

$$u=u_0+v, \tag{5}$$

де

$$u_0(x,t)=\int\limits_0^h G_0(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+\sqrt{b(0)}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{b(\xi)}G_0(x,t,\xi,\tau)\right)\Big|_{\xi=0}\times$$
$$\times a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau-\sqrt{b(h)}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{b(\xi)}G_0(x,t,\xi,\tau)\right)\Big|_{\xi=h}a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_0(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{6}$$

$$G_0(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha(t)-\alpha(\tau))b(\xi)}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)-\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right),$$

$$\alpha(t)=\int\limits_0^t a(\tau)d\tau,\quad \beta(x)=\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{b(\xi)}},\quad H=\beta(h). \tag{7}$$

Легко перевірити, що функція $u_0(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_{0t}=a(t)b(x)u_{0xx}+\frac{1}{2}a(t)b'(x)u_{0x}+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T \tag{8}$$

і задовольняє умови (2), (3), а функція $v(x,t)$ визначається з рівняння

$$v_t=a(t)b(x)v_{xx}-\frac{1}{2}a(t)b'(x)u_{0x},\quad (x,t)\in Q_T \tag{9}$$

і умов

$$v(x,0)=0,\quad x\in[0,h], \tag{10}$$
$$v(0,t)=v(h,t)=0,\quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

Позначаючи через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (9)–(11) [3], функцію $v(x,t)$ знаходимо у вигляді

$$v(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau)a(\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{12}$$

Підставляючи (6) і (12) в (5), знаходимо розв'язок прямої задачі (1)–(3). Для того, щоб задовольнити умову перевизначення (4), обчислимо похідні від функцій $u_0(x,t)$ і $v(x,t)$. Похідна від $v(x,t)$ знаходиться з формули (12) безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла [4]. Для знаходження похідної від функції $u_0(x,t)$ позначимо доданки, що входять до неі, через $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,4}$, так що

$$u_0(x,t)=\sum_{i=1}^{4}u_i(x,t).$$

Зобразимо $u_1(x,t)$ у вигляді

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{b(\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int_0^h\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{b(\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi$$

і проведемо заміни змінних в інтегралах, відповідно:

$$\frac{\beta(x)-\beta(\xi)+2nH}{2\sqrt{\alpha(t)}}=z,\quad\frac{\beta(x)+\beta(\xi)+2nH}{2\sqrt{\alpha(t)}}=\zeta. \tag{13}$$

Диференціюючи після цього отримані вирази по x і проводячи зворотні заміни, знаходимо

$$u_{1x}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\left(\varphi(0)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)-\right.$$
$$-\varphi(h)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4\alpha(t)}\right)+\frac{1}{2}\int_0^h\varphi'(\xi)\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)\right)d\xi\right).$$

Функцію $u_2(x,t)$ запишемо у вигляді

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{a(\tau)\mu_1(\tau)}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\beta(x)+2nH)\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau = -\sqrt{\frac{b(x)}{\pi}}\int\limits_0^t a(\tau)\mu_1(\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right)d\tau.$$

Враховуючи співвідношення

$$\frac{a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\left(b(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}b'(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right),$$

інтегруванням частинами знаходимо

$$u_{2x}(x,t)=-\frac{\mu_1(0)}{\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau.$$

Аналогічно отримуємо

$$u_{3x}(x,t)=\frac{\mu_2(0)}{\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4\alpha(t)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_2'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau.$$

Для обчислення $u_{4x}(x,t)$ проведемо заміну, аналогічну до (13). Тоді матимемо

$$u_{4x}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\left(f(0,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)-\right.$$

$$\left.-f(h,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\int\limits_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)+\right.$$

$$+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)f_\xi(\xi,\tau)d\xi.$$

З отриманих формул маємо

$$u_{0x}(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(t)b(x)}}\int\limits_0^h\varphi'(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)\right)d\xi-\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+\frac{1}{\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(x)+(2n-1)H)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi b(x)}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\times$$
$$\times\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta(x)-\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{(\beta(x)+\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right)d\xi. \tag{14}$$

Підставляючи (14) і (12) в умову перевизначення (4), приходимо до такого рівняння стосовно $a(t)$:

$$a(t)=\mu_3(t)\sqrt{\pi b(0)}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\int\limits_0^h\varphi'(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^t\frac{\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2H^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2H^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\xi-$$
$$-\frac{\sqrt{\pi b(0)}}{2}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau\int\limits_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi\Bigg)^{-1},\quad t\in[0,T].$$

(15)

Оцінимо розв'язки рівняння (15). Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(t)}}\int\limits_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4\alpha(t)}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{b(\xi)}}=1, \tag{16}$$

і те, що для функції Гріна $G_x(0,t,\xi,\tau)\geqslant 0$, маємо

$$a(t)\leqslant A_1<\infty,\quad t\in[0,T], \tag{17}$$

де

$$A_1=\frac{\sqrt{b(0)}\max\limits_{[0,T]}\mu_3(t)}{\sqrt{b(h)}\min\limits_{[0,h]}\varphi'(x)}.$$

Для отримання оцінки $a(t)$ знизу, установимо оцінки зверху кожного доданка, що входить до знаменника правої частини (15). Перший доданок оцінюється за допомогою рівності (16). Для оцінки наступних двох доданків попередньо встановлюємо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2z^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n-1}^{n}e^{-t^2z^2}dt=\int\limits_0^{\infty}e^{-t^2z^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2z},\ z>0. \tag{18}$$

Маючи (18), отримуємо

$$\begin{gathered}-\int\limits_0^t\frac{\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2H^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right)d\tau\leqslant\\
\leqslant\max_{[0,T]}(f(0,t)-\mu_1'(t))\left(\frac{\sqrt{\pi}}{H}+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\right)\leqslant C_1+\frac{C_2}{\sqrt{\min\limits_{[0,T]}a(t)}},\\
\int\limits_0^t\frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2H^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau\leqslant C_3\end{gathered} \tag{19}$$

зі сталими $C_i>0, i=1,2,3$, що не залежать від $a(t)$.

Співвідношення (16) використовується і для оцінки такого виразу:

$$\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\beta(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\xi\leqslant C_4 \tag{20}$$

Аналогічно оцінюючи вирази, що входять до формули (14), отримуємо

$$u_{0x}(x,t) \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}. \tag{21}$$

Перш ніж установити оцінку похідної функції Гріна $G_x(x,t,\xi,\tau)$, зауважимо, що заміною $\theta = \alpha(t)$ рівняння (9) зводиться до вигляду

$$\hat{v}_\theta = b(x)\hat{v}_{xx} - \frac{1}{2}b'(x)\hat{u}_{0x}, \ x \in [0,h], \ \theta \in [0, A_1 T], \tag{22}$$

де значком $\hat{}$ позначені функції, утворені після вказаної заміни. Згідно з [3], для похідної функції Гріна справджується оцінка

$$\left|\hat{G}_x(x,\theta,\xi,\sigma)\right| \leqslant \frac{C_7}{\theta-\sigma}\exp\left(-\frac{C_8(x-\xi)^2}{\theta-\sigma}\right).$$

Повертаючись до старих змінних, маємо

$$|G_x(x,t,\xi,\tau)| \leqslant \frac{C_7}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\exp\left(-\frac{C_8(x-\xi)^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right), \tag{23}$$

де сталі $C_7, C_8 > 0$ не залежать від $a(t)$. Використовуючи (21), (23), отримуємо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau \int\limits_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi \leqslant C_9 \int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\alpha(t)-\alpha(\tau)} \times$$
$$\times \left(C_5 + C_6\int\limits_0^\tau \frac{d\sigma}{\sqrt{\alpha(\tau)-\alpha(\sigma)}}\right) d\tau \int\limits_0^h \exp\left(-\frac{C_8\xi^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right) d\xi. \tag{24}$$

Проводячи заміну змінної $\zeta = \dfrac{\sqrt{C_8}\xi}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}$, враховуючи рівність

$$\int\limits_\sigma^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\tau))(\alpha(\tau)-\alpha(\sigma))}} = \pi$$

та оцінку $a(t)$ зверху (17), з (24) знаходимо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t a(\tau)d\tau \int\limits_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b'(\xi)u_{0\xi}(\xi,\tau)d\xi \leqslant C_{10}. \tag{25}$$

Тоді з (19)–(21), (25) отримаємо

$$\min_{[0,T]} a(t) \geqslant \frac{C_{11}}{C_{12} + C_{13}(\min\limits_{[0,T]} a(t))^{-1/2}}$$

зі сталими $C_{11}, C_{12}, C_{13} > 0$, що залежать тільки від вихідних даних задачі. Звідси приходимо до оцінки $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant A_0 > 0, \quad t \in [0,T], \tag{26}$$

де стала A_0 не залежить від $a(t)$.

При наявності оцінок (17), (26) до рівняння (15) можна застосувати теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора за схемою, що викладена в [5,6]. Звідси отримуємо існування розв'язку $a(t) \in C[0,T]$ рівняння (15). Підставляючи його в (6), (12) і (5), знаходимо $u(x,t)$. Отже, має місце теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{A_1}) - (\mathbf{A_3})$. *Тоді розв'язок задачі (1)-(4) існує.*

Установимо єдиність розв'язку задачі (1)–(4). Припускаючи, що $(a_i(t), u_i(x,t)),\ i = 1,2$ — два різних розв'язки даної задачі, знаходимо, що їх різниця $d(t) = a_1(t) - a_2(t), w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$w_t = a_1(t)b(x)w_{xx} + d(t)b(x)u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{27}$$

$$w(x,0) = 0,\ x \in [0,h],\ w(0,t) = w(h,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{28}$$

$$a_1(t)w_x(0,t) = -d(t)u_{2x}(0,t),\ t \in [0,T]. \tag{29}$$

Знаходячи за допомогою функції Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ роз'язок задачі (27)–(28) і підставляючи його в умову (29), отримаємо

$$a_1(t) \int\limits_0^t d(\tau)d\tau \int\limits_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)b(\xi)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi = -d(t)u_{2x}(0,t). \tag{30}$$

Припустимо, що справджуються умови $(\mathbf{A_1}), (\mathbf{A_3})$ і умова

$$\mu_3(t) > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{31}$$

Тоді $u_{2x}(0,t) > 0$ і рівняння (30) є однорідним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду з ядром, що має інтегровну особливість. Звідси $d(t) \equiv 0$ і, отже, $w(x,t) \equiv 0$ як розв'язок однорідної задачі вигляду (27), (28).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A_1}), (\mathbf{A_3})$, *(31). Тоді розв'язок задачі (1)-(4) єдиний.*

1. Jones B.F. *Various methods for finding unknown coefficients in parabolic equation* // Comm. on Pure and Applied Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33–44.

2. Lorenzi A. *Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation* // Ric. Mat. – 1983. – Vol. 32, N 2. – P. 263–284.

3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., Наука, 1967. – 736 с.

4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М., Мир, 1968. – 428 с.

5. Иванчов Н.И. *Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости* // Сиб. мат. журнал. – 1994. – Т. 35, N 3. – С. 612–621.

6. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – Препринт, Київ, 1995. – 84 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.96

УДК 517.512

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР'Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗНАЧЕННЯМИ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Я. Г. Притула

Prytula Ya. G. Convergence of the Fourier series of almost periodic functions with values from Banach space. For the almost periodic functions with values from Banach space the sufficient conditions of convergence of the series made from the Fourier coefficients are proved. These results are the generalization of Sasa and Zigmund properties of absolutely convergence of Fourier series.

Нехай B – банахів простір, $f : \mathbb{R}^1 \to B$ – неперервна функція.

Означення 1. *Множина $E \subset \mathbb{R}^1$ називається відносно щільною, якщо $\exists l > 0$, що в кожному інтервалі $(\alpha, \alpha + l)$ міститься хоча б одне число з E.*

Означення 2. *Неперервна функція $f : \mathbb{R}^1 \to B$ називається рівномірно майже періодичною функцією, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ $\left\{\tau \middle| \sup\limits_t ||f(t+\tau) - f(t)|| < \varepsilon\right\}$ – відносно щільна множина.*

Означення 3. *Функція $f : [a, b] \to B$ називається функцією з обмеженою сильною варіацією, якщо має місце*

$$V([a,b], f) = \sup_p \sum_{i=1}^{n} ||f(t_i) - f(t_{i-1})|| < \infty$$

для довільних розбиттів p відрізка $[a, b]$.

Означення 4. *Рівномірно майже періодична (р.м.п.) функція $f : \mathbb{R}^1 \to B$ називається функцією сильної обмеженої варіації, якщо*

$$\exists M \; \exists L \; \forall a \; V([a, a + L], f) \leqslant M.$$

Введемо поняття модулів неперервності для р.м.п. функцій f таким чином:

$$\omega(\sigma, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|h| \leqslant \delta} ||f(t+h) - f(t)||, \tag{1}$$

$$\omega_2(\sigma, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|h| < \delta} \Big(M\{||f(t+h) - f(t)||^2\}^{1/2} \Big), \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 42A16.

де $M\{f\}$ – середнє значення р.м.п. функції.

Будемо розглядати рівномірно майже періодичні функції, спектр яких має єдину точку згущення на ∞. Ряд Фур'є у цьому випадку будемо записувати у симетричній формі

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n t} \tag{3}$$

$$(\lambda_{-n} = -\lambda_n;\ n > 0,\ \lambda_n < \lambda_{n+1};\ |A_n| + |A_{-n}| > 0).$$

Теорема 1. *Нехай $f : \mathbb{R}^1 \to H$ – р.м.п. функція з рядом Фур'є (3), H – гільбертів простір. Тоді із збіжності ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

випливає абсолютна збіжність ряду Фур'є функції f, тобто $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n|| < \infty$.

Доведення. Розглянемо ряд Фур'є $f(t+h) - f(t) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n(e^{i\lambda_n h} - 1)e^{i\lambda_n t}$. З рівності Парсеваля отримуємо $M\{||f(t+h) - f(t)||^2\} = 2 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n||^2(1 - \cos\lambda_n h)$, а з (2) маємо

$$\omega_2^2(\pi/\lambda_n, f) = \sup_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n||^2(1 - \cos\lambda_n h) \geqslant$$
$$\geqslant \sup_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} 2 \sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2(1 - \cos\lambda_k h) \geqslant$$
$$\geqslant 2 \sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2 - \inf_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} 2 \sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2 \cos\lambda_k h.$$

Оскільки ([1] ст. 91)

$$\inf_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} 2 \sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2 \cos\lambda_k h \leqslant 0,$$

то

$$2 \sum_{|k|\geqslant n} ||A_k||^2 \leqslant \omega_2^2(\pi/\lambda_n, f). \tag{5}$$

Використовуючи нерівність Буняковського і (5) одержимо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} ||A_n|| = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\lambda_{2^{n-1}} \leqslant |\lambda_k| < \lambda_{2^n}} ||A_k||\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum ||A_k||^2 \sum 1^2\Big)^{1/2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_2\big(\pi/\lambda_{2^{n-1}}, f\big) 2^{(n-1)/2}. \tag{6}$$

За критерієм Коші збіжності ряду з монотонними коефіцієнтами, збіжність останнього ряду еквівалентна збіжності ряду (4).

Наслідок. *Нехай $f : \mathbb{R}^1 \to H$ – р.м.п. функція обмеженої сильної варіації і виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{n\lambda_n}} < \infty.$$

Тоді

$$\sum_{n-1}^{\infty} ||A_n|| < \infty.$$

Доведення. Методом, аналогічним як в [2], можна отримати нерівність

$$\omega_2^2(h, f) = C\ h\omega(h, f). \tag{7}$$

Тоді

$$\forall n \qquad \frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{\sqrt{n}} \leqslant C\sqrt{\frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{n\lambda_n}}, \tag{8}$$

а звідси на підставі теореми 1 випливає доведення наслідку.

Теорема 2. *Нехай $f : \mathbb{R}^1 \to B$ – р.м.п. функція обмеженої сильної варіації, B – секвенціально слабо повний простір і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_2(\pi/\lambda_n, f)}{n\lambda_n}} < \infty. \tag{8}$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ – сильно безумовно збіжний.

Доведення. Нехай $x^\star \in B^\star$, де $B^\star$ – спряжений простір. Тоді $x^\star(f) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$ – р.м.п. функція Бора з рядом Фур'є

$$x^\star(f) \sim \sum_n x^\star(A_n) \mathrm{e}^{i\lambda_n t}.$$

З рівності Парсеваля маємо

$$2\sum |x^\star(A_k)|^2 |1 - \cos\lambda_k h|^2 =$$
$$= M\big\{\big|x^\star\big(f(t+h) - f(t)\big)\big|^2\big\} \leqslant M\big\{\big|\big|f(t+h) - f(t)\big|\big|^2\big\}.$$

Міркуючи аналогічно як при доведенні теореми 1, прийдемо до нерівності

$$2\sum_{|k|\geqslant n} |x^\star(A_k)|^2 \leqslant \omega_2^2\big(\pi/\lambda_n, f\big),$$

а далі з нерівностей (6) та (8) і умови (9) маємо

$$\sum_n |x^\star(A_n)| < \infty.$$

З слабої безумовної збіжності ряду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ одержимо його сильну безумовну збіжність ([3] ст. 75).

Теореми 1, 2 та наслідок є узагальненнями ознак абсолютної збіжності Саса і Зігмунда [4] для рядів Фур'є періодичних функцій. Для майже періодичних функцій $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$ вони розглядались у працях Е.А. Бредихіної [5] та Н.П.Купцова [6]. У випадку періодичних функцій $f : \mathbb{R}^1 \to B$ ці результати отримані в праці [7].

1. Притула Я.Г. *О неравенстве Джексона для B^2 - почти периодических функций* // Изв. вузов сер. матем. – 1972. – N 8 (3). – С. 9-13.
2. Притула Я.Г. *Признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций ограниченой вариации* // Укр. мат. журн. – 1981. – Т. 33, N 1. – С. 28-32.
3. Хиллс Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М., Изд. ин. лит., 1962, 829 с.
4. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М., Физ.,мат., 1961.
5. Бредихина Е.А. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций* // Док. АН СССР. – 1968. – Т. 179, N 5. – С. 1023-1026.
6. Купцов Н.П. *Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти периодических функций* // Мат. сб. – 1956. – Т. 40. – С. 157-178.
7. Kandil A.M. *Convergence of Fourier coefficients series for vector valuez functions* // Atti Accad. Naz. dei Lincei. Rend. – 1979. – Vol. 67, N 5. – C. 289-294.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.96

УДК 517.97

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В. А. Козицький

Kozitskiy V. A. On a problem of convex programming. The method of finding of a solution for one problem of convex programming in the space l_2 with the Noether operator in constrains is proposed.

У багатьох випадках розв'язання задач теорії антен [1] і теорії дискретних сигналів [2] зводиться до дослідження нескінченних алгебраїчних систем типу згортки та екстремальних задач для послідовностей. У цій праці запропоновано метод дослідження однієї задачі опуклого програмування. Розглянемо задачу на мінімум для послідовностей.

Нехай $\mathbb{U}$-банахів простір, $\mathbb{U} \subseteq l_2$, $K : \mathbb{U} \to l_2$ – нетерів оператор, $K^* : l_2 \to \mathbb{U}^*$ – спряжений оператор до K. Позначемо через $\alpha = \dim \operatorname{Ker} K$, $\beta = \dim \operatorname{Coker} K = \dim \operatorname{Ker} K^*$, $\operatorname{ind} K = \alpha - \beta$. Нехай задано послідовності $\varphi^i \in l_2$, $i = 0, \ldots, s$; $p, q \in l_2$ та числа $\delta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, s$. Символом $< \cdot, \cdot >$ позначимо скалярний добуток в l_2.

1. Розглянемо задачу відшукання послідовності $u \in \mathbb{U}$, яка задовольняє умови

$$J(u) =< \varphi^0, u >\to \inf, \tag{1}$$

$$J_i(u) =< \varphi^i, u >= \delta_i, \ \ i = 1, \ldots, s, \tag{2}$$

$$p_n \leqslant K(u)_n \leqslant q_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Введемо позначення

$$K(u) = v, \ \ v \in l_2. \tag{4}$$

Рівняння (4) є рівнянням з оператором нетера K. Відомо [3], що коли $< v, \psi^i >= 0$ ($i = 1, \ldots, \beta$), де ψ^i – лінійно незалежні розв'язки рівняння $K^*(\psi) = 0$, то розв'язок рівняння (4) існує і його можна зобразити у вигляді

$$u = Av + \sum_{k=1}^{\alpha} c_k \omega_k, \tag{5}$$

де $A : l_2 \to \mathbb{U}$ – лінійний неперервний оператор; ω_k ($k = 1 \ldots, \alpha$) – лінійно незалежні розв'язки рівняння $K(\omega) = 0$; c_k – довільні дійсні числа.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 49M45.

Підставляючи (5) в (1) і (2), та враховуючи позначення (4), приходимо до еквівалентної задачі опуклого програмування знаходження послідовності $v \in l_2$ і чисел c_k $(k = 1, \dots, \alpha)$ з умов

$$J(v) =< A^* \varphi^0, v > + \sum_{k=1}^{\alpha} c_k < \varphi^i, \omega_k > \to \inf, \tag{6}$$

$$J_i(v) =< A^* \varphi^i, v > + \sum_{k=1}^{\alpha} c_k < \varphi^i, \omega_k > -\delta_i = 0, \ i = 1, \dots, s, \tag{7}$$

$$\tilde{J}_i(v) = < \psi^i, v >= 0, \ i = 1, \dots, \beta, \tag{8}$$

$$p_v \leqslant v_n \leqslant q_n, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

де $A^* : \mathbb{U}^* \to l_2$ – спряжений до A оператор.

Умови екстремума для задач опуклого програмування сформульовані в теоремі Куна-Такера [4, с.76], яка обгрунтовує для цих задач принцип Лагранжа. Ми розглянемо випадок, коли множник Лагранжа $\lambda_0 = 1$. Тоді функція Лагранжа задачі (6)–(9) матиме вигляд

$$L(v, \lambda, \gamma) = J(v) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i J_i(v) + \sum_{i=1}^{\beta} \gamma_i \tilde{J}_i(v).$$

Нехай $\alpha = 0$. Тоді з принципу мінімума

$$\min_{p_n \leqslant v_n \leqslant q_n, \, n \in Z} L(v, \lambda, \gamma) = L(v^*, \lambda, \gamma)$$

випливає, що

$$v_n^*(\lambda, \gamma) = \begin{cases} p_n, \ (A^* \varphi^0 + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i A^* \varphi^i + \sum\limits_{i=1}^{\beta} \gamma_i \psi^i)_n > 0, \\ q_n, \ (A^* \varphi^0 + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i A^* \varphi^i + \sum\limits_{i=1}^{\beta} \gamma_i \psi^i)_n \leqslant 0, \ n \in Z. \end{cases}$$

Знайдену послідовність $v^*(\lambda, \gamma)$ підставляємо в (7) та (8) і знаходимо множники Лагранжа λ_i $(i = 1, \dots, s)$; γ_i $(i = 1, \dots, \beta)$. Якщо множники знайдені, то підставляючи $v^*(\lambda, \gamma)$ в (5), знаходимо розв'язок задачі (1)–(3).

Нехай $\alpha > 0$. Припустимо, що ранг матриці $B = (< \varphi^i, \omega_k >)$ дорівнює α. В іншому випадку задача (1)-(3) не матиме розв'язку. Тоді з (7) знаходимо c_k $(k = 1 \dots, \alpha)$ і підставляємо в (6). Отримана при цьому задача матиме той самий вигляд, що і у випадку $\alpha = 0$.

2. Формулювання задачі. У просторі $\mathbb{U} = \{r, 1\} = \{u_n \in l_2 : r^n u_n \in l_2, \, r \in (0, 1)\}$

знайти послідовність $u = \{u_n\}$ з умов

$$J(u) =< \varphi, u >\to \inf, \tag{10}$$

$$J_i(u) =< \varphi^i, u >= \delta_i, \ \ i = 1, \ldots, s, \tag{11}$$

$$p_n \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} u_k + \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-n-k} u_k \leqslant q_n, \; n = 0, 1, 2, ...,$$

$$p_n \leqslant r^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k} u_k + \mu r^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{-n-k} u_k \leqslant q_n, \; n = -1, -2, ..., \tag{12}$$

де $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm 1\,; a, \{r^n b_n\} \in l_1$; $p, q \in l_2$;

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n L[a_n](t) \neq 0, \;\; b(rt) = L[r^n b_n](t) \neq 0, \;\; |t| = 1,$$

а L – оператор Лорана.

3. Дослідження задачі (10)-(12). Введемо нові невідомі послідов ності $g \in l_2$ і $h \in l_2$, $\{r^n h_n\} \in l_2$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} u_k + \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-n-k} u_k = g_n + \lambda g_{-n}, \; n = 0, 1, 2, ..., \\ &r^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k} u_k + \mu r^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{-n-k} u_k = r^n h_n + \mu r^{-n} h_{-n}, \; n = -1, -2, ... \end{aligned} \tag{13}$$

З системи (13) знайдемо послідовність u через послідовності g, h. За допомогою оператора L та очевидних перетворень, система (13) набере вигляду

$$\begin{aligned} &u(t) + \lambda A(t) u(t^{-1}) = g_\lambda(t), \\ &u(rt) + \mu B(rt) u(rt^{-1}) = h_\mu(rt), \;\; |t| = 1, \end{aligned} \tag{14}$$

де $A(t) = a^{-1}(t) a(t^{-1})$, $B(rt) = b^{-1}(rt) b(rt^{-1}) \in \mathbb{W}(|t| = 1)$; $g_\lambda(t) = a^{-1} L[g_n + \lambda g_{-n}](t)$, $h_\mu(rt) = b^{-1}(rt) L[r^n h_n + \mu r^{-n} h_{-n}](t) \in \mathbb{L}_2(|t| = 1)$, невідома функція $u(t) \in \{\{r, 1\}\}$.

Тут $\{\{r, 1\}\}$ – простір функцій $F(z)$, голоморфних в кільці $r < |z| < 1$, для яких існує стала $c > 0$ така, що для будь-якого $s \in [r, 1]$ виконується нерівність $\int_{-\pi}^{\pi} |F(se^{i\varphi})|^2 \, d\varphi < c$; $\mathbb{W}$ – вінерівський простір функцій $A(t)$, коефіцієнти Лорана a_n яких задовольняють умову $a_n \in l_1$.

Відомо [5], що оператор L встановлює ізоморфізм між просторами $\{r, 1\}$ і $\{\{r, 1\}\}$. Систему (14) будемо розглядати як задачу Карлемана зі зворотним зсувом для області $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ [6]. Системи (13) і (14) еквівалентні, а їх розв'язки зв'язані рівністю

$$u_n = L^{-1}[u(t)]_n = (2\pi i)^{-1} \int_{|t|=1} u(t) t^{-n-1} \, dt, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Легко бачити, що виконуються тотожності:

$$\begin{gathered} A(t^{-1})g_\lambda(t) - \lambda g_\lambda(t^{-1}) \equiv 0, \qquad A(t^{-1})A(t) \equiv 1, \\ B(rt^{-1})h_\mu(rt) - \mu h_\mu(rt^{-1}) \equiv 0, \quad B(rt^{-1})B(rt) \equiv 1, \ |t| = 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Ці тотожності усувають перевизначеність задачі Карлемана.

4. Задача про стрибок. Знайдемо функцію $F(t) \in \{\{r, 1\}\}$ з умови

$$F(t) + \lambda F(t^{-1}) = S_\lambda(t), \ F(rt) + \mu F(rt^{-1}) = M_\mu(rt), \ |t| = 1, \tag{16}$$

де $\lambda = \pm 1$; $\mu = \pm 1$; $S_\lambda(t)$, $M_\mu(rt)$ – відомі функції з $\mathbb{L}_2(|t| = 1)$, які задовольняють умови

$$S_\lambda(t) - \lambda S_\lambda(t^{-1}) \equiv 0, \ M_\mu(rt) - \mu M_\mu(rt^{-1}) \equiv 0, \ |t| = 1. \tag{17}$$

Застосувавши до (16) оператор L^{-1}, отримаємо

$$\begin{gathered} f_n + \lambda f_{-n} = s_n^\lambda, \quad n = 0, 1, \ldots, \\ r^n f_n + \mu r^{-n} f_{-n} = m_n^\mu, \quad n = -1, -2, \ldots. \end{gathered}$$

a) Нехай $\lambda = \mu = 1$. У цьому випадку задача (16) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_{|t|=1} S_1(t) t^{-1}\, dt = \int\limits_{|t|=1} M_1(rt) t^{-1}\, dt, \ \ (s_0^1 = m_0^1). \tag{18}$$

b) Якщо $\lambda = -\mu = \pm 1$, то однорідна задача (16) має тривіальний розв'язок, а неоднорідна задача має безумовний і єдиний розв'язок

$$\begin{gathered} F(t) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{rt}{\tau}\right) M_\mu(r\tau)\tau^{-1}\, d\tau + \\ + (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{t}{\tau}\right) S_\lambda(\tau)\tau^{-1}\, d\tau, \ |t| = 1, \end{gathered} \tag{19}$$

де $\Omega(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{r^{2n} + 1}$ є голоморфною в кільці $D = \{z \in \mathbb{C} : r^2 < |z| < 1\}$ функцією, граничне значення якої є узагальненою функцією. Інтеграл (19) розуміємо як границю

$$\lim_{D \ni z \to t} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{z}{\tau}\right) S(\tau)\tau^{-1}\, d\tau = \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{t}{\tau}\right) S(\tau)\tau^{-1}\, d\tau, \ \ |t| = 1.$$

c) У випадку $\lambda = \mu = -1$ однорідна задача (16) має один лінійно незалежний розв'язок, а неоднорідна задача має безумовний (за рахунок умови (18)) розв'язок.

Розв'язок задачі (16) для випадків **a)** і **c)** має вигляд

$$F(t) = c + (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{rt}{\tau}\right) M_\mu(r\tau)\tau^{-1}\,d\tau - \\ -(2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega\left(\frac{t}{\tau}\right) S_\lambda(\tau)\tau^{-1}\,d\tau, \ \ |t| = 1, \tag{20}$$

де $\Omega(z) = \sum\limits_{n\neq 0} \dfrac{z^n}{r^{2n}-1}$. Для випадку **a)** $2c = s_0^1 = m_0^1$.

Зауважимо, що задачу (16) можна розв'язати в просторі $\mathbb{W}$ і формули (19),(20) залишаться ті самі.

5. Факторизація при нульовому індексі. Нагадаємо, що $A(t) \neq 0$, $B(rt) \neq 0$, $|t| = 1$; $A(t), B(rt) \in \mathbb{W}$. Нехай $\operatorname{ind} A(t) = (2\pi)^{-1}[\arg A(t)]_{|t|=1} = 0$, $\operatorname{ind} B(rt) = 0$, $|t| = 1$. Факторизацію будуємо у вигляді

$$A(t) = X(t)X^{-1}(t^{-1}), \quad B(rt) = X(rt)X^{-1}(rt^{-1}), \ |t| = 1,$$

де $X(z)$ – не дорівнює нулю, голоморфна всередині і неперервна у замкненій області D^+ функція, граничне значення якої належить $\mathbb{W}$. Перейдемо до логарифмів

$$\ln X(t) - \ln X(t^{-1}) = \ln A(t), \ \ln X(rt) - \ln X(rt^{-1}) = \ln B(rt), \ |t| = 1. \tag{21}$$

Відомо [7], що при зроблених припущеннях $\ln A(t), \ln B(rt) \in \mathbb{W}$. Отже, (21) є задачею про стрибок у просторі $\mathbb{W}$. Невідома функція $\ln X(t)$ знаходиться за формулою (20).

6. Факторизація коефіцієнтів при довільному індексі. Нехай $\operatorname{ind} a(t) = \varkappa_1, \operatorname{ind} b(rt) = \varkappa_2$, $|t| = 1$. Тоді $\operatorname{ind} A(t) = -2\varkappa_1$, $\operatorname{ind} B(rt) = -2\varkappa_2$, $\varkappa = -2(\varkappa_1 + \varkappa_2)$, $|t| = 1$, число $z_0 \in D^+$. Функції

$$A_0(t) = A(t)(t - z_0)^{-\varkappa/2}t^{-\varkappa_2}(t^{-1} - z_0)^{\varkappa/2}t^{-\varkappa_2}, \\ B_0(rt) = B(rt)(rt - z_0)^{-\varkappa/2}(rt)^{-\varkappa_2}(rt^{-1} - z_0)^{\varkappa/2}(rt^{-1})^{\varkappa_2}, \ |t| = 1,$$

задовольняють умовам п.5. Отже,

$$A(t) = [(t - z_0)^{\varkappa/2}t^{\varkappa_2}X(t)][(t^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2}t^{-\varkappa_2}X^{-1}(t^{-1})], \\ B(rt) = [(rt - z_0)^{\varkappa/2}(rt)^{\varkappa_2}X(rt)][(rt^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2}(rt^{-1})^{-\varkappa_2})X^{-1}(rt^{-1})]. \tag{22}$$

7. Розв'язування задачі (14). За допомогою факторизації (22) задачу (14) зведемо до вигляду (16). Розглянемо випадки, які можуть виникнути.

A) Нехай $\varkappa \geqslant 0$. Тоді в (16)

$$S_\lambda(t) = (t - z_0)^{-\varkappa/2}[t^{-\varkappa_2}X^{-1}(t)g_\lambda(t) - P_{\varkappa/2-1}(t)] - \lambda(t^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2}P_{\varkappa/2-1}(t^{-1}), \\ M_\mu(rt) = (rt - z_0)^{-\varkappa/2}[(rt)^{-\varkappa_2}X^{-1}(rt)h_\mu(rt) - P_{\varkappa/2-1}(rt)] - \\ -\mu(rt^{-1} - z_0)^{-\varkappa/2}P_{\varkappa/2-1}(rt^{-1}), \ |t| = 1.$$

Якщо $\lambda = \mu = 1$, то задача (14) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова (18). З цієї умови визначається один з коефіцієнтів многочлена $P_{\varkappa/2-1}(t)$ степеня $\varkappa/2-1$. Безумовний розв'язок у $\{\{r,1\}\}$ задачі (14) має вигляд

$$u(t) = (t-z_0)^{\varkappa/2}t^{\varkappa_2}X(t)[F(t) + (t-z_0)^{-\varkappa/2}P_{\varkappa/2-1}(t)],\ |t| = 1, \tag{23}$$

де $F(t)$ визначається формулою (20) (випадок **а)**) і залежить від $\varkappa/2-1$ довільних дійсних сталих.

Якщо $\lambda = -\mu = \pm 1$, то задача (14) має безумовний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (23), де $F(t)$ задається формулою (19), який залежить від $\varkappa/2$ довільних дійсних сталих.

Якщо $\lambda = \mu = -1$, то задача (14) має безумовний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (23), де $F(t)$ задається формулою (20) (випадок **с)**), який залежить від $\varkappa/2+1$ довільних дійсних сталих.

В) Нехай $\varkappa < 0$. Тоді в (14)

$$S_\lambda(t) = (t-z_0)^{-\varkappa/2}t^{-\varkappa_2}X^{-1}(t)g_\lambda(t),$$
$$M_\mu(rt) = (rt-z_0)^{-\varkappa/2}(rt)^{-\varkappa_2}X^{-1}(rt)h_\mu(rt),\ \ |t| = 1.$$

Якщо $\lambda = \mu = 1$, то при виконані $1 - \varkappa/2$ умов

$$s_0^1 = (2\pi i)^{-1}\int\limits_{|t|=1} S_1(t)t^{-1}\,dt = (2\pi i)^{-1}\int\limits_{|t|=1} M_1(rt)t^{-1}\,dt = m_0^1,$$
$$\pi i(s_0^1)^{(j)} + r^j\int\limits_{|t|=1}\Omega^{(j)}\left(\frac{rz_0}{t}\right)M_\mu(rt)t^{-j-1}\,dt- \tag{24}$$
$$-\int\limits_{|t|=1}\Omega^{(j)}\left(\frac{z_0}{t}\right)S_\lambda(t)t^{-j-1}\,dt = 0,\ j = 0,\ldots,\frac{|\varkappa|}{2}-1$$

задача (14) має у $\{\{r,1\}\}$ єдиний розв'язок

$$u(t) = (t-z_0)^{\varkappa/2}t^{\varkappa_2}X(t)F(t),\ |t| = 1, \tag{25}$$

де $F(t)$ задається формулою (20) (випадок а)).

Якщо $\lambda = \mu = \pm 1$, то задача (14) має єдиний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (25), де $F(t)$ задається формулою (19) при виконані $|\varkappa|/2$ умов (24); $s_0^1 = 0$.

У випадку $\lambda = \mu = -1$ задача (14) має єдиний у $\{\{r,1\}\}$ розв'язок (25), де $F(t)$ задається формулою (20) (випадок b)) при виконані $|\varkappa|/2-1$ умов (24), а замість s_0^1 стоїть довільна дійсна стала.

В усіх випадках розв'язок задачі (14) не залежить від довільної точки z_0 (доведення аналогічне доведенню в [6]).

Нехай θ^- – подвоєне число від'ємних значень, яких набувають λ і μ; $K : \{r,1\} \to l_2$ – оператор, визначений лівою частиною системи (13).

Таким чином, справедлива теорема.

Теорема. *Нехай* $a(t) \neq 0$, $b(rt) \neq 0$, $|t| = 1$. *Тоді оператор* $K : \{r, 1\} \to l_2$ *нетерів і* $\alpha = \dim \operatorname{Ker} K = \max\{(\varkappa + \theta^-)/2 - 1; 0\}$, $\beta = \dim \operatorname{Coker} K = \max\{1 - (\varkappa + \theta^-)/2; 0\}$, $\operatorname{ind} K = \alpha - \beta$.

Враховуючи, що системи (13) і (14) еквівалентні, а їх розв'язки зв'язані рівністю

$$u_n = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|t|=1} u(t) t^{-n-1} \, dt, \; n \in \mathbb{Z},$$

де $u(t)$, в залежності від випадку, визначається формулою (23) або (25), отримуємо

$$u_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{n,m} v_m + \sum_{k=0}^{\alpha} c_k \omega_{n,k}, \; n \in \mathbb{Z} \tag{26}$$

і умови розв'язності

$$< v, \psi_k >= 0, \; k = 1, \ldots, \beta. \tag{27}$$

У рівностях (26),(27) $\{w_{n,m}\}$, $\{\omega_{n,k}\}$, $\psi_k \, (k = 1, \ldots, \beta)$ – відомі послідовності, $c_k \, (k = 1 \ldots, \alpha)$ – довільні дійсні сталі,

$$v_m = \begin{cases} g_m^\lambda, & m = 0, 1, 2, ... \\ h_m^\mu, & m = -1, -2, ..., \end{cases}$$

$g_m^\lambda = g_m + \lambda g_{-m}$, $h_m^\mu = r^m h_m + \mu r^{-m} h_{-m}$.
Наприклад, якщо $\alpha = 0$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, то

$$w_{n,m} = \begin{cases} \omega_{n,m}^1 + \omega_{n,-m}^1, & m = 1, 2, ..., \\ \omega_{n,0}^1, & m = 0, \\ \omega_{n,m}^2 - \omega_{n,-m}^2, & m = -1, -2, ..., \end{cases}$$

$$\omega_{n,m}^1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{y_{n-k} A_{k-m}}{r^{2k} + 1}, \; y_n = L^{-1}[t^{\varkappa_2} X(t)]_n,$$

$$A_n = L^{-1}[t^{-\varkappa_2} X^{-1}(t) a^{-1}(t)]_n, \; \omega_{n,m}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^k y_{n-k} B_{k-m}}{r^{2k} + 1},$$

$$B_n = L^{-1}[(rt)^{-\varkappa_2} X^{-1}(rt) b^{-1}(rt)]_n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Далі дослідження задачі (10)-(12) проводиться за схемою п.1.

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свёртки. – М., Наука,1978. – 275 с.

2. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – М., Наука, 1974. – 475 с.

3. Крейн М. Г. *Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов*// Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 13, N 5. – С. 3-120.

4. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегальние уравнения со сдвигом.– М.,Наука,1977. – 448 с.

5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М., Наука,1968. – 511 с.

6. Рабинер Л.,Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.– М.,Мир, 1978. – 448 с.

7. Рогожин В. С. Теория операторов нетера. – Ростов, Изд. Ростовского у-та, 1973. – 81 с.

8. Чаплин А. Ф. *Теория эквидистантных решеток с периодически меняющимися параметрами излучателей* //Сб. "Волны и дифракция". – 1981. – С. 105-110.

Стаття надійшла до редколегії 9.02.94

УДК 515.12

КОНСТРУКЦІЯ ГАРТМАНА-МИЦЄЛЬСЬКОГО В КАТЕГОРІЇ k_ω-ПРОСТОРІВ

Є. Я. Пенцак

Pentsak E. Y. Hartman-Mycielski construction in the category of k_ω-spaces. For a k_ω-space X we endow the Hartman-Mycielski construction $HM(X)$ with a k_ω-topology. This topology is described completely for certain "nice" strongly countable dimensional k_ω-spaces.

1. Нехай (X,d) - метричний компакт і $n \in \mathbb{N}$. Через $HM_n(X)$ позначимо множину відображень $\alpha : [0;1] \to X$, що задовольняють умову: існує розбиття $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1$ відрізка $[0;1]$ таке, що α є сталою на кожному з півінтервалів $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, i-1$. Множину $HM_n(X)$ наділямо метрикою $\widehat{d}$: $\widehat{d}(\alpha,\beta) = \int_0^1 d(\alpha(t),\beta(t))dt$. Зауважимо, що такий вигляд метрики дозволяє ігнорувати значення відображення α на скінченній підмножині відрізка $[0;1]$.

Простір $HM(X) = \cup_{n=1}^{\infty} HM_n(X)$ фактично введений Гартманом і Мицєльським в [1] і застосований до задачі вкладення топологічних груп у зв'язні топологічні групи.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через Δ^n n-вимірний симплекс

$$\Delta^n = \left\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \lambda_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n+1, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що відображення $q_n : \Delta^{n-1} \times X^n \to HM_n(X)$, визначене умовою $q_n((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (x_1, \ldots, x_n))(t) = x_i$, якщо $i = \min\{j | t \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j\}$, є неперервним і сюр'єктивним. Звідси випливає, що $HM_n(X)$ є метризовним компактом і що топологія на $HM_n(X)$ не залежить від конкретного вибору сумісної метрики на X.

Для кожного неперервного відображення $f : X \to Y$, де X, Y - метризовні компакти, означимо відображення $HM_n(f) : HM_n(X) \to HM_n(Y)$ формулою $HM_n(f)(\alpha) = f \circ \alpha$. Очевидно, що HM_n є функтором в категорії $MComp$ метризовних компактів.

Надалі ми використовуватимемо термінологію теорії функторів у топологічних категоріях з [2].

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54B30; Secondary 54F45.

Твердження 1. *HM_n є неперервним мономорфним функтором степеня n, що зберігає перетини.*

Доведення. Властивості мономорфності та збереження перетинів перевіряються безпосередньо; ці властивості дають змогу означити для функтора HM_n поняття носія supp. За означенням, для кожного $\alpha \in HM_n(X)$ маємо $\mathrm{supp}(\alpha) = \{x \in X|\alpha^{-1}(x)$ містить невироджений півінтервал $\}$. Очевидно, що $|\mathrm{supp}(\alpha)| \leqslant n$ для кожного α, а тому степінь функтора HM_n дорівнює n.

Неперервність функтора HM_n може бути перевірена стандартними міркуваннями.

Твердження 2. *Для кожного метризовного ANR-компакта (відповідно, AR-компакта) X простір $HM_n(X)$ є ANR-компактом (відповідно, AR-компактом).*

Доведення. Доведення випливає з загального результату В.Басманова [3] про збереження функторами класів $A(N)R$-компактів, твердження 1 і з того факту, що $HM_n(n) \in ANR$ (останній факт є наслідком того, що $HM_n(n)$ є CW-комплексом).

Нагадаємо, що метричний простір називається зліченновимірним, якщо він є об'єднанням зліченної сім'ї скінченновимірних підпросторів.

Твердження 3. *Функтор HM_n зберігає клас зліченновимірних метризовних компактів.*

Доведення. Нехай X - зліченновимірний метричний компакт, $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, де всі X_i є скінченновимірними просторами та $X_1 \subset X_2 \subset \dots$. Для кожного $i \in \mathbb{N}$ нехай

$$\Delta_i^n = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \Delta^n | \lambda_j \geqslant \frac{1}{i} \text{ для всіх } j = 1, \dots, n+1\right\}.$$

Легко бачити, що відображення $q_n|\Delta_i^{n-1} \times X_j^n$ є вкладенням для кожних $i, j \in \mathbb{N}$, а тому $HM_n(X) = \cup_{k=1}^{n} \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} q_k(\Delta_i^{k-1} \times X_j^n)$ – зліченновимірний простір.

2. Нехай $X = \varinjlim X_i$, де X_i – метричні компакти. Приймемо $HM_\infty(X) = \varinjlim HM_i(X_i)$. Легко бачити, що топологія простору $HM_\infty(X)$ не залежить від конкретного вибору послідовності $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X$. Простір $HM_\infty(X)$ називатимемо модифікованою конструкцією Гартмана-Мицельського.

Ми використовуємо стандартне позначення ind для трансфінітного розширення вимірності Менгера-Урисона (див. [4]). Нехай $\mathcal{C}(\alpha) = \{X -$ метризовний компакт, $\mathrm{ind}\, X < \alpha\}$ і $\mathcal{C}(\alpha)^\infty = \{X = \varinjlim X_i \mid X_1 \subset X_2 \subset \dots$ і $X_i \in \mathcal{C}(\alpha)$ для всіх $i\}$. Простір $X \in \mathcal{C}(\alpha)^\infty$ називається сильно $\mathcal{C}(\alpha)$- універсальним, якщо для кожної пари (A, B), де $A \in \mathcal{C}(\alpha)$, і кожного вкладення $f : B \to X$ існує вкладення $g : A \to X$ таке, що $g|B = f$.

Автор довів, що для кожного зліченного ординала β існує зліченний ординал $\alpha \geqslant \beta$ і сильно $\mathcal{C}(\alpha)$-універсальний простір I_α; нижче ми будемо використовувати властивості простору I_α, доведені в [5].

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема. *Простір $HM_\infty(I_\alpha)$ є гомеоморфний I_α.*

Доведення. Нагадаємо, що $\mathrm{ind}\, X$ означене для метричного компакта X, якщо і тільки якщо X є зліченновимірним [4]. Тому з твердження 3 і властивостей простору I_α випливає, що $HM_\infty(I_\alpha) \in \mathcal{C}(\alpha)^\infty$. Нам залишається довести сильну $\mathcal{C}(\alpha)$-універсальність простору $HM_\infty(I_\alpha)$.

Зауважимо, що $I_\alpha = \varinjlim X_i$, де $X_i \in \mathcal{C}(\alpha)$ і $X_i \in AR$. Нехай $B \subset A$, $A, B \in \mathcal{C}(\alpha)$ і $f : B \to HM_\infty(I_\alpha)$ - вкладення. Оскільки $HM_n(X_n)$ є стягуваний ANR в $HM_{2n}(X_n) \in$ $HM_{2n}(X_{2n})$; відповідне стягування $Q : HM_n(X_n) \times HM_n(X_n) \to HM_{2n}(X_n)$ можна задати формулою

$$Q(f,g)(t)(x) = \begin{cases} g(x), & \text{якщо } x < t, \\ f(x), & \text{якщо } x \geqslant t, \end{cases}$$

то кожне відображення $f : B \to HM_n(X_n)$ можна неперервно продовжити до відображення $g : A \to HM_{2n}(X_{2n})$, де B є замкненою підмножиною метризовного простору A (див. [6]). А отже, $HM_\infty(I_\alpha) \in AE$. Нехай тепер $\overline{f} : A \to HM_\infty(I_\alpha)$ - неперервне продовження відображення f. За компактністю простору A маємо $\overline{f}(A) \subset HM_n(X_n)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Нехай $i : A \to X_m$ - таке вкладення, що $i(A) \subset X_m \backslash X_n$ для деякого $m > n$.

Існує неперервна функція $\phi : A \to [0;1]$, для якої $\phi^{-1}(0) = B$. Означимо відображення $F : A \to HM_\infty(I_\alpha)$ формулою :

$$F(a)(t) = \begin{cases} i(a), & \text{якщо } t > \phi(a), \\ \overline{f}(a)(t), & \text{якщо } t \leqslant \phi(a). \end{cases}$$

Легко бачити, що відображення F є вкладенням і $F|B = f$.

Функторіальність конструкції HM_∞ дозволяє сформулювати наступну задачу: чи відображення $HM_\infty(pr_1)$ гомеоморфне pr_1 (через pr_1 позначено відображення проектування простору $I_\alpha \times I_\alpha$ на перший співмножник) ?

1. Hartman S., Mycielski J. *On the embedding of topological groups into connected topological groups*// Colloq. Math. – 1958. – Vol.5. – P. 166-169.
2. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад у категорії компактів.– К., ІСДО, 1993.
3. Басманов В.Н. *Ковариантные функторы, ретракты и размерность*// Докл. Акад. Наук СССР. – 1983. – Т.271. – С. 1033-1036.
4. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М., Наука, 1973.
5. Pentsak E., Zarichnyi M. *On strongly universal k_ω-spaces related to transfinite inductive and cohomological dimension*// Methods Func. Anal. Top. – 1996. – Vol. 3.
6. Борсук К. Теория ретрактов. - М., Мир , 1971.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.96

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ ПЛОСКИХ ТІЛ НЕПРЯМИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

І. І. Дияк, Ю. А. Кухарчук, Г. Т. Сулим

Dyyak I. I., Kuharchuk Y. A., Sulym G. T. The investigation of a plane body elastic equilibrium by the indirect boundary element method. The computer program of the indirect boundary element method realization for solving boundary integral equations of plane linear elastostatic problem is designed. The method of forked nodes for investigation of stress-strain state of plane bodies with angular points are used. The problem of calculation of singular integrals at the forked nodes is discussed. The numerical results obtained by computer program based at the collocation and Galerkin approximations are compared.

Метою даної праці є чисельна реалізація на ЕОМ непрямого методу граничних елементів для розв'язування граничних інтегральних рівнянь двовимірної задачі лінійної теорії пружності. Дано порівняння результатів роботи програм написаних на мові PASCAL, які реалізують МГЕ на основі методів Бубнова-Гальоркіна і колокацій.

Розглянуто задачу про плоску деформацію ізотропного однорідного пружного тіла з поперечним перерізом $S \subset R^2$. Напружено-деформований стан тіла в області S описується співвідношеннями лінійної теорії пружності в переміщеннях [1]

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \psi_i = 0, \qquad i,j = 1,2.$$

Тут u_1 і u_2 – компоненти вектора переміщення точок тіла в декартовій системі координат x_1, x_2 ; ψ_1, ψ_2 – компоненти вектора масових сил; λ і μ - сталі Ляме, що пов'язані з модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона ν співвідношеннями $\lambda = E\nu/\left((1+\nu)(1-2\nu)\right)$, $\mu = E/\left(2(1+\nu)\right)$.

До розв'язування задач теорії пружності широко застосовуються прямий, непрямий методи граничних елементів (ПМГЕ, НМГЕ) [2,3] та метод гіперсингулярних елементів [4]. Перші два підходи базуються на використанні фундаментального розв'язку $G_{ij}(\vec{x},\vec{\xi}) =$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 65M60.

$C_1\left(C_2\delta_{ij}\ln(r) - y_iy_j/r^2\right) + A_{ij}$ диференціальних рівнянь Ляме, який визначає поле переміщень $\vec{u}$ в точці $\vec{x} = (x_1, x_2)$ від одиничної зосередженої сили $\vec{e} = (e_1, e_2)$, прикладеної у точці $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ [2]

$$u_i(\vec{x}) = G_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi})e_j(\vec{\xi}), \qquad i, j = 1, 2, \tag{1}$$

де $C_1 = -1/\left(8\pi\mu(1-\nu)\right)$, $C_2 = 3 - 4\nu$, $\vec{r} = \vec{x} - \vec{\xi}$, $r^2 = r_kr_k$, A_{ij} – компоненти довільного сталого тензора $\hat{A}$, які можна визначити з умови рівності нулю переміщень у деякій обраній точці $\vec{r}_0$.

Тоді компоненти вектора напружень, тензорів напружень і деформацій мають вигляд [2]:

$$\begin{gathered} t_i(\vec{x}) = \sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = F_{ik}(\vec{x}, \vec{\xi})e_k(\vec{\xi}), \\ \varepsilon_{ij}(\vec{x}) = B_{ijk}(\vec{x}, \vec{\xi})e_k(\vec{\xi}), \quad \sigma_{ij}(\vec{x}) = T_{ijk}(\vec{x}, \vec{\xi})e_k(\vec{\xi}), \qquad i, j, k = 1, 2. \end{gathered} \tag{2}$$

Нормальні і дотичні компоненти векторів переміщення і напруження в точці $\vec{x}$ площинки з нормаллю $\vec{n}(\vec{x}) = (n_1(\vec{x}), n_2(\vec{x}))$ і дотичною $\vec{\tau}(\vec{x}) = (\tau_1(\vec{x}), \tau_2(\vec{x})) = (-n_2(\vec{x}), n_1(\vec{x}))$

$$\begin{gathered} u_n(\vec{x}) = G_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi})e_j(\vec{\xi}), \quad u_\tau(\vec{x}) = G_{\tau j}(\vec{x}, \vec{\xi})e_j(\vec{\xi}), \\ t_n(\vec{x}) = F_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi})e_j(\vec{\xi}), \quad t_\tau(\vec{x}) = F_{\tau j}(\vec{x}, \vec{\xi})e_j(\vec{\xi}), \quad j = 1, 2, \end{gathered} \tag{3}$$

де

$$\begin{gathered} G_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi}) = C_1\left(C_2n_j\ln(r) - r_j(n_ir_i)/r^2\right) + A_{nj}, \\ G_{\tau j}(\vec{x}, \vec{\xi}) = C_1\left(C_2\tau_j\ln(r) - r_j(\tau_ir_i)/r^2\right) + A_{\tau_j}, \\ F_{nj}(\vec{x}, \vec{\xi}) = C_3/r^2\left(2(C_4n_j + r_j(n_ir_i)/r^2\right)n_ir_i, \\ F_{\tau_j}(\vec{x}, \vec{\xi}) = C_3/r^2\left(C_4n_j(\tau_ir_i) + (C_4\tau_j + 2r_j(\tau_ir_i)/r^2)\right)n_ir_i. \end{gathered}$$

Компоненти векторів змiщень $\vec{u}$ і напружень в довільній внутрішній точці $\vec{x}$, зумовлених дією поверхневих $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ і відомого розподілу об'ємних сил $\vec{\psi}(\vec{z})$, отримують згорткою

$$\begin{gathered} u_i(\vec{x}) = \int\limits_L G_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi})\varphi(\vec{\xi})dL(\vec{\xi}) + \int\limits_S G_{ij}(\vec{x}, \vec{z})\psi(\vec{z})dS(\vec{z}) + C_i, \\ t_i(\vec{x}) = \int\limits_L F_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi})\varphi(\vec{\xi})dL(\vec{\xi}) + \int\limits_S F_{ij}(\vec{x}, \vec{z})\psi(\vec{z})dS(\vec{z}), \quad i, j = 1, 2. \end{gathered} \tag{4}$$

Трансляційну складову C_i визначають компоненти тензора $\hat{A}$. Аналогічні вирази справедливі для тензорів $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\sigma}$ і вектора напружень $\vec{t}$. Побудовані вирази задовольняють у S умовам рівноваги, сумісності і єдиності [2].

Важливо відзначити, що функції G_{ij}, G_{nj}, $G_{\tau j}$, B_{ijk}, T_{ijk}, F_{ik}, F_{nk} і $F_{\tau j}$ є сингулярними у точці $\vec{x} = \vec{\xi}$ (перші три мають логарифмічну $\ln\vec{r}$, а інші – сильну особливість $1/r$). Інтеграли, що містять G_{ij}, G_{nj}, $G_{\tau j}$, існують як невластиві, а для інтегралів від функцій із сильною особливістю слід окремо вказати метод обчислення їхніх граничних значень під час $\vec{x} \to \vec{\xi}$.

З прямуванням $\vec{x}$ до поверхні L тіла, переміщення (4) змінюються неперервно. Однак вектор напружень $\vec{t}_n$ і тензори $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ на L у строгому розумінні не визначені. Використовуючи методи теорії потенціалу [3], отримаємо

$$
\begin{gathered}
u_i(\vec{x}_0) = \int\limits_L G_{ij}(\vec{x}_0, \vec{\xi})\varphi_j(\vec{\xi})dL(\vec{\xi}) + \int\limits_S G_{ij}(\vec{x}_0, \vec{z})\psi_j(\vec{z})dS(\vec{z}) + C_i, \\
t_i(\vec{x}_0) = \pm\mu_{ij}\varphi_j(\vec{x}_0) + v.p.\int\limits_L F_{ij}(\vec{x}_0, \vec{\xi})\varphi_j(\vec{\xi})dL(\vec{\xi}) + \int\limits_S G_{ij}(\vec{x}_0, \vec{z})\psi_j(\vec{z})dS(\vec{z}), \\
\mu_{11} = -C_3(C_4+1)\theta - C_3\sin(2\theta)/2, \quad \mu_{22} = -C_3(C_4+1)\theta + C_3\sin(2\theta)/2, \\
\mu_{12} = \mu_{21} = C_3\left(\cos(2\theta) - 1\right)/2.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Тут θ – зовнішній кут між односторонніми дотичними в точці $\vec{x}_0$. Зокрема, якщо у $\vec{x}_0$ границя гладка, то $\theta = \pi$ і $\mu_{11} = \mu_{22} = 1/2$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$. Знак обирається залежно від типу задачі (внутрішня (+) чи зовнішня (−)).

При заданих граничних умовах вирази (5) породжують систему сингулярних інтегральних рівнянь.

Загалом, за ненульових об'ємних сил область інтегрування S розбивають на підобласті (елементи). Однак інтегрування по S не впливає на розмір визначальної системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) НМГЕ, хоча і вимагає певного часу. Проте у випадках гравітаційного, відцентрового навантаження, зумовленого обертанням довкола нерухомої осі можна за допомогою формули Гаусса-Остроградського замінити інтеграл по S еквівалентним граничним інтегралом [5–7].

Подекуди вдається підібрати частковий розв'язок, що відповідає заданим об'ємним силам, скажімо, у вигляді полінома [8]. Тому надалі для більшої стислості викладу масові сили не враховуємо.

Для обчислення криволінійних інтегралів лінію L розіб'ємо точками множини $X_1 = \left\{\vec{x}^{\,i,1} : i = 1\ldots N\right\}$ на N дуг L_i (граничних елементів) $L = \cup_{i=1}^N L_i$. Нерегулярні точки границі (кутові, стрибкової зміни умов навантаження та типу граничних умов) не можуть бути внутрішніми точками граничних елементів. На i-му елементі оберемо n вузлових точок $\vec{x}^{i,p}$ $(p = 1\ldots n)$, які занумеровані в напрямку обходу кривої L, причому $x_j^{i,n} = x_j^{i+1,1}$ $(n = 1\ldots N-1)$, $x_j^{N,n} = x_j^{1,1}$. Множину всіх вузлових точок кривої L позначимо X. Криві L_i та L апроксимуються за допомогою параметрично заданих дуги $\tilde{L}_i$ та кривої $\tilde{L}$ відповідно

$$
L_i \sim \tilde{L}_i = \left\{(\xi_1^i, \xi_2^i) : \xi_j^i(t) = \sum_{p=1}^{N} x_j^{i,p} N^p(t), \quad t \in [-1,1]\right\}, \quad L \sim \tilde{L} = \bigcup_{i=1}^{N} L_i, \tag{6}
$$

де $\{N^p(t)\}$ – многочлени Лагранжа, визначені на відрізку $[-1,1]$.

Елемент $d\tilde{L}_i(t)$ дуги $\tilde{L}$ визначає формула

$$
dL_i\left(\vec{\xi}(t)\right) = \sqrt{\xi_j^{i\prime}(t)\xi_j^{i\prime}(t)}dt = J_i(t)dt, \quad \xi_j^{i\prime}(t) = \sum_{p=1}^{N} x_j^{i,p} N^{p\prime}(t), \tag{7}
$$

і з урахованням (6),(7), співвідношення (5) набудуть вигляду

$$
\begin{gathered}
u_i\left(\vec{x}_0\right) = \sum_{q=1}^{N}\int\limits_{-1}^{1} G_{ij}\left(\vec{x}_0, \vec{\xi}^q(t)\right)\varphi_j\left(\vec{\xi}^q(t)\right)J_q(t)dt, \\
t_i\left(\vec{x}_0\right) = \pm\mu_{ij}\varphi_j\left(\vec{x}_0\right) + \sum_{q=1}^{N}\int\limits_{-1}^{1} F_{ij}\left(\vec{x}_0, \vec{\xi}^q(t)\right)\varphi_j\left(\vec{\xi}^q(t)\right)J_q(t)dt, \\
\vec{\xi}^q(t) \in L_q, \quad t \in [-1,1].
\end{gathered} \tag{8}
$$

Для дискретного подання граничних інтегральних рівнянь (8) апроксимуємо невідому функцію $\varphi_i(\vec{\xi})$ на елементі L_q функцією

$$\tilde{\varphi}_i\left(\vec{\xi}^q(t)\right) = \sum_{l=1}^{N}\sum_{p=1}^{n}\varphi_i^{l,p}N^p(t)\delta_{ql} = \sum_{p=1}^{n}\varphi_i^{q,p}N^p(t), \quad \varphi_i^{q,p} = \varphi_i(\vec{x}^{\,q,p}). \tag{9}$$

Якщо остання точка $\vec{x}^{\,q,n}$, $q = 1\ldots N$ елементу є регулярною, то

$$\varphi_i^{q,n} = \varphi_i^{q+1,1} \tag{10}$$

(надалі вважаємо, що $\vec{\varphi}^{N+1,p} \sim \vec{\varphi}^{1,p}$).

Підставляючи вирази (9) в рівняння (8), одержимо вирази для їхніх нев'язок

$$r_i^u\left(\vec{x}_0(t)\right) = \sum_{q=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1} G_{ij}\left(\vec{x}_0, \vec{\xi}^q(t)\right)\varphi_j^{q,k}N^k(t)J_q(t)dt - u_i(\vec{x}_0(t)),$$
$$r_i^t\left(\vec{x}_0(t)\right) = \pm\mu_{ik}\varphi_k\left(\vec{x}_0(t)\right) + \sum_{q=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1} F_{ij}\left(\vec{x}_0, \vec{\xi}^q(t)\right)\varphi_j^{q,k}N^k(t)J_q(t)dt - t_i(\vec{x}_0(t)).$$

Найчастіше інтегральні рівняння розв'язують методом точкової коллокації, вимагаючи їх справдження на певній множині точок. Стосовно рівнянь (8) нею буде множина X. Це рівносильне умові $r_i^u\left(\vec{x}^{\,p,r}\right) = 0$, $r_i^t\left(\vec{x}^{\,p,r}\right) = 0$ $(p = 1\ldots N, \quad r = 1\ldots n)$, яка з урахуванням (10) дає СЛАР

$$\begin{gathered}
\sum_{q=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j^{q,k}\int_{-1}^{1} G_{ij}(\vec{x}^{\,p,r}, \vec{\xi}^q(t))N^k(t)J_q(t)dt - u_i(\vec{x}^{\,p,r}) = 0,\\
\pm\mu_{ik}\varphi_k\left(\vec{x}^{\,p,r}\right) + \sum_{q=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j^{q,k}\int_{-1}^{1} F_{ij}\left(\vec{x}^{\,p,r}, \vec{\xi}^q(t)\right)N^k(t)J_q(t)dt - t_i(\vec{x}^{\,p,r}) = 0,\\
\varphi_i^{q,n} = \varphi_i^{q+1,1} \quad \text{якщо } x^{q,n} - \text{регулярна} \quad q = 1\ldots N
\end{gathered} \tag{11}$$

Застосування до системи (8) процедури Бубнова-Гальоркіна [9] породжує іншу СЛАР

$$\begin{gathered}
\sum_{q=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j^{q,k}\int_{-1}^{1} N^r(\eta)\int_{-1}^{1} G_{ij}(\vec{x}^{\,p}(\eta), \vec{\xi}^q(t))N^k(t)J_q(t)J_p(\eta)dtd\eta -\\
-\int_{-1}^{1} N^r(\eta)u_i(\vec{x}^{\,p}(\eta))J_p(\eta)d\eta = 0,\\
\pm\int_{-1}^{1} N^r(\eta)\mu_{ik}\varphi_k(\vec{x}^{\,p}(\eta))J_p(\eta)d\eta + \sum_{q=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j^{q,k}\int_{-1}^{1} N^r(\eta)\int_{-1}^{1} F_{ij}(\vec{x}^{\,p}(\eta), \vec{\xi}^q(t))\times\\
\times N^k(t)J_q(t)J_p(\eta)dtd\eta - \int_{-1}^{1} N^r(\eta)t_i\left(\vec{x}^{\,p}(\eta)\right)J_p(\eta)d\eta = 0,\\
\varphi_i^{q,n} = \varphi_i^{q+1,1} \quad \text{якщо } x^{q,n} - \text{регулярна} \quad q = 1\ldots N.
\end{gathered} \tag{12}$$

Всі граничні інтеграли, потрібні для обчислення коефіцієнтів позадіагональних блоків матриць СЛАР (11) чи (12) обчислюють за стандартними формулами чисельного інтегрування. У діагональних блоках матриць точка спостереження належить проміжку інтегрування, тому всі вони містять сингулярні інтеграли. Для їх обчислення застосуємо два способи: з виділенням особливості і без нього. В обох випадках наприкінці використовуються стандартні квадратурні формули Гаусса. Інтеграли зі слабкою (типу $\ln(r)$) особливістю, які містять перші групи рівнянь (11),(12) можна обчислювати за допомогою формул Гаусса, поділивши дугу S_i особливою точкою (якщо точка не збігається з її кінцями) на дві.

Замінивши інтегрування по дузі $\tilde{L}_p$ інтегрування по параметру t, обчислення інтегралів

$$I_{ij}^{plm} \equiv \int\limits_{L_p} F_{ij}(\vec{x}^{p,m}, \vec{\xi}) N^l dL(\xi) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)dt, \quad f(t) = F_{ij}\left(\vec{x}^{p,m}, \vec{\xi}^p(t)\right) N^l(t) J_p(t)$$

проводиться аналогічно, оскільки при введеній параметризації $N^m(t_l) = 0$ $(m \neq l)$, і підінтегральна функція обмежена на відрізку $[-1, 1]$.

Якщо ж $m = l$, то $N^m(t_m) = 1$ і інтеграл I_{ij}^{pmm} існує лише в сенсі головного значення. Тоді вважатимемо вузол $\vec{x}^{p,m} = \vec{\xi}^m(t_m)$ регулярною внутрішньою точкою L. Якщо він є на межі дуг, то для для їхнього об'єднання цей вузол стане внутрішнім. У цьому випадку $\tilde{L}_p \sim \tilde{L}_p \cup \tilde{L}_{p+1}$ або $\tilde{L}_p \sim \tilde{L}_{p-1} \cup \tilde{L}_p$ і параметризація дуги відповідно змінюється. Тепер

$$I_{ij}^{pmm} \equiv v.p. \int\limits_{-1}^{1} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{t_m-\varepsilon} f(t)dt + \int\limits_{t_m+\varepsilon}^{1} f(t)dt + v.p. \int\limits_{t_m-\varepsilon}^{t_m+\varepsilon} f(t)dt \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Перший і другий інтеграли I_1, I_2 не містять особливості і можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул.

Для обчислення I_3 підінтегральну функцію в околі точки t_m подамо у вигляді $f(t) = g(t)/(t - t_m)$, коли g гладка в околі точки t_m функція, властивості якої повністю залежать від геометрії кривої L_p в околі (можливо проколотому) точки t_m і від властивостей функцій $\{N^l\}$. Якщо розвинути її в околі точки t_m в ряд Тейлора $g(t) = g(t_m) + g'(t_m)(t - t_m) + O\left((t - t_m)^2\right)$, то

$$I_3 = 2\varepsilon g'(t_m) + O(\varepsilon^2).$$

Тому для достатньо малого ε можна вважати, що

$$I_{ij}^{pmm} \equiv v.p. \int\limits_{-1}^{1} f(t)dt \approx \int\limits_{-1}^{t_m-\varepsilon} f(t)dt + \int\limits_{t_m+\varepsilon}^{1} f(t)dt.$$

Коли вузол $\vec{x}^{p,m}$, $m = n$ $(m = 1)$ є нерегулярним, то згідно з методикою подвоєння вузлів [3] вважаємо, що $\varphi_j^{p,n} \neq \varphi_j^{p+1,1}$. Інтегрування здійснюємо так, ніби межа області в його околі є гладкою (хоча це може бути і кутова точка). Тоді можна вважати, що

$$I_{ij}^{pnn} \approx \int\limits_{-1+\varepsilon}^{1} F_{ij}\left(\vec{x}^{p,n}, \vec{\xi}^p(t)\right) N^n(t) J_p(t)dt,$$

де ε достатньо мале число.

Вищеописаний алгоритм реалізований у вигляді програмного комплексу для ПЕОМ типу IBM PC/AT на Турбо Паскалі і апробований на низці прикладів.

Розглянемо плоску деформацію жорстко защемленого по $AD = a$ та рівномірно навантаженого по $AB = 2a$ нескінченного в напрямку осі Ox_3 бруса прямокутного перерізу (рис.1a). Коефіцієнт Пуассона матеріалу $\nu = 0.3$. Граничні умови у даному випадку записуються:

$$t_n|_{AB} = -p, \quad t_n|_{BCD} = 0, \quad t_\tau|_{BCD} = 0, \quad u_n|_{AB} = 0, u_\tau|_{AB} = 0.$$

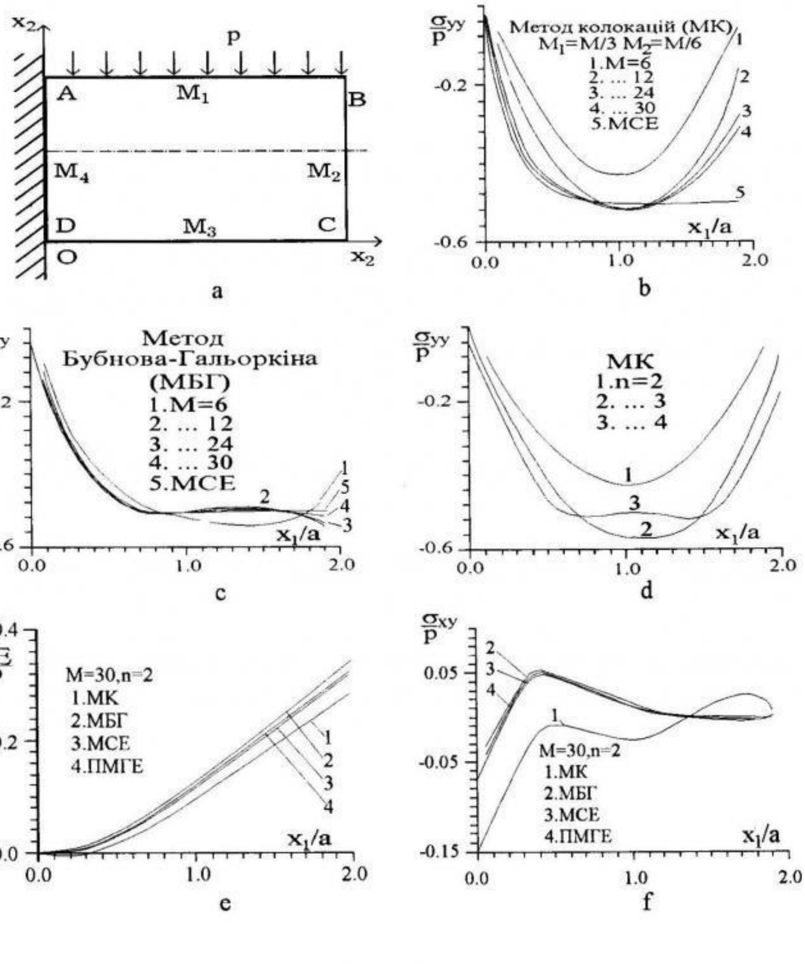


Рис. 1

Напружено-деформований стан тіла досліджуємо НМГЕ на основі методів Бубнова-Гальоркіна (МБГ) та колокацій (МК), ізопараметричних лінійних, квадратичних та кубічних апроксимацій. Зовнішні та внутрішні інтеграли МБГ обчислюються квадратурними формулами 10-го та 3-го порядків відповідно.

Збіжність застосованих методик залежно від кількості M граничних елементів (ГЕ) та порядку використаних апроксимацій ілюструють рис.1b-1d.

На рис.1b,c зображена зміна $\sigma_{yy}(x_1, a/2)/p$ уздовж осі балки, отримана з використанням МК (рис.1b) та МБГ (рис.1c) за різних значень M, що визначається кількістю елементів $M_1 = M/3$ на кожній із сторін AB, CD та $M_2 = M/6$ на сторонах AD та BC. Крива 5 відповідає МСЕ-розв'язку з вибором ізопараметричних апроксимацій на чотирикутних елементах з вісьмома вузлами на сітці 4×10. Зі збільшенням кількості ГЕ розв'язок МГЕ швидко наближається до розв'зку МСЕ. Помітно, що МБГ-розв'язок збігається швидше ніж МК-розв'язок.

На рис.1d зіставлені значення $\sigma_{yy}(x_1, a/2)/p$, отримані при $M = 6$ (2×1) за різного порядку $n - 1$ використовуваних апроксимацій. Згідно з рис.1b і 1d, збільшення n є ефективнішим від збільшення кількості M граничних елементів.

Рисунки 1e і 1f стосуються зміни u_x/a і σ_{xx}/p на осі балки, отримані за МБГ-розв'зком (крива 1) і МК-розв'язком (крива 2) за $M = 30$. Для порівняння зображені МСЕ-розв'язки (крива 3) та ПМГЕ-розв'язок на підставі МБГ за лінійних ізопараметричних апроксимацій та порядку квадратурних формул Гаусса під час обчислення внутрішніх інтегралів – 10, зовнішніх – 3.

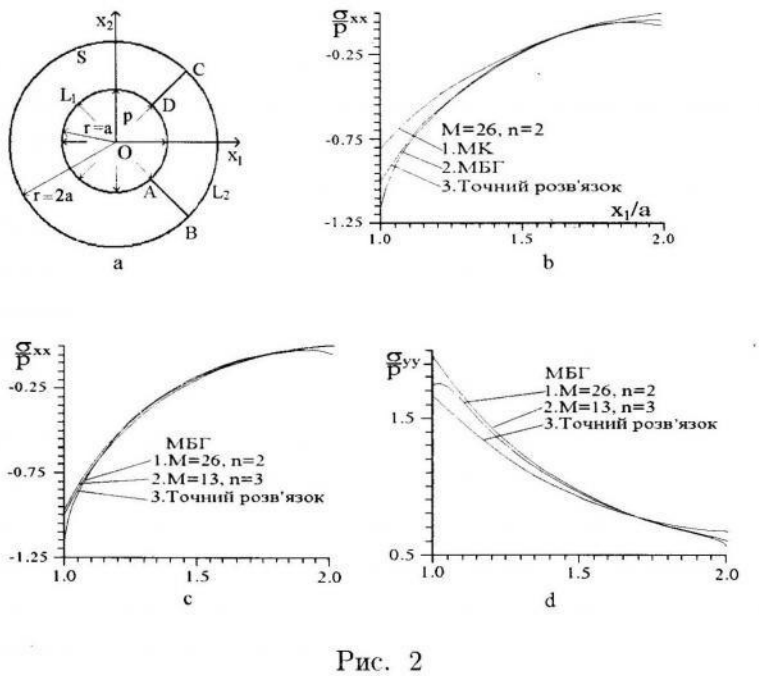


Рис. 2

Помітно, що результати, отримані МСЕ, ПМГЕ і НМГЕ з використанням МБГ досить добре узгоджуються і є близькими до реальних. Дещо гірший результат дає НМГЕ з використанням МК. Загалом, МБГ дає кращі результати, ніж метод точкової колокації. Другий приклад для задачі Ляме – визначення напружено-деформованого стану циліндра (рис.2a) під дією тиску p. Зовнішня поверхня L_2 циліндра вільна від навантаження.

Коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Граничні умови задачі:

$$t_n|_{L_1} = -p, \quad t_n|_{L_2} = 0, \quad t_\tau|_{L_1 \cup L_2} = 0.$$

Задача розв'язувалась НМГЕ за допомогою МБГ і МК з використанням ізопараметричних апроксимацій першого (n=2) і другого (n=3) порядків. За область дослідження вибрана частина ABCD кільця.

На рис. 2b зображені значення σ_{xx}/p, отримані за допомогою МБГ (крива 2) і МК (крива 1) з використанням 26-ти граничних елементів (по 4 на AB і DC, 6 на AD і 12 на CB) при $n = 2$. Помітно, що МБГ дає результати ближчі до точних [1] (криві 3), ніж МК.

На рис.,2c,d криві 1 відповідають розв'язкам, отриманим при $n = 2$ і 26-ти граничних елементах; криві 2 – при $n = 3$ і 13-ти елементах; криві 3 – графік точного розв'язку. Обидва наближені розв'язки дуже добре узгоджуються з точним.
Як і у випадку бруса для методу колокацій (рис. 1b,c) підвищення порядку апроксимації є ефективнішим від збільшення кількості граничних елементів. Схему НМГЕ застосуємо також до розв'язування задачі про напружено-деформований стан тонкої квадратної пластинки з еліптичним вирізом, яка перебуває під дією рівномірно розподілених розтягуючих зусилль інтенсивності p (рис.3). Відповідні граничні умови запишемо: $t_n|_{A'B \cup D'C} = p, \quad t_n|_{DA' \cup BC} = 0, t_\tau|_{L_2} = 0.$

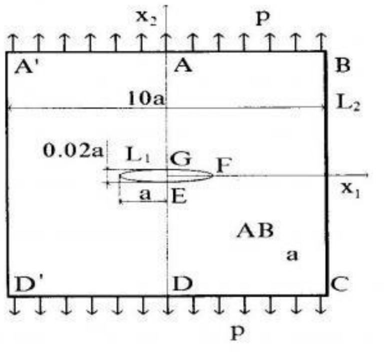


Рис. 3

Напружено-деформований стан пластинки у двох випадках граничних умов на поверхні вирізу *а)* $t_n|_{L_1} = 0, \quad t_\tau|_{L_1} = 0,$ (вільний отвір), *б)* $u_n|_{L_1} = 0, \quad u_\tau|_{L_1} = 0,$ (жорстке включення), досліджувався з використанням формулювань МБГ. За область дослідження вибрали частину
$ABCDEFG$. На рис. 4a,b і 4c,d зображені графіки значень σ_{xx}/p, σ_{yy}/p, для задач а і б відповідно. Криві 1 і 2 відповідають числовим розв'язкам, отриманим з використанням лінійних ($n = 2$) і квадратичних ($n = 3$) апроксимацій при $M = 50$ і $M = 28$ відповідно ($M_{BC} = 8(4)$, $M_{AB} = M_{DE} = M_{GA} = 4(2)$, $M_{EFG} = 26(16)$). Крива 3 – графік розв'язку, знайденого методом функцій стрибка [10].

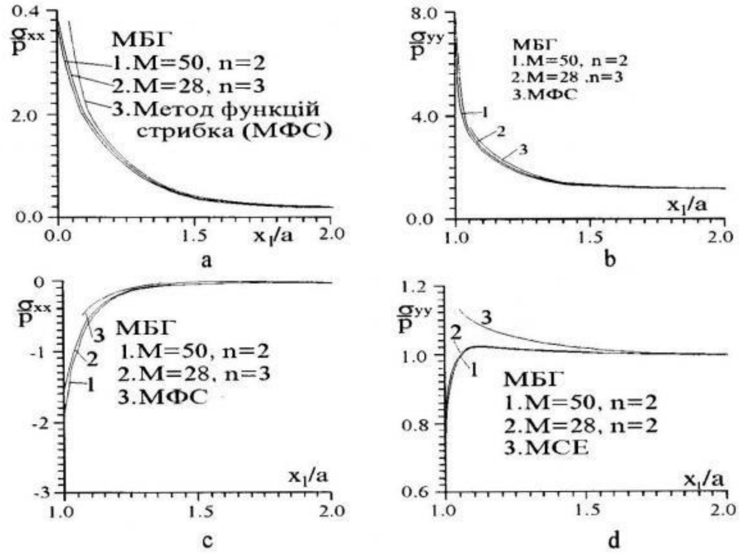


Рис. 4

1. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності.- Львів., Світ, 1994.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М., Мир, 1984. – 494 с.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов.- М.: Мир, 1987.
4. Guiggiani M., Krishnasnamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J. *Ageneral Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations* // Journal of Applied Mechanics.- 1992. – Vol. 59. – P. 604-614.
5. Brebbia C.A. *Alternative ways of treating domain integrals in boundary elements* // Comput. Meth. Water Resour Vol. 2. Numer. meth. transp. and hydrol process: Proc. 7 Int. Conf., Cambridge, Mass, June, 1988. – Amsterdam etc., Louthampton; Boston, 1988. – P. 129-138.
6. Banerjee P.K., Henry D.P. *BEM formulations for body forces using particular integrals* // Boundary Elem. Meth. Appl. Mech. Proc. Ist Joint Jap/US Symp. Boundary Elem. Meth., Tokyo, 3-6. Oct., 1988. – Oxford. – P. 25-34.
7. Stippes M., Rizzo F.J. *A note on the body force integral of classical elastostatics*// ZAMP.– 1977. – N 6. – P. 809-832.
8. Huang Q., Cruse T.A. *Some remarks on particular solution used in BEM formulation* // Computational Mechanics. – 1993. – Vol. 13. – P. 68-73.
9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимации. – М.: Мир, 1986.
10. Сулим Г.Т., Сулим М.В. *Напряжённое состояние пластинки с тонкостенным включением*// Деп. ВИНИТИ.– 1982. – N4839–82 Деп.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.96

УДК 539.374

ВЕЛИКІ ПРУЖНО–ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ КРУГОВОЇ МЕМБРАНИ ПІД ДІЄЮ РІВНОМІРНОГО ТИСКУ

В. А. Галазюк, І. А. Прокопишин, Д. Г. Хлєбніков

Galaziuk V, A., Prokopishin I. A., Khlebnikov D. G. Large elasto–plastic deformations of a circular membrane under uniform pressure. The problem of large elasto-plastic deformations of a circular membrane under uniform pressure is considered on the base of Davis-Nadai approach. The nonlinear boundary problem is transformed to Cauchy problem. Numerical results are obtained by Runge-Kutta method. Ultimate pressure and elastic unloading are analyzed for process of forming aluminium shells.

Проблема дослідження пружно–пластичної поведінки оболонок при великих деформаціях виникає при оцінці утримувальної здатності сучасних тонкостінних конструкцій, в технологічних задачах листового штампування. Огляд робіт цього напрямку можна знайти в працях [3–5,8,9].

У даній праці розглянуто задачу про великі пружно–пластичні деформації кругової мембрани під дією рівномірного тиску. Її розв'язок здійснено методом Рунге–Кутта на підставі зведення вихідної нелінійної крайової проблеми до задачі Коші [2]. Це дозволило порівняно просто визначити критичне значення тиску, при якому наступає втрата утримувальної здатності оболонки в процесі формування та дослідити її залишковий деформований стан після розвантаження.

Нехай r^0, z^0 — координати деякої матеріальної точки M серединної поверхні мембрани до деформації в полярній системі координат , s^0 — довжина дуги по мередіану від полюса до т. M , θ^0 — кут нахилу нормалі до серединної поверхні в цій точці стосовно осьової лінії, а h^0 — товщина мембрани. Після деформації відповідні величини для точки M позначимо через r, z, s, θ, h .

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73K15.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Міністерства у справах науки та технологій України (Проект 05.21.04/ 347–93 "Геліос")

Запишемо геометричні співвідношення для оболонки обертання [2]. Головні кривини виражаються формулами

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds} , \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin\theta}{r} . \tag{1}$$

Прирости координат та приріст довжини дуги зв'язані співвідношеннями

$$dz = \sin\theta ds , \quad dr = \cos\theta ds . \tag{2}$$

Для опису деформованого стану будемо використовувати кратності видовження елемента оболонки по лініях головних кривин λ_1, λ_2 , та по нормалі до серединної поверхні — λ_3 :

$$\lambda_1 = \frac{ds}{ds^0} , \quad \lambda_2 = \frac{r}{r^0} , \quad \lambda_3 = \frac{h}{h^0} . \tag{3}$$

Пластичне формування оболонки будемо розглядати як квазістатичний процес. Припускаючи, що товщина оболонки достатньо мала, будемо вважати що оболонка перебуває в умовах безмоментного напруженого стану.

Зазначимо, що нормальні напруження σ_1 та σ_2 на площадках, ортогональних до ліній головних кривин завжди будуть головними, оскільки з геометричних міркувань дотичні напруження σ_{12} на цих площадках відсутні. Введемо інтегральні характеристики цих напружень по товщині

$$T_1 = h\sigma_1 , \quad T_2 = h\sigma_2 . \tag{4}$$

Рівняння рівноваги оболонки, яка перебуває під дією тиску з інтенсивністю p записуються [2] :

$$T_1 = \frac{pr}{2\sin\theta} , \qquad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p . \tag{5}$$

З них безпосередньо випливає наступна рівність

$$\frac{dT_1}{ds} = (T_2 - T_1)\frac{\cos\theta}{r} . \tag{6}$$

Для запису співвідношень пластичності скористаємось підходом Девіса–Надаі та введемо логарифмічні деформації

$$\epsilon_1 = \ln\lambda_1 , \quad \epsilon_2 = \ln\lambda_2 , \quad \epsilon_3 = \ln\lambda_3 . \tag{7}$$

З умови нестисливості $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ випливає, що

$$\epsilon_3 = -(\epsilon_1 + \epsilon_2) . \tag{8}$$

Запишемо співвідношення деформаційної теорії пластичності при умові текучості Мізеса [6]:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\epsilon_i}(2\epsilon_1 + \epsilon_2) , \quad \sigma_2 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\epsilon_i}(2\epsilon_2 + \epsilon_1) , \tag{9}$$

де $\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left({\epsilon_1}^2 + \epsilon_1\epsilon_2 + {\epsilon_2}^2\right)^{1/2}$ – інтенсивність пластичних деформацій, а $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ — визначається діаграмою пластичності. Співвідношення (9) зручно записати у вигляді:

$$\begin{aligned} T_1 &= h^0 f_1(\lambda_1, \lambda_2)\ , \quad f_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2\sigma_i}{3\lambda_1\lambda_2\epsilon_i}\left(2\ln\lambda_1 + \ln\lambda_2\right)\ , \\ T_2 &= h^0 f_2(\lambda_1, \lambda_2)\ , \quad f_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{2\sigma_i}{3\lambda_1\lambda_2\epsilon_i}\left(2\ln\lambda_2 + \ln\lambda_1\right)\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Співвідношення пластичності у формі (10) повністю аналогічні до нелінійних фізичних співвідношень для мяких оболонок [2]. Це дозволяє скористатись способом Бідермана В.Л. зведення цієї задачі до задачі Коші.

Здійснимо деякі перетворення . З рівнянь рівноваги (5), підставляючи вирази для кривин (1) та використавши співвідношення (10), отримаємо

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{r}\left(2 - \frac{f_2}{f_1}\right)\ . \tag{11}$$

Виключаючи з рівнянь (3) r^0 та враховуючи,що для мембрани $\theta^0 = 0$, отримаємо рівняння сумісності деформацій

$$\frac{d\lambda_2}{ds} = \frac{\lambda_2}{r}\left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\ . \tag{12}$$

Для отримання рівняння на λ_1 скористаємось таким підходом. Продиференціювавши перше рівняння (10) по s і приймаючи початкову товщину мембрани h^0 сталою, будемо мати

$$\frac{dT_1}{ds} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{ds} - \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{ds}\right)h^0\ . \tag{13}$$

Далі, використовуючи рівняння (6), отримаємо

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1}\right)^{-1}\left((f_2 - f_1)\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}\frac{\lambda_2}{r}\left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right). \tag{14}$$

Отже, ми отримали систему рівнянь яка записана для деформованої оболонки :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \cos\theta\ , \\ \frac{dz}{ds} &= \sin\theta\ , \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\sin\theta}{r}\left(2 - \frac{f_2}{f_1}\right)\ , \\ \frac{d\lambda_1}{ds} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial\lambda_1}\right)^{-1}\left((f_2 - f_1)\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial f_1}{\partial\lambda_2}\frac{\lambda_2}{r}\left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)\ , \\ \frac{d\lambda_2}{ds} &= \frac{\lambda_2}{r}\left(\cos\theta - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\ . \end{aligned} \tag{15}$$

Зазначимо, що ця система рівнянь не залежить від початкової товщини h^0 . При зміні масштабу

$$\hat{r} = ar \ , \quad \hat{z} = az + b \ , \quad a, b \in R \tag{16}$$

величини $\theta, \lambda_1, \lambda_2$ не змінюються і система рівнянь переписується без змін. Це дозволяє сформулювати такий алгоритм ії розв'язування.

Задаємо деякі початкові значення $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ при $r = 0$. Форма оболонки в околі полюса буде близька до сферичної, тобто для малих r кут нахилу нормалі визначається формулою $\theta = r/R_0$, де R_0 — радіус кривини оболонки в полюсі. Останній можна задати довільним чином, оскільки він лише визначатиме масштаб. З тих же міркувань задання початкового значення z_0 також довільне.

Система рівнянь (15) має особливість в полюсі, тому ії інтегрування починаємо з деякої точки s $(0 < s < \epsilon)$, задаючи початкові значення

$$r(s_0) = s_0 \ , \quad \theta(s_0) = \frac{r_0}{R_0} \ , \quad z(s_0) = z_0 \ , \quad \lambda_1(s_0) = \lambda_2(s_0) = \lambda_0 \ . \tag{17}$$

Інтегрування системи рівнянь (15) при початкових умовах (17) здійснюємо до точки s^*, в якій $\lambda_2 = 1$. Фіксуємо отримані величини $r^*, q^*, z^*, {\lambda_1}^*$ і знаходимо реальний профіль оболонки, здійснюючи перетворення (16) з параметрами

$$a = \frac{r_1}{r^*} \ , \quad b = -\frac{r_1 z^*}{r^*} \ , \tag{18}$$

де r_1 — радіус мембрани.

Для знаходження внутрішнього тиску p , який відповідає заданному значенню λ_0 величин λ_1, λ_2 в полюсі, застосовуємо перше рівняння рівноваги (5) та фізичні співвідношення (10), звідки отримаємо

$$p = 2h^0 f_1(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\sin\theta}{r} \ . \tag{19}$$

Для числового розв'язування початкової задачі (15),(17) застосовано модифікацію Гілла методу Рунге-Кутта з використанням стандартної програми RKGS [5].

У даному випадку задача рівноваги оболонки є статично визначеною, тому після розвантаження залишкові напруження не виникають. Залишковий деформований стан повністю визначається пластичними деформаціями λ_1', λ_2' , рівними

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^e} \ , \quad \lambda_2' = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^e} \ , \tag{20}$$

$\lambda_k^e = \exp\left(\dfrac{\sigma_i \epsilon_k}{3G\epsilon_i}\right)$, $k = 1, 2$, — пружні деформації. Залишкову форму оболонки знаходимо інтегруванням рівності

$$\frac{dz'}{dr'} = \tan\theta' \ , \tag{21}$$

де $r' = r/\lambda_1^e$, а θ' визначається з рівняння сумісності для залишкових деформацій (12):

$$\cos\theta' = \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} \frac{1 - \dfrac{r}{\lambda_2^e}\dfrac{d\lambda_2^e}{dr}}{1 - \dfrac{r}{\lambda_2}\dfrac{d\lambda_2}{dr}} \; . \tag{22}$$

Для прикладу розглянемо процес пластичного формування оболонки з листового металу, коли залежність інтенсивностей напружень та деформацій апроксимується степеневою функцією [1]

$$\sigma_i = A{\epsilon_i}^n \ , \quad A = \sigma_{ut}\frac{\exp(n)}{n^n} \ , \tag{23}$$

де σ_{ut} — межа короткотривалої міцності при випробовуваннях на розтяг, n — показник деформаційного зміцнення. Зазначимо, що в цьому випадку система рівнянь (15) не залежить від коефіцієнта A .

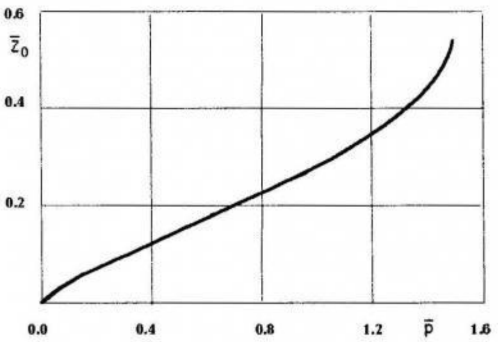


Рис. 1

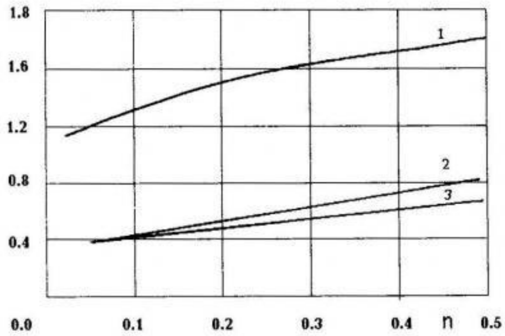


Рис. 2

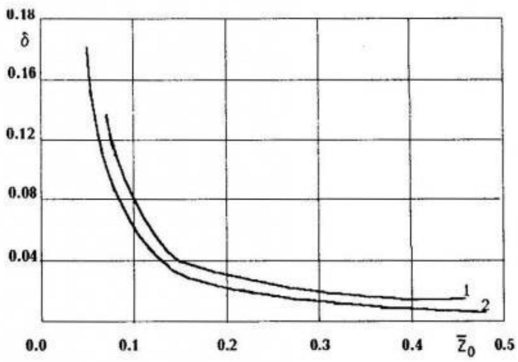


Рис. 3

Залежність відносного прогину мембрани в центрі $\bar{z}_0 = z_0/r_1$ від безрозмірного тиску $\bar{p} = pr_1/(\sigma_{ut}h^0)$ для алюмінієвого сплаву АМцМ (n = 0.2) показана на рис.1. Точка на кривій, в якій похідна стає нескінченною, відповідає критичному значенню тиску, коли зменшення товщини оболонки в процесі пластичного формування вже перестає компенсуватись зміцненням матеріалу і оболонка втрачає утримувальну здатність.

Залежність критичних значень: тиску — $\bar{p}^*$, інтенсивності деформацій — ϵ_i^* та центрального прогину — $\bar{z}_0^*$ від показника деформаційного зміцнення n ілюструють графіки на рис.2. (відповідно криві 1 — 3).

На рис.3 показана залежність відносного пружинення оболонки в центрі $\delta = (z_0 - z_0')/z_0'$ від відносного пластичного прогину в центрі $\bar{z}_0' = z_0'/r_1$ для сплаву АМцМ з параметрами $n = 0.2, G = 27000$ $МПа$ (крива 1). Крива 2 зображає таку ж залежність для випадку плоского деформованого стану ($\epsilon_2 = 0$), отриману аналітично.

1. Аверкиев А.Ю. Методы оценки штампируемости листового металла.— М., Машиностроение, 1985.— 176 с.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М., Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. Горлач Б.А. Конечные неупругие деформации твердых тел при термомеханических воздействиях// Куйбышевский авиационный институт, Куйбышев, 1984. — 387 с. (Деп. в ВИНИТИ 26.02.85, N 2050–85 Деп.)
4. Григорьев А.С. *О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях//* Труды YII Всес.конф. по теории оболочек и пластин. М., Наука, 1970. — С. 779–787.
5. Куранов Б.А., Одеров И.А. Современные методы расчета оболочечных конструкций с геометрической и физической нелинейностью (Реферативный обзор зарубежной литературы)// НПО "Криогенмаш". Балашиха, 1984. — Деп. в ВИНИТИ 10.02.84, N 1170–84 Деп.
6. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.:Машиностроение, 1975. — 400 с.
7. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ // Институт математики АН БССР. — Минск, 1982. — Вып.2. — 272 с.
8. Титляков А.Е., Щеглов Б.А. *Пластическое течение листового металла при определении пластичности гидростатическим методом//* Кузнечно-прессовое производство. – 1968. – N 5. – С. 22–26.
9. Gavriushin S.S., Gavriushina N.T.. *A simple algorithm for the analysis of axisymmetric thin shell metal forming//* Int. J. Num. Meth. Eng. – 1986. – Vol. 23. – P. 1179–1194.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.94

УДК 539.377

ОПТИМІЗАЦІЯ СХЕМ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТА НАГРІВУ ТОВСТОСТІННИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ОБОЛОНОК

М. І. Бугрій

Bugriy M. I. The optimization of force loading and heating processes of thick thermoelastic shells. The mathematical formulation and the method of finding of a solution for the spatial quasi-static optimization problems of thermoelastic state of the thick-walled shells at their force loading is proposed. The energy functional of the shell elastic deformation is taken as the criterion of the optimization. An intensity of force loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. This functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type. The problem of optimization is reduced to the solution of two boundary-value problems with respect to the displacement vector and the vector conjugate to it.

Сформулюємо в квазістатичному наближенні математичну постановку і розглянемо методику розв'язування тривимірної за просторовими координатами задачі оптимізації термопружного стану товстостінних ізотропних оболонок сталої товщини, які знаходяться під дією нестаціонарного температурного поля $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і поверхневих зусиль $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Тут (α,β,γ) – мішана ортогональна криволінійна система координат [2], τ – час.

Як відомо [1], математичне формулювання задач оптимізації для механічних систем з розподіленими параметрами пов'язане з вибором критерію оптимізації і конкретизацією множини допустимих функцій та функцій керування. За критерій оптимізації виберемо функціонал енергії пружної деформації оболонки [1]

$$W[\vec{u},t]=\frac{1}{2E}\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\big[\sigma_{\alpha\alpha}^2+\sigma_{\beta\beta}^2+\sigma_{\gamma\gamma}^2-2\nu\left(\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}+\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\gamma\gamma}+\sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha}\right)+ \\ +2(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_{\gamma\alpha}^2)\big]\,dV\,d\tau. \tag{1}$$

Тут σ_{is} $(i,s=\alpha,\beta,\gamma)$ — компоненти симетричного тензора напружень $\hat{\sigma}$, який виражається через переміщення $\vec{u}$ і температуру t за таким співвідношенням

$$\hat{\sigma}=2G\left\{Def\,\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\left[\nu\mathrm{div}\,\vec{u}-\alpha_t(1+\nu)t\right]\hat{I}\right\}; \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 73K40; Secondary 49R99.

$Def\,\vec{u} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u}+\vec{u}\vec{\nabla}\right)$; $\vec{\nabla}\vec{u}$ і $\vec{u}\vec{\nabla}$ — діадні добутки векторів; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\hat{I}$ — одиничний тензор; G — модуль зсуву; E — модуль пружності; ν — коефіцієнт Пуассона; α_t — коефіцієнт лінійного теплового розширення; (V) — просторова область, яку займає оболонка.

За функції керування в задачі оптимізації приймемо інтенсивність поверхневих зусиль $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і температуру $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Ці функції підпорядкуємо додатковим умовам інтегрального (моментного) характеру

$$\int\limits_{(V)} t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)\psi_m(\alpha,\beta,\gamma)\,dV = B_m(\tau),\quad (m=\overline{0,m^*}), \tag{3}$$

$$\int\limits_{(\Sigma)} \vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)\psi_l(\alpha,\beta,\gamma)\,d\Sigma = \vec{C}_l(\tau),\quad (l=\overline{0,l^*}). \tag{4}$$

Тут $\psi_k(\alpha,\beta,\gamma)$, $(k=\overline{0,\infty})$ утворюють повну ортонормовану систему функцій в області (V); (Σ) — гладка поверхня, що обмежує область (V); $B_m(\tau)$, $\vec{C}_l(\tau)$ — задані параметричні функції.

Допустимі функції і функції керування (вектор переміщень $\vec{u}$, температура t і вектор зовнішніх зусиль $\vec{p}$) термопружним станом оболонки в квазістатичному наближенні пов'язані рівнянням Ляме

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = \frac{2\alpha_t\,(1+\nu)}{1-2\nu}\operatorname{grad}t \tag{5}$$

в області $(V_1) = (V)\times[0,\infty[$ і механічними граничними умовами

$$\vec{n}\cdot\hat{\sigma} = \vec{p} \tag{6}$$

на поверхні $(\Sigma_1) = (\Sigma)\times[0,\infty[$ області (V_1) [1]. Тут $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}$ — скалярний добуток вектора зовнішньої нормалі в точках поверхні (Σ) з тензором напружень (2).

Задачу оптимізації термопружного стану оболонки за рахунок вибору функцій $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ сформулюємо наступним чином: у класі двічі неперервно диференційовних в області (V_1) і неперервно диференційовних на поверхні (Σ_1) функцій знайти екстремалі функціоналу (1), які справджують обмеження (3) — (6). Сформульовану задачу оптимізації розв'язуємо методом Лагранжа.

Побудова оптимальних розв'язків зводиться до розв'язування граничної задачі

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \frac{2\alpha_t\,(1+\nu)}{1-2\nu}\operatorname{grad}t = 0,$$

$$\Delta\vec{u^*} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u^*} = 0,\quad \operatorname{div}(\vec{u}-\vec{u^*}) - 3\alpha_t t + f_0^* = 0; \tag{7}$$

$$(\vec{\sigma}_n - \vec{\sigma}_n^*)\big|_{(\Sigma_1)} = 0,\quad \left(\vec{u^*} + \psi_l\vec{Z}_l\right)\Big|_{(\Sigma_1)} = 0,\quad (l=\overline{0,l^*}) \tag{8}$$

стосовно температури $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$, вектора переміщень $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і спряженого до нього вектора $\vec{u^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Тут

$$\vec{\sigma_n^*} = \vec{n}\cdot\hat{\sigma}^*,\;\; \hat{\sigma}^* = 2G\left(Def\,\vec{u^*} + \frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{div}\vec{u^*}\cdot\hat{I}\right);$$
$$f_0^*(\alpha,\beta,\gamma,\tau) = \Phi_m^*(\tau)\psi_m(\alpha,\beta,\gamma),\;\; (m=\overline{0,m^*}); \tag{9}$$

$\vec{\sigma_n}$ — тензор напружень; $\vec{Z}_l(\tau)$ $(l=\overline{0,l^*})$, $\Phi_m^*(\tau)$ $(m=\overline{0,m^*})$ — модифіковані множники Лагранжа (у співвідношеннях (8), (9) за індексом, що повторюється, проводиться підсумовування).

Система рівнянь (7) і граничних умов (8) дозволяє визначити шукані оптимальні поля температури $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і переміщень $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Із співвідношення (6) визначаємо оптимальне поверхневе силове навантаження оболонки $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Невідомі множники Лагранжа $\Phi_m^*(\tau)$, $(m=\overline{0,m^*})$ і $\vec{Z}_l(\tau)$, $(l=\overline{0,l^*})$, шукаємо з умов (3), (4). За оптимальними полями температури t і переміщень $\vec{u}$ з ключових співвідношень квазістатичної термопружності [2] знаходимо відповідний їм термопружний стан, а також умови нагріву оболонки.

Зауважимо, що граничну задачу (7), (8) можна звести до двох незалежних граничних задач, аналогічних граничній задачі термопружності в переміщеннях [1]. Справді, якщо покласти

$$\vec{u} = \vec{u^*} + \vec{v^*},\;\; t = \frac{1}{3\alpha_t}\left(\operatorname{div}\vec{v^*} + f_0^*\right), \tag{10}$$

то з урахуванням (10), гранична задача (7), (8) стосовно функцій $\vec{u}$, $\vec{u^*}$, t зводиться до двох граничних задач

$$\Delta\vec{u^*} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u^*} = 0, \tag{11}$$

$$\left.(\vec{u^*} + \psi_l\vec{Z}_l)\right|_{(\Sigma_1)} = 0,\;\; (l=\overline{0,l^*}); \tag{12}$$

$$\Delta\vec{v^*} + \frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v^*} = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\operatorname{grad} f_0^*, \tag{13}$$

$$\left.\vec{n}\cdot\left\{Def\,\vec{v^*} - \frac{1}{3}\left[\operatorname{div}\vec{v^*} + \frac{1+\nu}{1-2\nu}f_0^*\right]\hat{I}\right\}\right|_{(\Sigma_1)} = 0 \tag{14}$$

стосовно функцій $\vec{u^*}$, $\vec{v^*}$. Тут за індексом l проводиться підсумовування.

Структура граничних задач (11), (12) і (13), (14) дозволяє сформулювати їхню варіаційну постановку. Справді, диференціальні оператори цих граничних задач аналогічні диференціальним операторам задач термопружності в переміщеннях, які, як відомо [2], допускають варіаційне формулювання за допомогою функціоналу Лагранжа

$$L[\vec{u}] = \frac{1}{2E}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(V)}\big[\,\sigma_{\alpha\alpha}^2 + \sigma_{\beta\beta}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - 2\nu\left(\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\beta\beta}\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha}\right) +$$

$$+2(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_{\gamma\alpha}^2)-2E\rho\vec{F}\cdot\vec{u}\Big]\,dV\,d\tau-\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(\Sigma)}(\vec{p}\cdot\vec{u})d\Sigma\,d\tau, \tag{15}$$

записаного в переміщеннях. Тут ρ – густина матеріалу оболонки, $\vec{F}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ – вектор масових сил.

Легко показати, що на основі функціоналу (15) можна отримати функціонали, еквівалентні до граничних задач (11), (12) і (13), (14).

Справді, функціонал, відповідний граничній задачі (11), (12) стосовно функції $\vec{u^*}$, отримується з функціоналу (15), якщо в останньому покласти

$$\vec{u}=\vec{\theta^*},\ \ \vec{\theta^*}=\vec{u^*}+\psi_l\vec{Z}_l,\ (l=\overline{0,l^*}),t\equiv 0,\ \ \vec{F}=\vec{F^*},\ \ \vec{p}=0. \tag{16}$$

Тут

$$\vec{F^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=-\frac{G}{\rho}\left(\Delta\psi_l\vec{Z}_l+\frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\psi_l\vec{Z}_l\right),(l=\overline{0,l^*}),$$

де за індексом l, як і у співвідношеннях (16), проводиться підсумовування. Тоді отримаємо функціонал

$$L^{(0)}[\vec{\theta^*}]=\frac{1}{2E}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(V)}\big[\,\theta_{\alpha\alpha}^2+\theta_{\beta\beta}^2+\theta_{\gamma\gamma}^2-2\nu\,(\theta_{\alpha\alpha}\theta_{\beta\beta}+\theta_{\beta\beta}\theta_{\gamma\gamma}+\theta_{\gamma\gamma}\theta_{\alpha\alpha})+$$

$$+2(1+\nu)(\theta_{\alpha\beta}^2+\theta_{\beta\gamma}^2+\theta_{\gamma\alpha}^2)-2E\rho(\vec{F^*}\cdot\vec{\theta^*})\Big]\,dV\,d\tau, \tag{17}$$

екстремалі якого є розв'язками граничної задачі (11), (12) у вказаному вище класі гладких функцій, які задовольняють граничну умову (12), де θ_{is} $(i,s=\alpha,\beta,\gamma)$ — компоненти симетричного тензора

$$\hat{\theta}=2G\left(Def\,\vec{\theta^*}+\frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{div}\,\vec{\theta^*}\cdot\hat{I}\right).$$

Аналогічно можна показати, що відповідний граничній задачі (13), (14) функціонал також отримується з функціоналу Лагранжа (15), якщо в останньому покласти

$$\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\vec{v^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau),\ \ t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\frac{1}{3\alpha_t}\,\mathrm{div}\,\vec{v^*}(\alpha,\beta,\gamma,\tau),$$

$$\vec{F}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=-\frac{1}{3(1-2\nu)\rho}\mathrm{grad}\,f_0^*,\ \ \vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\frac{1}{3(1-2\nu)}\,\vec{n}f_0^*. \tag{18}$$

Тоді отримаємо функціонал

$$L^{(1)}[\vec{v^*}]=\frac{1}{2E}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(V)}\Big[{w_{\alpha\alpha}^{(0)}}^2+{w_{\beta\beta}^{(0)}}^2+{w_{\gamma\gamma}^{(0)}}^2-2\nu(w_{\alpha\alpha}^{(0)}w_{\beta\beta}^{(0)}+w_{\beta\beta}^{(0)}w_{\gamma\gamma}^{(0)}+$$

$$+w_{\gamma\gamma}^{(0)}w_{\alpha\alpha}^{(0)}) + 2(1+\nu)(v_{\alpha\beta}^2 + v_{\beta\gamma}^2 + v_{\gamma\alpha}^2) + \frac{2E^2}{3(1-2\nu)}\vec{v^*}\cdot \operatorname{grad} f_0^*\Big]\, dV\, d\tau -$$

$$-\frac{E}{3(1-2\nu)}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(\Sigma)}(\vec{n}\cdot\vec{v^*})f_0^*\, d\Sigma\, d\tau, \tag{19}$$

де

$$w_{\alpha\alpha}^{(0)} = \frac{1}{3}\left(2v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} - v_{\gamma\gamma}\right), \tag{20}$$

$w_{\beta\beta}^{(0)}$, $w_{\gamma\gamma}^{(0)}$ отримуються з (20) циклічною перестановкою індексів, а v_{is} $(i, s = \alpha, \beta, \gamma)$ є складовими симетричного тензора $\hat{v}$, що визначається співвідношенням

$$\hat{v} = 2G\left(Def\,\vec{v^*} + \frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{div}\vec{v^*}\cdot\hat{I}\right).$$

Екстремалі функціоналу (19) є розв'язками граничної задачі (13), (14) стосовно функції $\vec{v^*}$. При цьому гранична умова (14) є природною для функціоналу (19).

Функціонали (17), (19) є строго опуклими функціоналами, оскільки вони отримані з строго опуклого енергетичного функціоналу (15) шляхом лінійної заміни незалежних змінних у вигляді (16) і (18) відповідно. Тому розв'язок задачі оптимізації існує і він єдиний в класі гладких функцій, який розглядаємо. У зв'язку з цим отримані функціонали можна використати як для знаходження наближених розв'язків задачі оптимізації, яку розглядаємо, варіаційними методами типу методу Рітца, так і для побудови наближених двовимірних за просторовими координатами аналогів задачі оптимізації за допомогою варіаційних методів типу методу Канторовича.

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К., Наукова думка, 1979. – 364 с.

2. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек.– К., Наукова думка, 1978. – 320 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.96

УДК 539.3

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОЇ МЕХАНІКИ ТА ОДНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ СЕРЕДОВИЩА ЗІ СФЕРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Ю. І. Говда, Т. С. Нагірний

Govda Yu. I., Nahirniy T. S. The classification of problems for locally-gradient mechanics and one dynamic problem for media with the spherical cavity. The classification of problems for locally-gradient mechanics is proposed. By formulating of dynamic problems the inertia both the mechanical motion and the reversible displacement of mass take into account. The solution of a noncouple problem for media with the spherical cavity is investigated.

У працях [1,2], базуючись на принципі локально-градієнтного рівноважного стану, запропоновано термодинамічний підхід до опису взаємозв'язаних процесів у деформівних системах з урахуванням локальної градієнтності полів хімічного потенціалу та температури.

У даній праці дано формулювання різних типів задач локально-градієнтної механіки та досліджено динамічну поведінку пружного середовища, в якому раптово виникає сферична порожнина.

Нехай у пружному твердому тілі, що займає область (V) евклідового простору з поверхнею (Σ), базовими процесами є механічні. Ці процеси задовольняють рівняння балансу енергії E, яке в наближенні геометричної лінійності має вигляд [3]

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \vec{v} + H \frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau} \right). \tag{1}$$

Тут $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\vec{v}$ – вектор швидкості; H – хімічний потенціал; $\vec{\Pi}_m$ – вектор пружних зміщень маси; τ – час.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A15.

Разом з рівнянням (1) повинні виконуватися рівняння балансу імпульсу механічного поступального руху та маси [2,3]

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \widehat{\sigma} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_m\right) = 0, \tag{2}$$

де $\vec{k}_v$ – механічний імпульс; ρ – густина маси.

Енергію E приймаємо у вигляді суми внутрішньої енергії U та енергії руху K

$$E = U + K. \tag{3}$$

При цьому енергію руху K означуємо в просторі імпульсу механічного поступального руху $\vec{k}_v$, а також імпульсу пружних зміщень маси $\vec{k}_m$

$$K = K\left(\vec{k}_v, \vec{k}_m\right), \tag{4}$$

а для U з (1)-(3) отримуємо

$$U = U\left(\widehat{e}, \rho, \vec{\Pi}_m\right). \tag{5}$$

Тут $\widehat{e}$ – тензор деформації. Зауважимо, що для приростів dK, dU справедливі рівності

$$dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v + \frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau} \cdot d\vec{k}_m, \tag{6}$$

$$dU = \widehat{\sigma}{:}d\widehat{e} + H d\rho + \left(\vec{\nabla} H - \frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau}\right) \cdot d\vec{\Pi}_m. \tag{7}$$

Повна система рівнянь моделі локально-градієнтного пружного тіла з урахуванням інерційності пружних зміщень маси, а також механічного поступального руху складається з рівнянь балансу механічного імпульсу та маси (2), конститутивних рівнянь, які приймаємо у вигляді

$$\widehat{\sigma} = 2\mu\widehat{e} + \left[\lambda\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m(H - H_*)\right]\widehat{I}, \tag{8}$$

$$H = H_* - \frac{1}{\beta_\eta}(\rho - \rho_*) - (3\lambda + 2\mu)\frac{\alpha_m}{\beta_\eta}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} H - \frac{\partial \vec{k}_m}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma}\vec{\Pi}_m, \tag{10}$$

$$\vec{k}_v = \frac{\rho}{\beta_m - \beta^2\rho}\left(\beta_m \vec{v} - \beta\frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau}\right), \qquad \vec{k}_m = \frac{1}{\beta_m - \beta^2\rho}\left(\frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial \tau} - \beta\rho\vec{v}\right), \tag{11}$$

та співвідношення Коші для тензора деформації

$$\widehat{e} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right]. \tag{12}$$

Тут $\vec{u}$ – вектор переміщення; ρ_*, H_* – густина маси і хімічний потенціал необмеженого однорідного середовища; μ, λ, α_m, β, β_m, β_η, γ – характеристики матеріалу необмеженого однорідного середовища; індекс "т" означає транспонування.

У випадку, коли за розв'язуючі функції взяти хімічний потенціал H і вектор переміщення $\vec{u}$, за лінійного наближення для імпульсів $\vec{k}_v$, $\vec{k}_m$ система співвідношень (2),(8)-(12) зведеться до такої системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{c_\eta^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} -$$

$$-\frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_m + \beta\rho_*}{(\beta^2\rho_* - \beta_m)}\frac{\partial^2 \vec{\nabla}\cdot(\vec{u})}{\partial\tau^2} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{13}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - \left((3\lambda+2\mu)\alpha_m - \beta\rho_*\right)\vec{\nabla}H -$$

$$-\frac{\beta\rho_*}{\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)\gamma}}\int_0^\tau \left[\beta\rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\xi^2} - (\beta^2\rho_* - \beta_m)\vec{\nabla}H\right] \times$$

$$\times \sinh\left(\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)/\gamma}\,(\tau - \xi)\right) d\xi =$$

$$= \frac{\beta\rho_*}{\gamma}\left[\cosh\left(\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)/\gamma}\,\tau\right)\vec{\Pi}_m\Big|_{\tau=0} -\right.$$

$$\left.-\sqrt{\gamma/(\beta^2\rho_* - \beta_m)}\sinh\left(\sqrt{(\beta^2\rho_* - \beta_m)/\gamma}\,\tau\right)\frac{\partial\vec{\Pi}_m}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\right]. \tag{14}$$

Тут c_η – швидкість поширення збурень поля хімічного потенціалу; $\varkappa$ – характеристика матеріалу. Задачу локально-градієнтної механіки, що описується системою рівнянь (13)(14), називатимемо динамічною інерційною задачею з врахуванням взаємозв'язаності механічного імпульсу $\vec{k}_v$ та імпульсу пружних зміщень маси $\vec{k}_m$.

Якщо знехтувати взаємозв'язаністю імпульсів $\vec{k}_v$, $\vec{k}_m$, тобто прийняти для енергії K зображення

$$K = \frac{1}{2}\beta_m\vec{k}_m\cdot\vec{k}_m + \frac{1}{2\rho_*}\vec{k}_v\cdot\vec{k}_v, \tag{15}$$

то лінеаризована система рівнянь буде мати вигляд

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{c_\eta{}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} + (3\lambda+2\mu)\alpha_m\left(\frac{1}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \frac{1}{\beta_m}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})}{\partial\tau^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{16}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0. \tag{17}$$

Задачу локально-градієнтної механіки, що описується системою рівнянь (16)(17), будемо називати динамічною інерційною.

Нехтуючи інерційністю пружних зміщень маси, тобто приймаючи

$$K = \frac{1}{2\rho_*}\vec{k}_v \cdot \vec{k}_v, \tag{18}$$

отримуємо лінеаризовану систему рівнянь, що відповідає динамічній задачі локально-градієнтної механіки

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{19}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0. \tag{20}$$

Якщо знехтувати інерційністю механічного поступального руху, то лінеаризована ключова система рівнянь буде мати вигляд

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{{c_\eta}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{21}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0. \tag{22}$$

Задачу локально-градієнтної механіки, що описується системою рівнянь (21)(22), називатимемо інерційною задачею.

Нехтуючи інерційністю всіх форм руху лінеаризована ключова система рівнянь матиме вигляд

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m}{\gamma}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{23}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0 \tag{24}$$

і буде описувати статичну задачу локально-градієнтної механіки.

Якщо при отриманні систем рівнянь (16)(17), (19)(20), (21)(22), (23)(24) у співвідношенні (9) нехтувати впливом тензора деформації на хімічний потенціал, то відповідні системи рівнянь будуть описувати відповідні незв'язані задачі локально-градієнтної механіки.

Застосуємо систему рівнянь

$$\vec{\nabla}^2 H - \varkappa^2(H - H_*) - \frac{1}{{c_\eta}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\tau^2} = \frac{1}{\gamma}\left[\rho_* - \left(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m\right)\Big|_{\tau=0}\right], \tag{25}$$

$$\mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \rho_*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}H = 0, \tag{26}$$

що відповідає незв'язаній динамічній інерційній задачі, до опису механічної поведінки пружного середовища, в якому раптово виникає сферична порожнина. З цією метою розглянемо необмежене пружне тіло, віднесене до сферичної системи координат $\{r, \varphi, \theta\}$, яке займає область $r > r_0$. Стан тіла для часу $\tau \leqslant 0$ відповідає стану вільного від силового навантаження однорідного пружного середовища, яке характеризується хімічним потенціалом H_* та густиною ρ_*. Для $\tau > 0$ приймаємо, що поверхня тіла $r = r_0$ вільна від силового навантаження і на ній підтримується стале відмінне від початкового значення хімічного потенціалу $H_a (H_a \neq H_*)$, яке відповідає хімічному потенціалу вільної частинки.

За сформульованих умов динамічні процеси в області тіла $r > r_0$ є центральносиметричними та описуються такою системою рівнянь:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \widetilde{\eta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial r} - \varkappa^2 \widetilde{\eta} - \frac{1}{c_\eta{}^2}\frac{\partial^2 \widetilde{\eta}}{\partial \tau^2} = 0,\\ \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\widetilde{u} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \tau^2} = \alpha_m \left(3 - \frac{4c_2^2}{c_1^2}\right)\frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial r};\end{gathered} \tag{27}$$

за таких початкових і граничних умов:

$$\widetilde{\eta} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \tau} = 0, \qquad \widetilde{u} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} = 0 \qquad \text{при} \qquad \tau = 0, \qquad r > r_0; \tag{28}$$

$$\widetilde{\eta} = \eta_a, \qquad c_1^2 \rho_* \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} + (c_1^2 - 2c_2^2)\rho_* \frac{\widetilde{u}}{r} - (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \widetilde{\eta} = 0 \tag{29}$$

на поверхні $r = r_0$ при $\tau > 0$, а також умов обмеженості розв'язку при $r \to \infty$. Тут $\widetilde{\eta} = H - H_*$ – збурення хімічного потенціалу $H(r, \tau)$ від початкового значення H_*; $\widetilde{u}(r, \tau)$ – радіальна компонента вектора переміщення $\vec{u}$; c_1, c_2 – відповідно швидкості поширення поздовжньої і поперечної пружних хвиль в необмеженому середовищі; $\eta_a = H_a - H_*$. Співвідношення для ненульових компонент $\widetilde{\sigma}_r$, $\widetilde{\sigma}_\varphi$, $\widetilde{\sigma}_\theta$ тензора напружень $\widehat{\sigma}(r, \tau)$ мають вигляд

$$\begin{gathered}\widetilde{\sigma}_r = c_1^2 \rho_* \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} + (c_1^2 - 2c_2^2)\rho_* \frac{\widetilde{u}}{r} - (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \widetilde{\eta},\\ \widetilde{\sigma}_\varphi = \widetilde{\sigma}_\theta = (c_1^2 - 2c_2^2)\rho_* \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} + 2(c_1^2 - c_2^2)\rho_* \frac{\widetilde{u}}{r} - (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \widetilde{\eta}.\end{gathered} \tag{30}$$

Уведемо у розгляд безрозмірні величини

$$\begin{gathered}R = \varkappa r, \qquad t = c_1 \varkappa \tau, \qquad \eta = \widetilde{\eta}/\eta_a, \qquad u = \frac{c_1^2 \varkappa}{(3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \eta_a}\widetilde{u},\\ \sigma_r = \widetilde{\sigma}_r/\sigma_*, \qquad \sigma_\varphi = \widetilde{\sigma}_\varphi/\sigma_*, \qquad \sigma_\theta = \widetilde{\sigma}_\theta/\sigma_*, \qquad \sigma_* = (3c_1^2 - 4c_2^2)\alpha_m \rho_* \eta_a.\end{gathered} \tag{31}$$

Тоді система рівнянь (27), крайові умови (28),(29) і співвідношення (30) запишуться у вигляді

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \eta}{\partial R} - \eta - \alpha^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \eta; \tag{32}$$

початкові умови

$$\eta = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0, \quad R > R_0 \equiv \varkappa r_0; \tag{33}$$

граничні умови

$$\eta = 1, \qquad \sigma_r = 0 \qquad \text{на поверхні} \quad R = R_0 \quad \text{при} \quad t > 0 \tag{34}$$

з умовами обмеженості розв'язку при $R \to \infty$;

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \eta, \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta &= \left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \eta. \end{aligned} \tag{35}$$

Тут $u = \partial\Phi/\partial R$; Φ – потенціал переміщення [4]; $\alpha = c_1/c_\eta$; $\beta = c_1/c_2$. Розв'язком першого рівняння системи (32), що задовольняє крайові умови, є

$$\begin{aligned} &\eta(R,t) = \\ &= \Theta(t - \alpha(R - R_0))\frac{R_0}{R}\left(1 - (R - R_0)\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} \frac{J_1(\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha)}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R-R_0)^2}}d\xi\right), \end{aligned} \tag{36}$$

де $J_1(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку; $\Theta(\cdot)$ – одинична функція Гевісайда. Для компонент вектора переміщення та тензора напружень отримуємо

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{R}\Bigg\{&\Theta(t - R + R_0)\Bigg[\frac{1}{R} - \frac{c}{c^2 + 4a^2R_0^2}\Bigg[\left(2R_0 + \frac{c}{R}\right)\cos\left(\frac{t - R + R_0}{a}\right) + \\ &+ \left(\frac{c}{a} - \frac{2aR_0}{R}\right)\sin\left(\frac{t - R + R_0}{a}\right)\Bigg] + \frac{2}{c^2 + 4a^2R_0^2}\, e^{-\frac{t-R+R_0}{bR_0}} \times \\ &\times \Bigg[R_0\left(c - \frac{2a^2R_0}{R}\right)\cos\left(k(t - R + R_0)\right) + \frac{1}{bkR_0}\Bigg(R_0(2a^2 + b{R_0}^2) - \\ &-(c^2 - 2a^2(c - R_0^2))\frac{1}{R}\Bigg)\sin\left(k(t - R + R_0)\right)\Bigg] + \frac{2}{\alpha}\int_0^{t-R+R_0} J_0\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\Bigg[\frac{R_0}{2R} + \\ &+ \frac{R_0}{c^2 + 4a^2R_0^2}\Bigg(\left(2R_0 + \frac{cd}{R}\right)\cos\left(\frac{t - R + R_0 - \xi}{a}\right) - \left(\frac{c}{a} - \frac{2ad}{R}\right) \times \\ &\times \sin\left(\frac{t - R + R_0 - \xi}{a}\right)\Bigg) - \Bigg(\frac{R_0}{2R}\left(1 + \frac{4R_0R + 2cd}{c^2 + 4a^2R_0^2}\right)\cos\left(k(t - R + R_0 - \xi)\right) - \\ &- \frac{1}{bkR_0}\left[1 - \frac{R_0}{2R} + \frac{2(2a^2 - lR_0^2)R - dR_0(2a^2 + bR_0^2)}{R(c^2 + 4a^2R_0^2)}\right] \times \\ &\times \sin\left(k(t - R + R_0 - \xi)\right)\Bigg)e^{-\frac{t-R+R_0-\xi}{bR_0}}\Bigg]d\xi\Bigg] - \\ &-\Theta(t - \alpha(R - R_0))\Bigg[\Bigg[1 - \cos\left(\frac{t - \alpha(R - R_0)}{a}\right)\Bigg]\frac{1}{R} - \\ &-\left(1 - \frac{R_0}{R}\right)\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} \frac{J_1(\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha)}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2(R-R_0)^2}}\left[1 - \cos\left(\frac{t - \xi}{a}\right)\right]d\xi + \end{aligned}$$

$$+\frac{\alpha}{a^2}\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} J_0\left(\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha\right)\left\{1-\frac{1}{\alpha^2}\left[1-\cos\left(\frac{t-\xi}{a}\right)\right]\right\}d\xi\Bigg]\Bigg\},$$

$$\sigma_r=\frac{2R_0}{bR}\Bigg\{\Theta(t-\alpha(R-R_0))\left[\frac{1}{R^2}+\left(\frac{b}{2a^2}-\frac{1}{R^2}\right)\cos\left(\frac{t-\alpha(R-R_0)}{a}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{R}\int_{\alpha(R-R_0)}^{t} J_0\left(\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha\right)\left[1+\frac{1}{a^2}\cos\left(\frac{t-\xi}{a}\right)\right]d\xi-$$
$$-\frac{R-R_0}{R^2}\int_{\alpha(R-R_0)}^{t}\frac{J_1(\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}/\alpha)}{\sqrt{\xi^2-\alpha^2(R-R_0)^2}}\left[1-\left(1-\frac{bR^2}{2a^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\cos\left(\frac{t-\xi}{a}\right)\right]d\xi\right]-\Theta(t-R+R_0)\left[\frac{1}{R^2}+\left(\frac{b}{2a^2}-\frac{1}{R^2}\right)\times\right.$$
$$\times\cos\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right)+\frac{R_0-R}{a^2kR_0R}\sin\left(k(t-R+R_0)\right)e^{-\frac{t-R+R_0}{bR_0}}-$$
$$-\frac{R_0(2a^2R_0-cR-bR_0R^2)}{(4a^2(lR_0^2-a^2)-b{R_0}^4)R^2}\left[2\cos\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right)-\frac{c}{aR_0}\sin\left(\frac{t-R+R_0}{a}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\left(2\cos\left(k(t-R+R_0)\right)-\frac{2a^2-b{R_0}^2}{a^2kR_0}\sin\left(k(t-R+R_0)\right)\right)e^{-\frac{t-R+R_0}{bR_0}}\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{\alpha R^2}\int_0^{t-R+R_0}J_0\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\left[\left(\frac{\alpha^2R^2}{a^2}+R_0^2\right)\cos\left(\frac{t-R+R_0-\xi}{a}\right)+\right.$$
$$+R_0^2-\frac{(R_0^2(b^2{R_0}^2-2l(\alpha^2+a^2))+4a^2)(R^2-R_0^2)+2{R_0}^2(R-R_0)^2}{4a^4-b^2{R_0}^4}\times$$
$$\times\left[\cos\left(\frac{t-R+R_0-\xi}{a}\right)-\cos\left(k(t-R+R_0-\xi)\right)e^{-\frac{t-R+R_0-\xi}{bR_0}}\right]+$$
$$+\frac{R_0((b^2R_0^2-2l\alpha^2-1)(R^2-R_0^2)+(R-R_0)^2)}{a(2a^2+b^2R_0^2)}\sin\left(\frac{t-R+R_0-\xi}{a}\right)+$$
$$+\frac{1}{a^2bkR_0(4a^4-b^2R_0^2)}\big[\big((2\alpha^2l-b^2R_0^2)[lR_0^2(\alpha^2+a^2)-2a^2-b^2R_0^4]+.$$
$$+l[b^2R_0^4-2lR_0^2(\alpha^2+a^2)+4\alpha^2a^2]\big)(R^2-R_0^2)-\big(2a^2(2\alpha^2a^2+lR_0^2)-$$
$$\left.\left.-(\alpha^2+1)b^2R_0^4\big)(R-R_0)^2\,\big]\sin\left(k(t-R+R_0-\xi)\right)e^{-\frac{t-R+R_0-\xi}{bR_0}}\right]d\xi\right]\Bigg\},$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\theta=\left(1-\frac{2}{\beta^2}\right)\sigma_r+\frac{2(3\beta^2-4)}{\beta^4R}u-\frac{2}{\beta^2}\eta. \tag{37}$$

Тут $J_0(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку;

$$a=\sqrt{\alpha^2-1};\qquad b=\beta^2-1;\qquad c=2a^2-bR_0^2;\qquad d=\alpha^2-a^2R_0;$$
$$k=\frac{\sqrt{2\beta^2-3}}{bR_0};\qquad l=b-1.$$

З формул (37) видно, що через довільний переріз тіла $r = r_1 > r_0$ проходять два фронти пружних хвиль з швидкостями c_1 поздовжньої пружної хвилі та c_η поширення збурень хімічного потенціалу. При цьому величини стрибків напружень на фронтах рівні

$$[\widetilde{\sigma}_r]_1 = [\widetilde{\sigma}_r]_\eta = \frac{\sigma_* R_0}{a^2 R}, \qquad [\widetilde{\sigma}_\varphi]_1 = [\widetilde{\sigma}_\theta]_1 = \left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\frac{\sigma_* R_0}{a^2 R},$$
$$[\widetilde{\sigma}_\varphi]_\eta = [\widetilde{\sigma}_\theta]_\eta = \left(1 - 2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\frac{\sigma_* R_0}{a^2 R}, \tag{38}$$

де індексами "1", "η" позначено стрибки, що поширюються зі швидкостями c_1 і c_η відповідно.

При $\tau \to \infty$ напруження σ_r, σ_φ, σ_θ і хімічний потенціал η прямують до своїх рівноважних значень

$$\sigma_r{}^0 = \frac{4R_0}{\beta^2 R^2}\left[\left(1 + \frac{1}{R}\right)e^{R_0 - R} - \frac{R_0 + 1}{R}\right],$$
$$\sigma_\varphi{}^0 = \sigma_\theta{}^0 = \frac{2R_0}{\beta^2 R}\left[\frac{R_0 + 1}{R} - \left(1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}\right)e^{R_0 - R}\right], \tag{39}$$
$$\eta^0 = \frac{R_0}{R}\, e^{R_0 - R},$$

що описують неоднорідність стану, зумовлену наявністю поверхні тіла (поверхневі явища в середовищі зі сферичною порожниною).

1. Бурак Я.Й. *Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки* // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1987. – N 12. – С. 19–23.
2. Бурак Я.И., Нагирный Т.С. *Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах* // Прикл.механика. – 1992.– Т.28, N 12. – С. 3–23.
3. Бурак Я.Й., Говда Ю.І., Нагірний Т.С. *Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень*//Доп. НАН України. – 1996. – N 2. – С. 39–43.
4. Новацкий В. Теория упругости. – М., Мир., 1975. – 872 с.

Стаття надійшла до редколегії 21.01.96

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ШАРУ, ЩО ЗУМОВЛЕНЕ ФРИКЦІЙНИМ НАГРІВАННЯМ І ЗМІННИМ В ЧАСІ КОЕФІЦІЄНТОМ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Д. В. Грилицький

Grylitskiy D. V. Transient temperature field of a layer due to frictional heating and time-dependent coefficient of heat conduction. The nonstationary temperature field in a layer which is suspended to frictional heating on one side and to heat exchange with environment with time-dependent coefficient of heat conduction on other side is determined. Fourier limited integral transformation is applied to solve the problem. Received formulae for the temperature contains unknown temperature on the boundary. This temperature can be found from a Volterra integral equation of the second type which can be solved by any numerical method (for example, iterative).

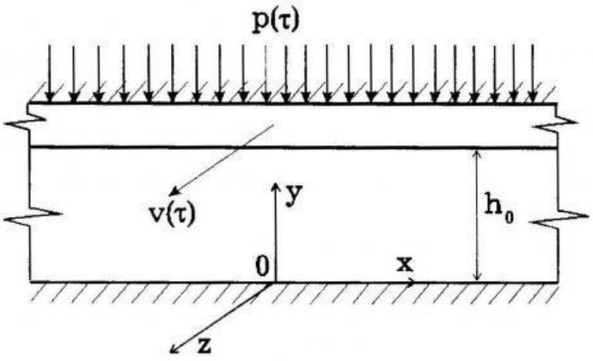
При формулюванні та побудові розв'язку граничних задач нестаціонарної теплопровідності з теплообміном звичайно припускають, що коефіцієнт тепловіддачі є сталою величиною впродовж усього процесу нагрівання тіла. Можна вказати лише поодинокі дослідження (див., наприклад, праці [1-3, 5] і посилання на них), в яких коефіцієнт тепловіддачі вважається змінним з часом або залежним від часу та температури поверхні тіла, що точніше відповідає реальним умовам теплообміну.

Нам не відома жодна праця, в якій було б сформульовано і розв'язано граничну задачу нестаціонарної теплопровідності з урахуванням фрикційного нагрівання і залежності коефіцієнта тепловіддачі від часу. У цій статті визначено нестаціонарне температурне поле в шарі, що зумовлене фрикційним нагріванням шару і залежним від часу коефіцієнтом тепловіддачі та температурою навколишнього середовища.

Нехай маємо плоскопаралельний шар товщини h_0, нижня площина якого жорстко закріплена, а зверху в нього втискується напруженням $p(t)$ жорстка безмежна плита. Припустимо, що плита рухається по поверхні шару з швидкістю $v(\tau)$ у напрямку осі z (рис.).

На площині контакту плити з шаром внаслідок дії тертя, що підпорядковане закону Амонтона, утворюється тепло, яке поширюється вглиб шару.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.



Між нижньою площиною шару і навколишнім середовищем, температура якого є $t_c(\tau)$, проходить теплообмін з відносним коефіцієнтом тепловіддачі $\gamma(\tau)$. При зроблених припущеннях знайдемо температурне поле $T(\tau, y)$ в шарі, яке буде за цих умов функцією часу τ і координати y. Сформульована задача зводиться до інтегрування рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T(\tau,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial T(\tau,y)}{\partial \tau} \tag{1}$$

при таких крайових і початкових умовах: при $\tau > 0$

$$y = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \gamma(\tau)\left[T(\tau,0) - t_c(\tau)\right], \tag{2}$$

$$y = h_0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda^{-1}\alpha f v(\tau) p(\tau); \tag{3}$$

$$T(0,y) = 0. \tag{4}$$

У формулах (1)-(3) уведені такі позначення: f, k, λ, α – віповідно коефіцієнт тертя, температуропровідності, теплопровідності та розподілу теплових потоків між шаром і плитою. Граничну умову (2), наслідуючи [3], перетворимо до вигляду

$$y = 0: \ \frac{\partial T}{\partial y} = \gamma_0\left[T(\tau,0) - T_c(\tau)\right], \ T_c(\tau) = \Gamma t_c(\tau) - (\Gamma - 1)T(\tau,0), \ \Gamma(\tau) = \gamma_0^{-1}\gamma(\tau). \tag{5}$$

Через γ_0 позначено середню величину коефіцієнта тепловіддачі $\gamma(\tau)$ для всього процесу фрикційного нагрівання. Маючи на меті застосувати для розв'язання задачі скінченне інтегральне перетворення [4], введемо підстановку

$$T(\tau,y) = t(\tau,y) + \theta(\tau,y). \tag{6}$$

Тоді для знаходження функції $t(\tau, y)$ отримаємо таку задачу:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \psi(\tau,y), \tag{9}$$

$$\text{при} \quad \tau > 0: \quad y = 0: \quad \frac{\partial t}{\partial y} - \gamma_0 t = 0, \quad y = h_0: \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0; \tag{8}$$

$$t(0,y) = -\theta(0,y), \tag{9}$$

де

$$\psi(\tau, y) = \frac{1}{k}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \varphi(\tau, y). \tag{10}$$

Для функції $\theta(\tau, y)$ маємо умови

$$y = 0: \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \gamma_0(\theta - T_c); \quad y = h_0: \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \lambda^{-1}\alpha f v(\tau)p(\tau). \tag{11}$$

Функція $\theta(\tau, y)$ з наведених умов визначається неоднозначно. Наведемо для прикладу два її вирази, кожний з яких задовольняє умовам (11):

$$\begin{array}{c} \theta(\tau, y) = \frac{T_c(\tau)}{2}(1 + \cos\frac{\pi y}{h_0}) + \lambda^{-1}\alpha f v(\tau)p(\tau)(\gamma_0^{-1} + y), \\ \theta(\tau, y) = T_c(\tau) + \lambda^{-1}\alpha f v(\tau)p(\tau)(\gamma_0^{-1} + y) \end{array}. \tag{12}$$

Зауважимо, що функція $\theta(\tau, y)$, крім умов (11), входить ще у рівняння (7) і початкову умову (9) для визначення функції $t(\tau, y)$. Функція $\psi(\tau, y)$ знаходиться на підставі формул (10) і (12).

Для розв'язання задачі вводимо скінченне інтегральне перетворення

$$\bar{t}(\tau, \mu) = \int_0^{h_0} t(\tau, y)K(\mu, y)\, dy, \tag{13}$$

де μ та $K(\mu, y)$ – відповідно параметр та ядро перетворення, які знаходяться із задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2K}{dy^2} + \mu^2 K = 0, \tag{14}$$

$$y = 0: \quad \frac{dK}{dy} - \gamma_0 K = 0, \qquad y = h_0: \quad \frac{dK}{dy} = 0. \tag{15}$$

Для визначення μ отримуємо трансцендентне рівняння

$$\mu \text{ tg } \mu h_0 = \gamma_0, \tag{16}$$

яке має безліч додатних коренів μ_i.

Для ядра маємо такий вираз

$$K(\mu_i, y) = \sin\mu_i y + \gamma_0^{-1}\mu_i\cos\mu_i y. \tag{17}$$

У просторі зображень замість співвідношень (9)-(12) будемо мати звичайне диференціальне рівняння для функції $\bar{t}(\tau, \mu)$

$$\frac{d\bar{t}(\tau, \mu)}{d\tau} = -k\mu^2\bar{t}(\tau, \mu) - k\overline{\psi}(\tau, \mu) \tag{18}$$

при початковій умові

$$\bar{t}(0, \mu) = -\overline{\theta}(0, \mu), \tag{19}$$

де

$$\overline{\theta}(0,\mu) = \int_0^{h_0} \theta(0,y)K(\mu,y)\,dy, \tag{20}$$

$$\overline{\psi}(\tau,\mu) = \int_0^{h_0} \left[\frac{1}{k}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \varphi(\tau,y)\right] K(\mu,y)dy. \tag{21}$$

Розв'язок рівняння (18) при умові (19) можна записати співвідношенням

$$\overline{t}(\tau,\mu) = e^{-k\mu^2\tau}\left[-\overline{\theta}(0,\mu) - \int_0^{\tau}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial u}e^{k\mu^2 u}\,du + k\int_0^{\tau}\overline{\varphi}(u,\mu)e^{k\mu^2 u}\,du\right], \tag{22}$$

яке можна перетворити до вигляду

$$\overline{t}(\tau,\mu) = -\overline{\theta}(\tau,\mu) + ke^{-k\mu^2\tau}\left[\mu^2\int_0^{\tau}\overline{\theta}(u,\mu)e^{k\mu^2 u}\,du + +\int_0^{\tau}\overline{\varphi}(u,\mu)e^{k\mu^2 u}\,du\right]. \tag{23}$$

Вираз (23) дає розв'язок задачі (7)-(9) в зображеннях.

Температура в шарі визначиться за формулою обернення

$$t(\tau,y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\;\overline{t}(\tau,\mu_i)K(\mu_i,y), \tag{24}$$

де сумування проходить по всіх додатних коренях μ_i рівняння (16), а для знаходження коефіцієнтів C_i служить співвідношення

$$C_i = \left\{\int_0^{h_0}\left[K(\mu_i,y)\right]^2 dy\right\}^{-1}. \tag{25}$$

На підставі (6),(23),(24) маємо таку формулу для обчислення температури $T(\tau,y)$:

$$T(\tau,y) = k\sum_{i=1}^{\infty} C_i K(\mu_i,y)e^{-k\mu_i^2\tau}\left[\mu_i^2\int_0^{\tau}\overline{\theta}(u,\mu_i)e^{k\mu_i^2 u}\,du + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\tau}\overline{\varphi}(u,\mu_i)e^{k\mu_i^2 u}\,du\right]. \tag{26}$$

Якщо скористатися першим виразом (12) для функції $\theta(\tau,y)$, то отримаємо такі співвідношення для $\overline{\theta}(\tau,\mu)$ і $\overline{\varphi}(\tau,\mu)$:

$$\overline{\theta}(\tau,\mu) = \frac{T_c(\tau)}{2}\left\{\frac{1-\cos\mu h_0}{\mu} + \frac{\sin\mu h_0}{\gamma_0} - \right.$$

$$\left. -\frac{\mu h_0^2\left[\gamma_0(1+\cos\mu h_0) - \mu\sin\mu h_0\right]}{\gamma_0(\pi^2-\mu^2 h_0^2)}\right\} + (\lambda\gamma_0)^{-1}\alpha f v(\tau)p(\tau)\times$$

$$\times \left[(h_0 + \gamma_0^{-1} + \gamma_0\mu^{-2}) \sin \mu h_0 - \mu^{-1}\gamma_0 h_0 \cos \mu h_0\right] \tag{27}$$

$$\overline{\varphi}(\tau, \mu) = \frac{\pi^2 \mu T_c(\tau)}{2\gamma_0} \left[\frac{\gamma_0(1 + \cos \mu h_0) - \mu \sin \mu h_0}{\pi^2 - \mu^2 h_0^2}\right]. \tag{28}$$

У правій частині формули (26) (див. співвідношення (27) і (28)) фігурують функції θ і φ, які лінійно залежать через $T_c(\tau)$ від невідомої температури поверхні шару $T(\tau, 0)$.

Покладаючи у (26) $y = 0$ і міняючи порядок сумування та інтегрування, отримуємо для визначення $T(\tau, 0)$ лінійне інтегральне рівняння типу Вольтера другого роду

$$T(\tau, 0) = k \int_0^\tau \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} C_i \overline{\theta}\left[u, T(u, 0), \mu_i\right] \mu_i^2 K(\mu_i, 0) e^{-k\mu_i^2(\tau-u)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \overline{\varphi}\left[u, T(u, 0), \mu_i\right] K(\mu_i, 0) e^{-k\mu_i^2(\tau-u)} \right\} du. \tag{29}$$

Розв'язок рівняння (29) можна отримати, наприклад, методом послідовних наближень. За нульове наближення доцільно взяти температуру навколишнього середовища $T^{(0)}(\tau, 0) = t_c(\tau)$. Тоді у першому наближенні отримаємо розв'язок, який відповідатиме сталому коефіцієнту тепловіддачі γ_0 і температурі навколишнього середовища $t_c(\tau)$, а наступні наближення дадуть поправки, які враховуватимуть зміну коефіцієнта тепловіддачі в процесі фрикційного нагрівання.

Визначивши температуру поверхні $T(\tau, 0)$ і підставивши її у формулу (26), знайдемо розв'язок сформульованої задачі.

Викладену методику можна застосувати і в інших, більш складніших задачах з урахуванням фрикційного нагрівання і залежним від часу коефіцієнтом тепловіддачі.

1. Сідляр М. М. *Визначення нестаціонарного температурного поля в двошаровій пластині у випадку змінного в часі коефіцієнта тепловіддачі*// Прикладна механіка. – 1963. – Т. IX, вып. 3. – С. 308-314.
2. Сидляр М. М. *Об интегрировании уравнения теплопроводности в случае изменения во времени коэффициента теплоотдачи*// Сб. "Тепловые напряжения в элементах конструкций" (Доклады научного совещания), К., Изд. АН УССР. – 1963. – Вып.3. – С. 38-44.
3. Юдин В. М. *Метод решения задач теплопроводности при переменном коэффициенте теплоотдачи*// Сб. "Тепловые напряжения в элементах конструкций" (Доклады научного совещания), К., Наукова думка. – 1965. – Вып.5. – С. 68-75.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М., Физматгиз, 1962. – 767 с.
5. Вигак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – К., Наукова думка, 1979. – 355 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.96

УДК 539.3

КВАЗІСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО КРУГЛОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА З ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ ВІД ТЕРТЯ. НЕОБМЕЖЕНІ В ЧАСІ РОЗВ'ЯЗКИ

Д. В. Грилицький, Ю. Є. Никон

Grylitskiy D. V., Nykon Y. Ye. Quasi-static thermoelastic contact problem for two-layer circular orthotropic cylinder with frictional heating. Time unbounded solutions. The time unbounded solutions of one-dimension transient problem of heatconduction and the corresponding quasi-static thermoelastic problem for a two-layer circular orthotropic cylinder with heat generation due to friction under imperfect heat contact of layers at instant of time far from the beginning are studied. The external radial load and unknown characteristics in a cylinder are represented by time-dependent polynomials. The partial case of the linear dependence is considered in details. The corresponding temperature fields, radial displacements and stresses were found.

Стаціонарна задача теплопровідності та відповідна статична задача термопружності для двошарового ортотропного циліндра з урахуванням фрикційного нагріву була розглянута в праці [1]. Тут ми дослідимо необмежені за часом розв'язки [2] просторово-одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності та відповіної задачі термопружності для двошарового ортотропного циліндра з теплоутворенням від тертя в момент часу, що достатньо віддалений від початкового.

Нехай маємо двошаровий круглий ортотропний циліндр. Один пустотілий циліндр з внутрішнім радіусом $r = a$ і зовнішнім радіусом $r = c$ вставлений в такої ж форми другий циліндр з внутрішнім радіусом $r = c$ і зовнішнім радіусом $r = b$. Механічні та теплофізичні характеристики матеріалу внутрішнього циліндра будемо позначати індексом "1" , а зовнішнього циліндра – індексом "2". Матеріали пакету є циліндрично-ортотропними. Нехай до такої системи з боку внутрішньоі та зовнішньоі ii поверхонь прикладені нормальні стискуючі напруження, що зображені поліномами за часом:

$$\sigma_r^{(1)}(a) = -q^{(1)} = -\sum_{m=0}^{n} q_m^{(1)}\tau^m \qquad \sigma_r^{(2)}(b) = -q^{(2)} = -\sum_{m=0}^{n} q_m^{(2)}\tau^m. \tag{1}$$

Припустимо, що другий циліндр по зовнішній поверхні закріплений так, що не може обертатися відносно своєі осі, а перший циліндр обертається навколо своєі з малою кутовою швидкістю ω.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.

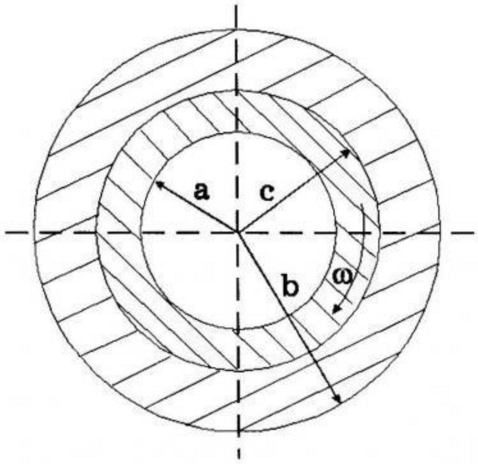


Рис. 1

За рахунок сил тертя, що підпорядковані закону Амонтона, на поверхні співдотику циліндрів буде утворюватися тепло, яке буде поширюватися вглиб кожного з співдотичних тіл. Між циліндрами виконується неідеальний тепловий контакт, а з бічних поверхонь пакету в навколишнє середовище, що має нульову температуру, проходить віддача тепла за законом Ньютона.

Визначимо розподіл температурних полів, напруження і переміщення в пакеті тіл, враховуючи відцентрову силу, що діє на внутрішній циліндр.

Оскільки поставлена задача є плоскою і полярно–симетричною, то всі шукані характеристики будуть функціями лише радіальної координати r та часу τ. Наведемо основні співвідношення, якими користуватимемось в процесі побудови розв'язку задачі. У подальших формулах параметр "i" може приймати значення 1 або 2 в залежності від того, у якому циліндрі визначається шукана характеристика.

Рівняння теплопровідності:

$$k_i\left(\frac{d^2t^{(i)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt^{(i)}}{dr}\right)=\frac{dt^{(i)}}{d\tau}, \tag{2}$$

k_i – коефіцієнти теплопровідності в радіальному напрямку.

Рівняння термопружності в переміщеннях:

$$\frac{d^2u_r^{(i)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r^{(i)}}{dr}-\frac{g^2}{r^2}u_r^{(i)}=\delta_1^{(i)}\frac{dt^{(i)}}{dr}+\delta_2^{(i)}\frac{t^{(i)}}{r}+\delta_3^{(i)}r, \tag{3}$$

де

$$g_i^2=\frac{\beta_{11}^{(i)}}{\beta_{22}^{(i)}},\qquad \delta_1^{(i)}=\left(\frac{\beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)}}{\beta_{22}^{(i)}}\right);$$

$$\delta_2^{(i)}=\left(\frac{\beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)}-\beta_2^{(i)}\beta_{11}^{(i)}+\beta_1^{(i)}\beta_{12}^{(i)}}{\beta_{22}^{(i)}}\right);$$

$$\delta_3^{(i)}=\frac{-\rho_i\omega_i^2\left(\beta_{11}^{(i)}\beta_{22}^{(i)}-(\beta_{12}^{(i)})^2\right)}{\beta_{12}^{(i)}},\quad \beta_{jk}^{(i)}=a_{jk}^{(i)}-\frac{a_{j3}^{(i)}a_{k3}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}};\ \beta_m^{(i)}=\alpha_m^{(i)}-\frac{\alpha_3^{(i)}a_{m3}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}}; \tag{4}$$

$$\omega_1=\omega,\qquad \omega_2=0.$$

Граничні та контактні умови:

а) **теплові**

$$r=a: \quad \frac{dt^{(1)}}{dr}=\gamma_1 t^{(1)}; \quad r=b: \frac{dt^{(2)}}{dr}=-\gamma_2 t^{(2)}; \tag{5}$$
$$r=c: \quad \lambda_1\frac{dt^{(1)}}{dr}-\lambda_2\frac{dt^{(2)}}{dr}=\omega cfp(\tau), \quad \lambda_1\frac{dt^{(1)}}{dr}+\lambda_2\frac{dt^{(2)}}{dr}+h(t^{(1)}-t^{(2)})=0;$$

б)**механічні:**

$$r=a: \quad \sigma_r^{(1)}=-q^{(1)}=-\sum_{m=0}^{n} q_m^{(1)}\tau^m; \quad r=b: \quad \sigma_r^{(2)}=-q^{(2)}=-\sum_{m=0}^{n} q_m^{(2)}\tau^m;$$
$$r=c: \quad \sigma_r^{(1)}=\sigma_r^{(2)})=-p(\tau)=-\sum_{m=0}^{n} p_m\tau^m; \quad u_r^{(1)}=u_r^{(2)}. \tag{6}$$

У формулах (3–6) введені позначення: γ_i – відносні коефіцієнти теплообміну; f – коефіцієнт тертя; h – термічна провідність поверхні контакту циліндрів; λ_i – коефіцієнти теплопровідності; $a_{jk}^{(i)}$ – компоненти тензора пружних податливостей матеріалу; $\alpha_m^{(i)}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення; $p(\tau)$ – тиск між циліндрами.

Отже, сформульована задача звелася до побудови розв'язків диференціальних рівнянь (2),(3) при умовах (5),(6).

Зінтегруємо рівняння теплопровідності (2) при умовах (5). Припустимо, що температурні поля в складових пакету, як і тиск між циліндрами, зображаються у вигляді поліномів за часом
$$t^{(i)}(r)=\sum_{m=0}^{n} t_m^{(i)}(r)\tau^m, \tag{7}$$

де $q_m^{(i)}$ – задані коефіцієнти; $p_m(r), t_m^{(i)}(r)$ – шукані коефіцієнти. Підставивши (7) в (2),(5) та зрівнявши коефіцієнти при однакових степенях τ, отримаємо систему рівнянь для визначення функцій $t_m^{(i)}(r)$ та умови на них:

$$\begin{cases} k_i\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)t_{n-j}^{(i)}=(n-j+1)t_{n-j+1}^{(i)}, \quad j=(1,2,...,n), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)t_n^{(i)}=0; \end{cases} \tag{8}$$

$$r=a: \quad \frac{dt_{n-j}^{(1)}}{dr}=\gamma_1 t_{n-j}^{(1)}; \quad r=b: \quad \frac{dt_{n-j}^{(2)}}{dr}=-\gamma_2 t_{n-j}^{(2)};$$
$$r=c: \quad \lambda_1\frac{dt_{n-j}^{(1)}}{dr}-\lambda_2\frac{dt_{n-j}^{(2)}}{dr}=\omega cfp_{n-j}(\tau), \tag{9}$$
$$\lambda_1\frac{dt_{n-j}^{(1)}}{dr}+\lambda_2\frac{dt_{n-j}^{(2)}}{dr}+h(t_{n-j}^{(1)}-t_{n-j}^{(2)})=0, j=(0,1,...,n).$$

Розв'язки системи рівнянь (8) задаються формулами

$$t_{n-j}^{(i)}(r) = \frac{n!}{(n-j)!}\frac{1}{k_i^j}\sum_{m=1}^{j}\left(a_{j,m}^{(i)} + b_{j,m}^{(i)}\ln r\right)r^{2m}, j = (0, 1, ..., n), \tag{10}$$

де $a_{j,m}^{(i)}, b_{j,m}^{(i)}$ – коефіцієнти інтегрування, які визначаються із співвідношень (8) та (9).

Детальніше розглянемо частинний випадок, покладаючи $n = 1, j = 0, 1$. Підставляючи (10) в (8) і (9), отримаємо систему 12 рівнянь з 12 невідомими, приймаючи p_0, p_1 за відомі величини. Розв'язавши цю систему, отримаємо величини $a_{j,l}^{(i)}$, $b_{j,l}^{(i)}$ у вигляді:

$$\begin{gathered}
a_{00}^{(i)} = \bar{a}_{00}^{(i)}p_1, \qquad a_{11}^{(i)} = \bar{a}_{11}^{(i)}p_1, \quad b_{00}^{(i)} = \bar{b}_{00}^{(i)}p_1, \qquad b_{11}^{(i)} = \bar{b}_{11}^{(i)}p_1, \\
a_{10}^{(i)} = \bar{a}_{10}^{(i)}p_1 + \tilde{a}_{10}^{(i)}p_0, \qquad b_{10}^{(i)} = \bar{b}_{10}^{(i)}p_1 + \tilde{b}_{10}^{(i)}p_0,
\end{gathered} \tag{11}$$

де $\bar{a}_{10}^{(i)}p_1$, $\tilde{a}_{10}^{(i)}p_0$, $\bar{b}_{10}^{(i)}p_1$, $\tilde{b}_{10}^{(i)}p_0$ –деякі коефіцієнти, значення яких тут не наводимо через обмеження обсягу статті.

Для нашого часткового випадку маємо

$$t^{(i)}(r) = t_0^{(i)}(r) + t_1^{(i)}(r)\tau, \tag{12}$$

де

$$\begin{gathered}
t_0^{(i)}(r) = k_i^{-1}\left[(a_{10}^{(i)} + b_{10}^{(i)}\ln r) + (a_{11}^{(i)} + b_{10}^{(i)}\ln r)r^2\right], \\
t_1^{(i)}(r) = a_{00}^{(i)} + b_{00}^{(i)}\ln r.
\end{gathered} \tag{13}$$

Підставивши значення $a_{j,l}^{(i)}, b_{j,l}^{(i)}$ з формул (11) в (12) , одержимо температуру у вигляді

$$t^{(i)}(r) = \phi_0^{(i)}(r)p_0 + \left[\phi_1^{(i)}(r) + \phi_2^{(i)}(r)\right]p_1, \tag{14}$$

де

$$\begin{gathered}
\phi_0^{(i)}(r) = k_i^{-1}(\tilde{a}_{10}^{(i)} + \tilde{b}_{10}^{(i)}\ln r), \quad \phi_1^{(i)}(r) = k_i^{-1}\left[\bar{a}_{10}^{(i)} + \bar{b}_{10}^{(i)}\ln r + (\bar{a}_{11}^{(i)} + \bar{b}_{11}^{(i)}\ln r)r^2\right], \\
\phi_2^{(i)}(r) = \bar{a}_{00}^{(i)} + \bar{b}_{00}^{(i)}\ln r.
\end{gathered}$$

Перейдемо до побудови розв'язку задачі термопружності, тобто до знаходження переміщень $t_r^{(i)}$ і напружень $\sigma_r^{(i)}$в циліндрах. Зінтегруємо рівняння термопружності (3). Для цього, попередньо скориставшись формулами (13), надамо правій частині рівняння (3) вигляду

$$\delta_1^{(i)}\frac{dt^{(i)}}{dr} + \delta_2^{(i)}\frac{t^{(i)}}{r} + \delta_3^{(i)}r = d_1^{(i)}\frac{1}{r} + d_2^{(i)}r + d_3^{(i)}\frac{\ln(r)}{r} + d_4^{(i)}r\ln(r), \tag{15}$$

де

$$d_1^{(i)} = \delta_2^{(i)}(k_i^{-1}a_{10}^{(i)} + \tau a_{00}^{(i)}) + \delta_1^{(i)}(k_i^{-1}b_{10}^{(i)} + \tau b_{00}^{(i)});$$
$$d_2^{(i)} = \delta_2^{(i)}k_i^{-1}a_{11}^{(i)} + \delta_1^{(i)}k_i^{-1}(b_{11}^{(i)} + 2a_{11}^{(i)}) + d_3^{(i)};$$
$$d_3^{(i)} = \delta_2^{(i)}(k_i^{-1}b_{10}^{(i)} + \tau b_{00}^{(i)}); \quad d_4^{(i)} = (\delta_2^{(i)} + \delta_1^{(i)})k_i^{-1}b_{11}^{(i)}. \tag{16}$$

Розв'язок рівняння (3) запишеться у вигляді

$$u_r^{(i)}(r) = A_i^* r^{g_i} + B_i^* r^{-g_i} + A_i(r) r^{g_i} + B_i(r) r^{-g_i}, \tag{17}$$

де A_i^*, B_i^* – сталі інтегрування, $A_i(r)$, $B_i(r)$ – частинні розв'язки неоднорідного рівняння (3), знайдені методом варіації сталих:

$$\begin{aligned} A_i(r) &= z_{11}^{(i)}(r)p_0 + \left[z_{21}^{(i)}(r) + z_{31}^{(i)}(r)\tau\right]p_1 + z_{41}^{(i)}(r); \\ B_i(r) &= z_{12}^{(i)}(r)p_0 + \left[z_{22}^{(i)}(r) + z_{32}^{(i)}(r)\tau\right]p_1 + z_{42}^{(i)}(r), \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$z_{1,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\left[(\delta_2^{(i)}\tilde{a}_{10}^{(i)} + \delta_1^{(i)}\tilde{b}_{10}^{(i)}\eta_{1,j}(r,a_i,g_i) + \delta_2^{(i)}\tilde{b}_{10}^{(i)}\xi_{1,j}(r,a_i,g_i)\right]/(2g_ik_i);$$
$$z_{2,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\Big[(\delta_2^{(i)}\overline{a}_{10}^{(i)} + \delta_1^{(i)}\overline{b}_{10}^{(i)})\eta_{1,j}(r,a_i,g_i)+$$
$$+(\delta_2^{(i)}\overline{a}_{11}^{(i)} + \delta_1^{(i)}(\overline{b}_{11}^{(i)} + 2\overline{a}_{11}^{(i)}))\eta_{3,j}(r,a_i,g_i) + \delta_2^{(i)}\overline{b}_{10}^{(i)}\xi_{1,j}(r,a_i,g_i)+$$
$$+(\delta_2^{(i)} + 2\delta_1^{(i)})\overline{b}_{11}^{(i)}\xi_{3,j}(r,a_i,g_i)\Big]/(2g_ik_i);$$
$$z_{3,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\left[(\delta_2^{(i)}\overline{a}_{00}^{(i)} + \delta_1^{(i)}\overline{b}_{00}^{(i)})\eta_{1,j}(r,a_i,g_i) + \delta_2^{(i)}\overline{b}_{00}^{(i)}\xi_{1,j}(r,a_i,g_i)\right]/(2g_i),$$
$$z_{4,j}^{(i)}(r) = (-1)^{j+1}\delta_3^{(i)}\eta_{3,j}(r,a_i,g_i)/(2g_i); \quad j = 1,2;$$
$$\eta_{j,i}(r,a_i,g_i) = \frac{(r^{j+(-1)^l g_i} - a_i^{j+(-1)^l g_i})}{(j+(-1)^l g_i)};$$
$$\xi_{j,i}(r,a_i,g_i) = \frac{(r^{j+(-1)^l g_i}\ln r - a_i^{j+(-1)^l g_i}\ln a_i)}{(j+(-1)^l g_i)} - \frac{(r^{j+(-1)^l g_i} - a_i^{j+(-1)^l g_i})}{(j+(-1)^l g_i)^2}. \tag{19}$$

Формулу для $\sigma_r^{(i)}(r)$ беремо з [1]:

$$\sigma_r^{(i)}(r) = (Y_1^{(i)})^{-1}\left[[A_i^* + A_i(r)]\Phi_1^{(i)}r^{g_i-1} - [B_i^* + B_i(r)]\Phi_2^{(i)}r^{-g_i-1} - Y_2^{(i)}t^{(i)}(r)\right], \tag{20}$$

де

$$Y_1^{(i)} = \beta_{11}^{(i)}\beta_{22}^{(i)} - (\beta_{12}^{(i)})^2; \quad Y_2^{(i)} = \beta_1^{(i)}\beta_{22}^{(i)} - \beta_2^{(i)}\beta_{12}^{(i)}; \quad \Phi_j^{(i)} = g_i\beta_{22}^{(i)} + (-1)^j\beta_{12}^{(i)}.$$

Сталі інтегрування A_i^* та B_i^* знаходимо з граничних умов (6), використовуючи формули (14), (18), (20):

$$\begin{aligned} A_i^* &= N_1^{(i)} q_0^{(i)} + N_2^{(i)} q_1^{(i)} \tau + N_3^{(i)} p_0^{(i)} + (N_4^{(i)} + N_5^{(i)} \tau) p_1^{(i)} + N_6^{(i)}; \\ B_i^* &= \Pi_1^{(i)} q_0^{(i)} + \Pi_2^{(i)} q_1^{(i)} \tau + \Pi_3^{(i)} p_0^{(i)} + (\Pi_4^{(i)} + \Pi_5^{(i)} \tau) p_1^{(i)} + \Pi_6^{(i)}, \end{aligned} \tag{21}$$

де

$$\begin{gathered} N_1^{(1)} = N_2^{(1)} = Y_1^{(1)} \left[(c/a)^{g_1 - 1} - S_{11}/(\Phi_1^{(1)} a^{g_1 - 1}) \right]; \\ \Pi_1^{(1)} = \Pi_2^{(1)} = Y_1^{(1)} (c/a)^{g_1 - 1} S_{12}; \\ N_1^{(2)} = N_2^{(2)} = -Y_1^{(2)} S_{21}; \qquad \Pi_1^{(2)} = \Pi_2^{(2)} = -Y_1^{(2)} S_{22}; \\ N_j^{(i)} = \Big[\quad [\Delta_{ij} Y_1^{(i)} - Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(a_i)](c_i/a_i)^{g_i - 1} - \theta_{ij} Y_1^{(i)} - \\ -z_{j-2,1}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} + z_{j-2,2}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} + Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(c_i) \Big] S_{i1} + \\ +[Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(a_i) - \Delta_{ij} Y_1^{(i)}]/(\Phi_1^{(i)} a_i^{g_i - 1}); \\ \Pi_j^{(i)} = \Big[\quad [\Delta_{ij} Y_1^{(i)} - Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(a_i)](c_i/a_i)^{g_i - 1} - \theta_{ij} Y_1^{(i)} - \\ -z_{j-2,1}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} + z_{j-2,2}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} + Y_2^{(i)} \phi_{j-3}^{(i)}(c_i) \Big] S_{i2}; \\ N_6^{(i)} = \left[z_{42}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} - z_{41}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} \right] S_{i1}; \\ \Pi_6^{(i)} = \left[z_{42}^{(i)}(c_i) \Phi_2^{(i)} c_i^{-g_i - 1} - z_{41}^{(i)}(c_i) \Phi_1^{(i)} c_i^{g_i - 1} \right] S_{i2}; \\ S_{ij} = \left[(-1)^j \Phi_j^{(i)} (a_i^{(-1)^{j+1} 2 g_i} c_i^{(-1)^j g_i - 1} - c^{(-1)^{j+1} g_i - 1}) \right]^{-1}; \\ a_1 = a \quad ; \quad a_2 = c \quad ; \quad c_1 = c; \quad c_2 = b; \\ \theta_{2j} = 0 \quad ; \quad \theta_{13} = 1 \quad ; \quad \theta_{14} = 0 \quad ; \quad \theta_{15} = 1, \\ \Delta_{1j} = \theta_{2j} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2; \quad j = (3, 4, 5). \end{gathered}$$

У нас залишився невизначеним тиск $p = p_0 + \tau p_1$ між контактуючими циліндрами. Знайдемо його з умови $u_r^{(1)}(c) = u_r^{(2)}(c)$, скориставшись при цьому формулою (17)

$$p_0 = T_{01} q_0^{(1)} + T_{02} q_0^{(2)} + T_{11} q_1^{(1)} + T_{12} q_1^{(2)} + T_2; \quad p_1 = T_{31} q_1^{(1)} + T_{32} q_1^{(2)}, \tag{22}$$

де

$$T_{01} = \frac{-m_1}{(m_3 - n_3)} \quad , \quad T_{02} = \frac{n_1}{(m_3 - n_3)};$$

$$T_{11} = \frac{m_2(n_4 - m_4)}{(m_3 - n_3)(n_5 - m_5)}; \quad T_{12} = \frac{-n_2(n_4 - m_4)}{(m_3 - n_3)(n_5 - m_5)};$$

$$T_{31} = \frac{m_2}{(n_5 - m_5)} \quad ; \quad T_{32} = \frac{-n_2}{(n_5 - m_5)} \quad ; \quad T_2 = \frac{(n_6 - m_6)}{(m_3 - n_3)};$$

$$m_j = N_j^{(1)} c^{g_1} + \Pi_j^{(1)} c^{-g_1} + \Omega_j \left[z_{j-2,1}^{(1)}(c) c^{g_1} + z_{j-2,2}^{(2)}(c) c^{-g_1} \right];$$

$$n_j = N_j^{(2)} c^{g_2} + \Pi_j^{(2)} c^{-g_2} \quad , \quad j = (1, 2, ..., 6);$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0 \quad ; \quad \Omega_s = 1 \quad s = (3, 4, 5, 6).$$

Отже, тиск між циліндрами визначається за формулами (22) з урахуванням всіх вище наведених співвідношень. Підставляючи значення p_0 і p_1 в (14), (17), (20), отримаємо формули для знаходження відповідно температури, переміщень і напружень у пакеті.

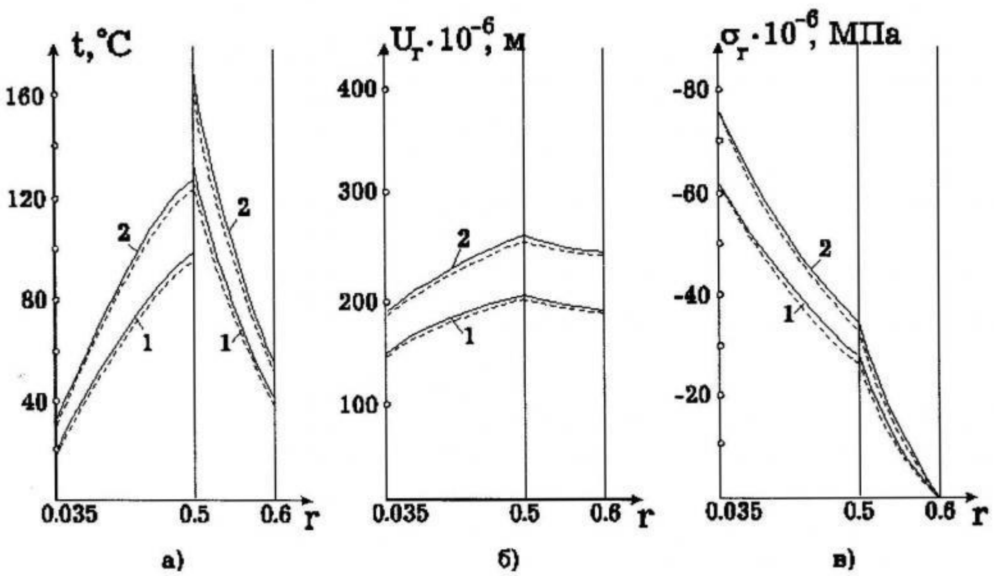


Рис. 2

Числові дослідження задачі проведено для пари тертя склопластик - склопластик:

$$E_r^{(1)} = 0.5 \cdot 10^{10} H/m^2; \quad E_\theta^{(1)} = E_z^{(1)} = 1.45 \cdot 10^{10} H/m^2;$$

$$E_r^{(2)} = 1.0 \cdot 10^{10} H/m^2; \; E_\theta^{(2)} = E_z^{(2)} = 3.75 \cdot 10^{10} H/m^2;$$

$$v_{\theta z}^{(1)} = v_{zr}^{(1)} = 0.23, \quad v_{\theta r}^{(1)} = 0.145, \quad v_{\theta z}^{(2)} = v_{zr}^{(2)} = 0.21, \quad v_{\theta r}^{(2)} = 0.085,$$

$$\alpha_r^{(1)} = 7.1 \cdot 10^{-5} \quad {}^0K^{-1}, \alpha_\theta^{(1)} = \alpha_z^{(1)} = 1.2 \cdot 10^{-5} \quad {}^0K^{-1};$$

$$\alpha_r^{(2)} = 4.0 \cdot 10^{-5} \quad {}^0K^{-1}, \alpha_\theta^{(2)} = \alpha_z^{(2)} = 0.9 \cdot 10^{-5} \quad {}^0K^{-1};$$

$$\lambda_1 = 10 \quad B\text{т}/(m^0K), \lambda_2 = 5B\text{т}/(m^0K)),$$

та значень основних параметрів:

$$q_1^0 = 10^6 M\Pi a, \quad q_1^1 = 0.510^6 M\Pi a, \quad q_2^0 = 0 M\Pi a, \quad q_2^1 = 0 M\Pi a; \quad f = 0.1;$$
$$\omega = 0.3\text{рад/с}, \qquad h = 8000\text{кВт}/(m^2 \quad {}^0K), \quad \gamma_1 = 11m^{-1}, \gamma_2 = 15m^{-1},$$
$$a = 0.035m, \quad c = 0.05m, \quad b = 0.06m$$

для моментів часу $\tau = 120$ сек. та $\tau = 150$сек.

Отримані результати подані на рис. 2 у вигляді графіків, де індексом "1" позначені графіки $t^{(i)}(r)$, $u_r^{(i)}(r)$, $\sigma_r^{(i)}(r)$ для моменту часу $\tau = 120$ сек., а індексом "2"– для моменту часу $\tau = 150$ сек. Пунктиром зображені графіки тих же функцій без врахування відцентрової сили.

Як видно з графіків, максимальні значення температури та радіальних переміщень досягаються на поверхні контакту. Функція температури розривна, бо ми припускали неідеальний тепловий контакт. Врахування відцентрової сили приводить до збільшення напружень у пакеті на величину порядку 10^3 МПа, приріст температури дуже незначний (приблизно $10^{-3} \quad {}^0C$), переміщення у пакеті зростають на величину порядку $10^{-8}m$.

1. Гриліцький Д. В., Мандзик Ю. І. *Температурне поле і термопружний стан двошарового ортотропного циліндра за фрикційного нагріву*// Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. - 1994. – – Вип. 40. – С. 57-63.

2. Підстригач Я. С. *Температурне поле в стінках постійної товщини при асимптотичному тепловому режимі*// Зб. "Температурні напруження в тонкостінних конструкціях". Видавництво АН УРСР, К., 1959. – С. 109-122.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.96

УДК 517.956

МЕТОД ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У КОМПОЗИТНОМУ ТІЛІ СКІНЧЕННОГО ПЕРЕРІЗУ

В. С. Грицевич

Gritsevich V. S. The continued-function method for plane problem of heat conduction in composite solid with limited section. The concept of an L - canonical plane area is introduced. The problem of heat conduction is considered which models the heat spreading in prism with arbitrary limited section that warmed up by prismatic inclusions. The third type of boundary condition on the bound of prism is set. The solving equation is received, which contains the asymmetric plane delta-function. The solution of a problem is obtained in form of double representation with help of series. Firstly the heat function is found in inclusion sections. The whole solution is represented in the closed form by coefficients that are found from the system of linear equations.

Нехай L - лінійний диференціальний оператор, визначений на функціях, заданих у плоскій області V. Назвемо цю область L-канонічною, якщо у ній відомий розв'язок двовимірної задачі на власні значення для оператора L.

Розглянемо задачу теплопровідності для обмеженої $-\Delta$-канонічної (Δ – оператор Лапласа) області V, яка містить M тепловиділяючих включень V_m $-\Delta$-канонічої форми, $m = 1, ..., M$. Задача моделює поширення тепла в призмі скінченного перерізу з призматичними нагрівальними елементами. Розв'язувальне рівняння має вигляд

$$-\Delta t = \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{\lambda_m} S_m(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_0} - 1 \right) \left. \frac{\partial t}{\partial n_m} \right|_{\Gamma_m} \delta_m^-. \tag{1}$$

Тут

$$S_m(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (x_1, x_2) \notin V_m, \\ 1, \text{ якщо } (x_1, x_2) \in V_m, \end{cases}$$

δ_m^- – двовимірна асиметрична дельта-функція [1].

На границі V відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона, тобто задається гранична умова 3-го роду

$$\left. \left(\frac{\partial t}{\partial n} + \beta t \right) \right|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.

Метод продовження функцій полягає у тому, що розв'язок спочатку шукається в підобластях V_m, а потім продовжується на всю область V.

Для шуканого розв'язку $t(x_1, x_2)$ розглядається його подвійне зображення:

$$t(x_1, x_2) = t_0(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^{M} \theta_m(x_1, x_2) S(x_1, x_2), \tag{3}$$

$$t(x_1, x_2) = \frac{\lambda_0 t_0(x_1, x_2)}{\lambda(x_1, x_2)} + \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \chi_m(x_1, x_2) S_m(x_1, x_2), \tag{4}$$

де функції θ_m, χ_m зв'язані співвідношенням $\lambda_m(t_0 + \theta_m) = \lambda_0(t_0 + \chi_m)$ на V_m і задовольняють граничні умови: $\theta_m|_{\Gamma_m} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \chi_m}{\partial n_m}\right|_{\Gamma_m} = 0.$

Останні рівності забезпечують виконання умов ідеального теплового контакту між основним матеріалом та матеріалом включень.

Можна показати, що θ_m, χ_m задовольняють такі рівняння:

$$-\Delta\theta_m = -\Delta t_0 + \frac{Q_m}{\lambda_m}, \qquad -\Delta\chi_m = -\Delta t_0 + \frac{Q_m}{\lambda_0} \text{ в } V_m. \tag{5}$$

Функції θ_m, χ_m шукаємо як розвинення в ряди за відповідними системами ортонормованих функцій:

$$\theta_m = \sum_{j=1}^{\infty} B_j^m Y_j^m, \qquad \chi_m = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^m Z_k^m \text{ на } V_m, \tag{6}$$

де Y_j^m, Z_k^m є розв'язками таких задач на знаходження власних значень:

$$-\Delta Y_j^m = \nu_j^m Y_j^m, \;\; Y_j^m|_{\Gamma_m} = 0; \quad -\Delta Z_k^m = \rho_k^m Z_k^m, \;\; \left.\frac{\partial Z_k^m}{\partial n_m}\right|_{\Gamma_m} = 0.$$

Функцію t_0 шукаємо як розвинення у такий ряд

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i \quad \text{на} \quad V, \tag{7}$$

де X_i є розв'язками задачі на знаходження власних значень:

$$-\Delta X_i = \mu_i X_i, \quad \left.\left(\frac{\partial X_i}{\partial n} + \beta X_i\right)\right|_{\Gamma} = 0.$$

Зіставляючи (5),(6),(7), визначаємо C_k^m, а звідси, на підставі (4), (9),(10) можна записати

$$t|_{V_m} = \frac{Q_m}{\lambda_m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle 1, Z_k^m \rangle_m}{\rho_k^m} Z_k^m + \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left(X_l - \mu_l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle X_l, Z_k^m \rangle_m}{\rho_k^m} Z_k^m \right), \tag{8}$$

де $t|_{V_m}$ – розв'язок $t(x_1, x_2)$ на V_m, який підлягає продовженню на всю область V, $\langle u, v\rangle_m$ – скалярний добуток на V_m.

З (3) випливає і друге зображення

$$t|_{V_m} = \sum_{l=1}^{\infty} A_l X_l + \sum_{j=1}^{\infty} B_j^m Y_j^m, \tag{9}$$

яке спільно з (8) дає змогу визначити коефіцієнти B_j^m. При цьому з (5) випливає, що

$$-\Delta t_0 = \sum_{m=1}^{M} \Delta\theta_m S_m + \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{\lambda_m} S_m,$$

звідки, враховуючи попередні співвідношення, визначаємо коефіцієнти A_i і для їх знаходження отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$A_i = \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{il} A_l + F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad \text{де} \qquad \Phi_{il} = \Phi_{il}^1 + \Phi_{il}^2,$$

$$\Phi_{il}^1 = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^{M} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_m}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^m \langle X_i, Y_j^m\rangle_m \langle Y_j^m, X_l\rangle_m,$$

$$\Phi_{il}^2 = \frac{\mu_l}{\mu_i} \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_0}{\lambda_m} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_j^m}{\rho_k^m} \langle X_i, Y_j^m\rangle_m \langle Y_j^m, Z_k^m\rangle_m \langle Z_k^m, X_l\rangle_m,$$

$$F_i = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{\lambda_m} \left(\langle 1, X_i\rangle_m - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_j^m}{\rho_k^m} \langle 1, Z_k^m\rangle_m \langle Z_k^m, Y_j^m\rangle_m \langle Y_j^m, X_i\rangle_m \right).$$

Відповідно до вищезгаданого, на підставі значень A_i, одержуємо коефіцієнти B_j^m і розв'язок задачі (1),(2) має вигляд

$$t(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{j=1}^{\infty} B_j^m Y_j^m(x_1, x_2) \right] S_m(x_1, x_2).$$

1. Грицевич В.С. *Двовимірні асиметричні узагальнені функції математичної фізики*// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 111-115.

Стаття надійшла до редколегії 24.03.95

УДК 539.377

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ СОМІЛІАНО В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ, ЯКА ВРАХОВУЄ ОРТОТРОПІЮ ЧАСУ РЕЛАКСАЦІЇ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ

Б. В. Ковальчук, О. І. Гой

Koval'chuk B. V., Hoy O. I. The generalization of Somiliano theorem of generalized thermoelasticity which is considered the orthotropy of time relaxation of a heat stream. The dynamic problem of generalized thermoelasticity of anizotropic bodies is considered, taking into consideration the orthotropy of the time relaxation of a heat stream. Using the integral-differential equations of heat conductivity the generalized Somiliano equations are obtained, of the generalized thermoelasticity of anizothropic bodies for the case when the relaxation time of heat stream has different values for main directions.

У монографії [4] викладено основні результати узагальненої термопружності анізотропних тіл для випадку, коли час релаксації теплового потоку є однаковий для всіх напрямків. У багатьох задачах динамічної термопружності час релаксації теплового потоку має різні значення і тоді узагальнений закон теплопровідності набуває вигляду

$$\left(1 + \tau_p \frac{\partial}{\partial \tau}\right) q_p = -\lambda_{pj}^t t_{,j} \qquad (p, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

де τ_p – час релаксації теплового потоку в напрямку осі x_p, λ_{pj}^t – коефіцієнти теплопровідності, q_p – компоненти вектора теплового потоку, t – температурне поле.

Для такої релаксаційної моделі (1) одержано інтегро-диференціальні рівняння [2] і доведено теореми єдиності та взаємності розв'язків крайової задачі узагальненої взаємозв'язаної динамічної термопружності [3,4].

У даній праці ми розглянули аналогічну динамічну задачу термопружності анізотропного тіла і довели теорему Соміліано для випадку, коли час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямків.

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω, обмежену поверхнею S, у природному стані має сталу температуру t_0.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.

Внаслідок дії масових сил X_i або джерел тепла W_t у тілі виникають переміщення U_i і приріст температури $\Theta = t - t_0$, що у свою чергу веде до виникнення деформацій e_{ij} та напружень σ_{ij}.

При знаходженні функцій $U_i = U_i(x, r)$, $\Theta = \Theta(x, r)$, $x \in \Omega$, $\tau > 0$ використовуємо дві системи величин $\{X_i', W_t', U_i', \Theta'\}$ і $\{X_i'', W_t'', U_i'', \Theta''\}$. Спочатку визначаємо переміщення U_i в тілі Ω. Для цього вибираємо миттєву зосереджену силу у вигляді $X_i' = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij}$, припустивши, що вона прикладена в точці ξ тіла Ω і спрямована вздовж осі x_γ. При цьому вважаємо, що теплові джерела відсутні, тобто $W_t' = 0$. Спричинені цією силою переміщення і приріст температури позначимо відповідно $U_i' = U_i^{(\gamma)}(x, \xi, \tau)$ і $\Theta' = V^{(\gamma)}(x, \xi, \tau)$.

Функції $U_i^{(\gamma)}(x, \xi, \tau), V^{(\gamma)}(x, \xi, \tau)$ знаходимо із взаємозв'язаної системи рівнянь [3,2]:

$$C_{ijkl}U_{k,l_j}(x, \xi, \tau) + \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij} = \rho\ddot{U}_i^{(\gamma)}(x, \xi, \tau) + \beta_{ij}V_{,j}^{(\gamma)}(x, \xi, \tau),$$
$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\int_0^\tau V_{,ij}^{(\gamma)}(x, \xi, \zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta = \frac{t_0}{2}\beta_{ij}(\dot{U}_{i,j}^{(\gamma)} + \dot{U}_{j,\tau}^{(\gamma)}) + C_e\dot{V}^{(\gamma)}(x, \xi, \tau) \tag{2}$$

при однорідних початкових умовах

$$\begin{cases} U_i^{\gamma}(x, \xi, 0) = 0, & \dot{U}_i^{(\gamma)}(x, \xi, 0) = 0, \\ V^{(\gamma)}(x, \xi, 0) = 0, & x, \xi \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

де $\delta(\eta) = \dfrac{dS(\eta)}{d\eta}$; $\delta_+(\tau) = \dfrac{dS_+}{d\tau}$; $S(\tau)$, $S_+(\tau)$ – симетрична та асиметрична одиничні функції; δ_{ij} – символ Кронекера; C_{ijkl} – декартові компоненти сталого тензора пружної жорсткості; $\beta_{ij} = \alpha_{kl}^t C_{ijkl}$, α_{ij}^t – температурні коефіцієнти лінійного розширення та зсуву; C_e – об'ємна теплоємність; ρ – густина.

Підставивши визначені величини X_i', W_t', $U_i^{(\gamma)}$ $V^{(\gamma)}$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [4], одержимо рівняння

$$\begin{aligned} t_0 s\overline{U}_\gamma(\xi, s) = t_0 s\int_\Omega \overline{x}_i(x, s)\overline{U}_i^{(\gamma)}(x, \xi, s)d\Omega - \int_\Omega \overline{W}_t(x, s)\overline{V}^{(\gamma)}(x, \xi, s)d\Omega + \\ + t_0 s\int_S \left[\overline{P}_i(x, s)\overline{U}_i^{(\gamma)}(x, \xi, s) - \overline{P}_i^{(\gamma)}(x, \xi, s)\overline{U}_i(x, s)\right]ds - \\ - \int_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s + 1}\left[\overline{\Theta}_{,i}(x, s)\overline{V}^{(\gamma)}(x, \xi, s) - \overline{P}_i^{(\gamma)}(x, \xi, s)\overline{U}_i(x, s)\right]n_j ds, \end{aligned} \tag{4}$$

де $P_i^{(\gamma)} = \sigma_{ij}^{(\gamma)}n_j$, причому $\sigma_{ij}^{(\gamma)}$ – напруження на поверхні S, спричинені силою $x_i' = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij}$, а n_j – напрямні косинуси нормалі до цієї поверхні.

Застосувавши тепер до рівняння (4) обернене перетворення Лапласа, знайдемо

$$\dot{U}_\gamma(\xi,\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_\Omega X_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial U_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\Omega +$$

$$+\int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_S \left[P_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial U_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0} - U_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial P_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}\right]dS-$$

$$+\ \frac{1}{t_0}\int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_S \frac{\lambda_{ij}^T}{\tau_i}\left[V^{(\gamma)}(x,\xi,\tau-\tau_0)\varphi_i(x,\tau_0) - h(x,\tau_0)\psi_i(x,\xi,\tau-\tau_0)\right]n_j dS, \quad (5)$$

де

$$\varphi_i(x,r) = \int\limits_0^\tau \Theta_{,i}(x,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta, \quad \psi_i(x,\xi,\tau) = \int\limits_0^\tau V_{,i}^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta.$$

Для визначення температури вибираємо тепер джерело тепла в точці ξ тіла Ω у вигляді $W_t'' = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$ і вважаємо, що масові сили відсутні, тобто $X_i'' = 0$. Виникаючі при цьому переміщення $U_i'' = \tilde{U}_i(x,\xi,\tau)$ і приріст температури $\Theta'' = \tilde{V}(x,\xi,\tau)$ знаходимо з системи рівнянь [3,2]

$$C_{ijkl}\tilde{U}_{k,l_j}(x,\xi,\tau) = \rho\ddot{\tilde{U}}_i(x,\xi,\tau) + \beta_{ij}\tilde{V}_{,j}(x,\xi,\tau),$$

$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i}\int\limits_0^\tau \tilde{V}_{,ij}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta = \frac{t_0}{2}\beta_{ij}(\dot{\tilde{U}}_{i,j}+\dot{\tilde{U}}_{j,i}) + C_e\dot{\tilde{V}} - \delta(x-\xi)\delta_+(\tau) \quad (6)$$

при початкових умовах

$$\tilde{U}_i(x,\xi,0)=0, \quad \dot{\tilde{U}}_i(x,\xi,0)=0, \quad \tilde{V}(x,\xi,0)=0, \quad \dot{\tilde{V}}(x,\xi,0)=0, \quad x,\xi\in\Omega. \quad (7)$$

Підставивши визначені величини $X_i'', W_t'', \tilde{U}_i, \tilde{V}$ у перетворене за Лапласом рівняння взаємності [4], одержимо

$$\bar{t}(\xi,s) = \int\limits_\Omega \overline{W}_t(x,s)\overline{\tilde{V}}(x,\xi,s)d\Omega - t_0 s\int\limits_\Omega \overline{X}_i(x,s)\overline{\tilde{U}}_i(x,\xi,s)d\Omega +$$

$$+\int\limits_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i s+1}\left[\overline{\Theta}_{,i}(x,s)\overline{\tilde{V}}(x,\xi,s) - \overline{h}(x,s)\overline{\tilde{V}}_{,i}(x,\xi,s)\right]n_j dS-$$

$$-\quad t_0 s\int\limits_S \left[\overline{P}_i(x,s)\overline{\tilde{U}}_i(x,\xi,s) - \overline{P}_i^{(w)}(x,\xi,s)\overline{U}_i(x,s)\right]dS, \quad (8)$$

де $P_i^{(w)} = \sigma_{ij}^{(w)} n_j$, причому $\sigma_{ij}^{(w)}$ – напруження на поверхні S, викликані джерелом тепла $W_t'' = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$, а n_j – напрямні косинуси нормалі до цієї поверхні.

Після застосування до рівняння (8) оберненого перетворення Лапласа знаходимо

$$\dot{U}_\gamma(\xi,\tau) = \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega W_t(x,\tau-\tau_0)\tilde{V}(x,\xi,\tau_0)d\Omega -$$

$$- t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_\Omega X_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial \tilde{U}_i(x,\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0} d\Omega -$$

$$- t_0 \int_0^\tau d\tau_0 \int_S \left[P_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial \tilde{U}_i^{(}x,\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0} - U_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial P_i^{(w)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0} \right] dS +$$

$$+ \int_0^\tau d\tau_0 \int_S \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} \left[\Theta_{,i}(x,\tau-\tau_0)\tilde{\varphi}_i(x,\xi,\tau_0) - h(x,\tau-\tau_0)\tilde{\psi}_i(x,\xi,\tau_0) \right] n_j dS, \qquad (9)$$

де

$$\tilde{\varphi}_i(x,r) = \int_0^\tau \tilde{V}_{,i}(x,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta, \quad \tilde{\psi}_i(x,\xi,\tau) = \int_0^\tau \tilde{V}_{,i}^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right)d\zeta.$$

Формули (5),(9) є узагальненими формулами Соміліано для задач динамічної термопружності, які враховують ортотропію часу релаксації теплового потоку.

1. Ковальчук Б.В., Гой О.І. *Узагальнене енергетичне рівняння і теорема єдиності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла*// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 104-109.
2. Ковальчук Б.В., Гой О.І. *Узагальнене варіаційне рівняння і теорема взаємності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла*// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 41. – С. 71-75.
3. Коляно Ю.М., Ковальчук Б.В., Гой О.І. *Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока*// Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1988. – N 9. – С. 81-83.
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К., Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.95

УДК 539.3

КВАЗІСТАТИЧНА ТЕРМОПРУЖНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА З ВРАХУВАННЯМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ

Ю. І. Мандзик

Mandzyk Y. I. Quasistatic thermoelastic contact problem for two-layer cylinder with heat generation. Numerical analysis. The numerical analysis of quasistatic thermoelastic contact problem for two-layer hollow circular cylinder with heat generation, imperfect heat contact and Vincler's condition of elastic fixing on the external border of the considered system is carried out. The influence of a thermal conductivity of the contact region and a hardness of the external fixing system on main contact characteristics of the system is investigated.

Робота багатьох машин та механізмів пов'язана з відносним переміщенням спряжених деталей (вузлів тертя), що супроводжується фрикційним нагріванням. Розробка методів оцінки надійності вузлів тертя має велике значення, оскільки від цього залежить надійність роботи всієї машини. На шляху побудови розв'язку цієї проблеми виникає важлива задача визначення температурних полів та контактних тисків у співдотичних елементах вузла з урахуванням фрикційного нагрівання.

Серед розповсюджених вузлів тертя виділимо спряження, яке можна моделювати двошаровим порожнистим круговим циліндром. Для даного спряження визначимо нестаціонарне температурне поле та квазістатичний розподіл напружень і переміщень. Для побудови розв'язку граничної задачі термопружності застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часовою координатою.

1. Формулювання задачі. Розглянемо два пружних пустотілих циліндри, поперечний переріз яких показаний на рис. 1. Один циліндр з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім радіусом r_0, вставлений у такої ж форми другий циліндр з внутрішнім радіусом r_0 і зовнішнім радіусом r_2 . На обох зовнішніх поверхнях розглядуваної двошарової системи можуть бути задані радіальні напруження або радіальні зміщення, або ж мішані умови. Для визначеності розглянемо задачу для випадку, коли на внутрішній поверхні задані радіальні напруження, а на зовнішній – умови типу Вінклера.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A20.

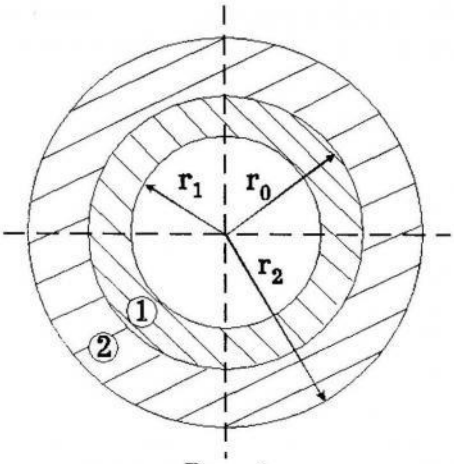


Рис. 1

Припустимо, що один з циліндрів (наприклад внутрішній) обертається відносно другого з кутовою швидкістю ω. За рахунок дії сил тертя на співдотичній поверхні циліндрів проходить нестаціонарне теплоутворення. Між зовнішніми поверхнями двошарового пакету і навколишнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона, а тепловий контакт циліндрів є неідеальним. При зроблених допущеннях визначимо в пакеті температурне поле, напруження і переміщення, зокрема тиск між циліндрами. Оскільки поставлена задача є плоскою (плоска деформація) і осесиметричною, то всі шукані характеристики будуть функціями координати r та часу t.

Введемо такі позначення: $T^{(j)}$ – температура; λ_j – коефіцієнти теплопровідності; E_j – модулі пружності; ν_j – коефіцієнти Пуассона; α_j – коефіцієнти лінійного теплового розширення; $U_r^{(j)}$ – радіальні переміщення; $\sigma_r^{(j)}$ – радіальні напруження; $\sigma_\theta^{(j)}$ – кільцеві напруження; $p(t)$ – контактний тиск; α_j^T – коефіцієнти теплообміну; k_j – коефіцієнти температуропровідності; λ – параметр з умови пружного закріплення Вінклера; h – термічна провідність ділянки контакту; σ_* – параметр з розмірністю напружень, який характеризує амплітуду навантаження на внутрішній границі системи; $p_c(t)$ – безрозмірна функція, що задає закон зміни навантаження на внутрішній границі пакету; f – коефіцієнт тертя.

Розподіл температури і переміщень у двошаровому пакеті визначається з розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 T^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{(j)}}{\partial r} = \frac{1}{k_j}\frac{\partial T^{(j)}}{\partial t} \qquad (j = 1, 2), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 U_r^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(j)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}U_r^{(j)} = \alpha_j \frac{1+\nu_j}{1-\nu_j}\frac{\partial T^{(j)}}{\partial r}, \tag{2}$$

$$r_1 \leqslant r \leqslant r_0, \quad j = 1; \qquad r_0 \leqslant r \leqslant r_2, \quad j = 2; \qquad 0 < t < \infty$$

при механічних граничних та контактних умовах:

$$\begin{aligned} r = r_1: &\qquad \sigma_r^{(1)} = -\sigma_* p_c(t), \\ r = r_2: &\qquad \sigma_r^{(2)} + \lambda U_r^{(2)} = 0, \\ r = r_0: &\qquad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} = -p(t), \\ &\qquad U_r^{(1)} = U_r^{(2)}, \end{aligned} \tag{3}$$

теплових умовах:

$$\begin{aligned} r = r_1: &\qquad \lambda_1 \tfrac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \alpha_1^T T^{(1)} = 0, \\ r = r_2: &\qquad \lambda_2 \tfrac{\partial T^{(2)}}{\partial r} + \alpha_2^T T^{(2)} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$r = r_0: \qquad \lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = f\omega p(t) r_0,$$
$$\lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} = h(T^{(2)} - T^{(1)})$$

і початковій умові для температури:

$$T^{(j)} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0. \tag{5}$$

Співвідношення для напружень мають вигляд:

$$\sigma_r^{(j)} = \frac{E_j}{1 - 2\nu_j} \left[\left((1 - \nu_j) \frac{\partial U_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{\nu_j}{r} U_r^{(j)} \right) \frac{1}{1 + \nu_i} - \alpha_j T^{(j)} \right], \tag{6}$$

$$\sigma_\theta^{(j)} = \frac{E_j}{1 - 2\nu_j} \left[\left(\nu_j \frac{\partial U_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{(1 - \nu_j)}{r} U_r^{(j)} \right) \frac{1}{1 + \nu_i} - \alpha_j T^{(j)} \right]. \tag{7}$$

Зазначимо, що у дещо простішому формулюванні така задача була розглянута у праці [1]. Вважалося, що на зовнішній границі системи задано нульові переміщення (тобто жорстке защемлення), а тепловий контакт між циліндрами є ідеальний. У стаціонарному формулюванні при чотирьох комбінаціях граничних умов ця задача розв'язана у праці [2].

2. Метод розв'язання та аналіз результатів. Для розв'язування крайової задачі (1)-(4) використано інтегральне перетворення Лапласа за часовою координато. Було отримано систему восьми лінійних алгебраїчних рівнянь після розв'яування якої, використовуючи відомі теореми розкладу та згортки, шукані поля температури, переміщень та напружень зображено у вигляді суми ряду

$$F^{(j)}(\rho, \tau) = \left\{ \frac{\hat{F}^{(j)}(\rho, 0)}{\Delta_*(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{F}^{(j)}(\rho, s_k)}{s_k \left[\partial_s \Delta_*(s) \right]_{s = s_k}} e^{\tau s_k} \right\} * \frac{\partial p_c(\tau)}{\partial \tau}, \tag{8}$$

де $F^{(j)}(\rho, \tau) = \left(T^{(j)}(\rho, \tau); U_r^{(j)}(\rho, \tau); \sigma_r^{(j)}(\rho, \tau); \sigma_r^{(j)}(\rho, \tau) \right)$ - векторна функція, що описує розподіл температури, переміщень, радіальних та кільцевих напружень у внутрішньому ($j = 1$) та зовнішньому ($j = 2$) циліндрах ; $\Delta_*(s)$ – визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку було отримано в процесі розв'язування; $\Delta_*(s) = 0$ – характеристичне рівняння задачі, а s_k – його корені; "$*$" – означає операцію згортки функцій; $\hat{F}^{(j)}(\rho, s_k)$ – деякі векторні функції, конкретний вигляд яких не наводимо через їх громіздкість. Зазначимо, що розв'язок розглянутої задачі виражається через модифіковані функції Бесселя та функції Макдональда нульового та першого порядків.

Числове дослідження задачі проводилося при таких вхідних даних: $r_1 = 3.5 \cdot 10^{-2}$ м ; $r_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ м ; $r_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ м ; $f = 0.1$.
Матеріал внутрішнього циліндра - сталь:
$E_1 = 190 \cdot 10^9$ Па; $\nu_1 = 0.3$; $\alpha_1 = 14 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $\lambda_1 = 21$ Вт/м К; $k_1 = 5.9 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.
Матеріал зовнішнього циліндра - мідь:
$E_2 = 121 \cdot 10^9$ Па; $\nu_2 = 0.33$; $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $\lambda_2 = 381$ Вт/м К; $k_2 = 101.9 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Як відомо з практики, реальний тепловий контакт між тілами є неідеальний, а параметр h (термічна провідність ділянки контакту між циліндрами) фактично визначає цю неідеальність, тому з цієї точки зору цікаво дослідити як залежать від нього визначальні характеристики контакту.

У задачах, що розглядають контактну взаємодію тіл, тиск на межі розділу тіл є однією з найбільш важливих характеристик. А у задачах з урахуванням фрикційного нагрівання, контактний тиск відіграє вирішальну роль, оскільки теплоутворення в такій системі залежить від нього в значній мірі. Ось чому для практики дуже важливо знати закон зміни контактного тиску p з часом та момент коли p виходить на стаціонарний режим.

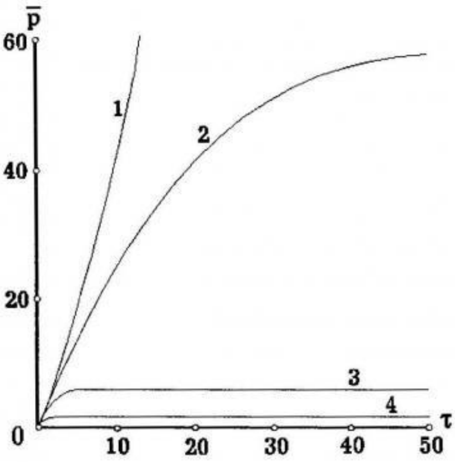


Рис. 2

Залежність обезрозміреного контактного тиску $\overline{p} = p(t)/\sigma_*$ від безрозмірного часу $\tau = tk_1/r_0^2$ при різних значеннях параметра h та при $Bi_1 = r_0\alpha_1^T/\lambda_1 = 5.0$, $Bi_2 = r_0\alpha_2^T/\lambda_2 = 0.5$, $\lambda = 10^{12}$ Па/м, $\omega = 0.52$ рад/с показана на рис. 2. Характерною особливістю є зменшення контактного тиску при зростанні термічної провідності ділянки контакту h. На першій кривій $h = 0$ Вт/К м^2, а контактний тиск зростає до безмежності. Друга крива відповідає значенню $h = 20$ Вт/К м^2, а контактний тиск прямує до 63.5 (час виходу на стаціонарний режим приблизно рівний 60).

Третя крива побудована при $h = 100$ Вт/К м^2. Тут контактний тиск за час $\tau \approx 6$ виходить на значення 6.3. При $h = 1000$ Вт/К м^2 побудована четверта крива на рис. 2. Як видно з рисунку, p виходить на значення 0.46 за час $\tau \approx 1$. Коли $h \to \infty$, термічний контакт стає ідеальним, а це в свою чергу приводить до подальшого спадання стаціонарного значення на яке виходить з часом контактний тиск.

На зовнішній границі нашої системи задано умову пружного закріплення Вінклера [3]. Ця умова дає можливість отримувати в граничних випадках або відсутність навантаження на зовнішній границі системи ($\lambda = 0$), або жорстке защемлення ($\lambda = \infty$). У проміжних випадках $0 < \lambda < \infty$ ця умова моделює дію незв'язаних між собою пружинок з жорсткістю λ, що розміщені на зовнішній границі пакету.

Залежність обезрозміреної контактної температури шарів $\overline{T}^{(j)} = T^{(j)}/T_*$ від часу τ при різних значеннях параметра λ та при $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, h = 10000$ Вт/К м^2 , $\omega = 0.16$ рад/с зображена на рис. 3. Суцільними лініями на ньому зображено контактну температуру внутрішнього циліндра, а штриховими – зовнішнього.

Перша, друга, третя та четверта пари кривих побудовані відповідно при таких значеннях параметра λ : 0, 10^{12}, $2.5 \cdot 10^{12}$, $3 \cdot 10^{12}$ Па/м. Як видно з малюнку, зростання параметра λ , а це відповідає більш жорсткішому защемленню зовнішнього краю, приводить до збільшення контактної температури шарів для часу $\tau \to \infty$ і при $\lambda = 3 \cdot 10^{12}$ Па/м маємо її безмежне зростання. Отже, як показав числовий аналіз задачі, збільшення термічної провідності ділянки контакту між циліндрами, а це рівносильно зменшенню термічного опору, веде до спадання абсолютних величин основних характеристик

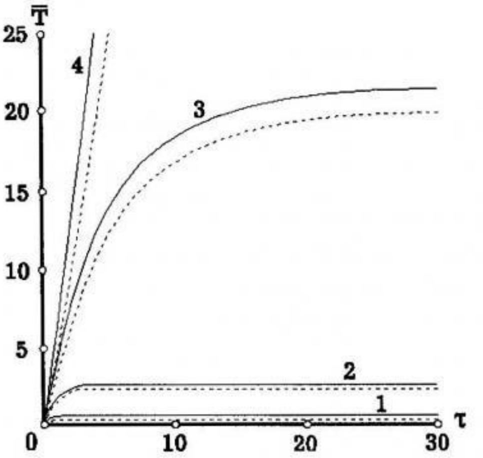


Рис. 3

взаємодії, таких як контактний тиск, температура, переміщення.

А при збільшенні параметра λ з умови пружного закріплення Вінклера на зовнішній границі системи, відбувається зростання контактного тиску, температур та інших характеристик контакту, що при недостатній тепловіддачі може спричинити заклинювання циліндрів.

Підсумовуючи отримані результати можна стверджувати, що кінцеві розв'язки даної контактної задачі термопружності адекватно відображають фізичну сторону явища, що описується цією математичною моделлю.

1. Пир'єв Ю. О., Гриліцький Д. В., Мокрик Р. І. *Нестаціонарне температурне поле та термопружний стан двошарового порожнистого циліндра при фрикційному нагріванні*// Прикладна механіка. – 1995. – Т. 31, N 1. – С. 44-50.

2. Гриліцький Д. В., Кульчицький-Жигайло Р. Д. *Плоска контактна задача термопружності для двошарового круглого порожнистого циліндра з теплоутворенням* // Ф Х М М. – 1994. – N 6. – С. 24-30.

3. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. – М., Машиностроение, 1988. – 256 с.

Стаття надійшла до редколегії 22.01.96

УДК 512.553

Вовк Р. В. Кольца частных расслоенных произведений колец// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 5–16.

Введено понятие расслоенного произведения кручений. Исследуются кольца частных расслоенных произведений колец относительно определенных таким образом кручений.
Библиогр. 18 назв.

УДК 512.536

Гутик О. В. Об ослаблении топологии прямой суммы на полугруппе Брака// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 17–21.

На полугруппе Брака топологической полугруппы с компактным идеалом существует только топология прямой суммы. Описан метод ослабления топологии прямой суммы на полугруппе Брака регулярной топологической инверсной полугруппы без минимального идемпотента.
Библиогр. 4 назв.

УДК 517.95

Онишкевич Г. М. Устойчивость по Ляпунову вариационного неравенства для уравнения типа колебания пластинки// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 22–31.

В работе рассмотрено вариационное неравенство. Для этого неравенства построен класс существования и единственности решения, который определяется коэффициентами неравенства. Доказано устойчивость по Ляпунову нулевого решения.
Библиогр. 2 назв.

УДК 517.95

Бобык И. Е., Бобык Е. И., Пташник Б. И. Краевые задачи для безтипных дифференциальных уравнений// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 32–39.

В работе исследована корректность задачи с локальными двухточечными условиями по выделенной переменной t и условиями периодичности по $x_1, ..., x_p$ для общих (независимо от типа) уравнений с частными производными с постоянными комплексными коэффициентами. Разрешимость задачи связана с проблемой малых знаменателей, при оценке снизу которых используется метрический подход. Библиогр. 9 назв.

УДК 517.95

Бокало Н. М. Корректность первой краевой задачи для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 40–47.

Рассмотрена первая краевая задача для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка в неограниченной области. Получены условия существования единственного обобщенного решения без предположений о его поведении и возрастании исходных данных на бесконечности. Установлена оценка обобщенного решения, из которой следует непрерывная его зависимость от правой части уравнения.
Библиогр. 11 назв.

УДК 517.95

Задорожная Н. Н. Нелокальная краевая задача для систем параболических уравнений произвольного порядка// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 48–55.

В статье исследована краевая задача с нелокальными условиями по временной переменной и условиями периодичности по пространственным переменным для системы параболических по Шилову уравнений произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Установлены условия существования и единственности решения задачи. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые возникают при построении решения в виде рядов по системе ортогональных функций.
Библиогр. 7 назв.

УДК 517.95

Волошин В. В. Периодическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 56–62.

В работе методом погранслоя строится асимптотическое разложение решения по малому параметру периодической задачи для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений первого порядка. Библиогр. 10 назв.

УДК 517.95

Иванчов Н. И. Об одной обратной задаче для параболического уравнения// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 63–71.

В работе рассмотрена обратная задача определения зависящего от времени неизвестного множителя при старшем коэффициенте в параболическом уравнении. Установлены условия существования и единственности решения данной задачи.
Библиогр. 6 назв.

УДК 517.512

Притула Я. Г. Сходимость рядов Фурье почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 72–75.

Для почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве доказаны достаточные условия сходимости рядов из коэффициентов Фурье. Эти результаты являются обобщением признаков Саса и Зигмунда абсолютной сходимости рядов Фурье.
Библиогр. 7 назв.

УДК 517.97

Козицкий В. А. Об одной задаче опуклого программирования// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 76–83.

Предложен метод решения одной задачи выпуклого программирования в пространстве l_2 с ограничениями, содержащими нетеров оператор.
Библиогр. 8 назв.

УДК 515.12

Пенцак Е. Я. Конструкция Гартмана-Мицельского в категории k_ω-пространств// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 84–86.

Для каждого k_ω-пространства X мы оснащаем пространство $HM(X)$ k_ω-топологией, порожденной конструкцией Гартмана-Мицельского. Эта топология полностью описана для некоторых "хороших" сильно счетномерных k_ω-пространств.
Библиогр. 6 назв.

УДК 539.3

Дыяк И. И., Кухарчук Ю. А., Сулым Г. Т. Исследование упругого равновесия плоских тел непрямым методом граничных элементов// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 87–95.

В данной работе описана числовая реализация непрямого метода граничных элементов для решения граничных интегральных уравнений плоской задачи линейной теории упругости. Для исследования напряженно-деформированного состояния тел с угловыми точками используется методика раздвоения узлов. Обсуждается вопрос вычисления сингулярных интегралов в раздвоенных узлах. Сравниваются результаты работы программ, которые реализуют непрямой метод граничных элементов на основании подходов Бубнова-Галёркина и коллокаций.
Библиогр. 10 назв.

УДК 539.374

Галазюк В. А., Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г. Большие упруго-пластические деформации круговой мембраны под действием равномерного давления// Вiсник Львiвського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 96–101.

На основании подхода Девиса-Надаи рассматривается задача о больших упруго-пластических деформациях круговой мембраны под действием равномерного давления. После сведения исходной нелинейной краевой проблемы к задаче Коши решение получено методом Рунге-Кутта. Определено критическое давление потери несущей способности и остаточная форма оболочки после разгрузки для процесса формовки алюминиевой оболочки.
Библиогр. 9 назв.

УДК 539.377

Бугрий Н. И. Оптимизация схем силового нагружения и нагрева толстостенных термоупругих оболочек// Вiсник Львiвського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 102–106.

Формулируется математическая постановка и предлагается методика решения пространственных квазистатических задач оптимизации термоупругого состояния толстостенных оболочек при их силовом нагружении и нагреве. В качестве критерия оптимизации принимается функционал енергии упругой деформации оболочки, а функций управления - интенсивность силовой нагрузки и температура. Функции управления удовлетворяют дополнительным интегральным ограничениям моментного типа. Задача оптимизации сведена к решению двух краевых задач относительно вектора перемешений и сопряженного к нему вектора.
Библиогр. 2 назв.

УДК 539.3

Говда Ю. И., Нагирный Т. С. Классификация задач локально-градиентной механики и одна динамическая задача для среды со сферической полостью// Вiсник Львiвського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 107–114.

Дана классификация задач локально-градиентной механики. При постановке динамических задач учитывается инерционность как механического поступательного движения, так и упругих смещений массы. Приведено и проанализировано решение несвязанной динамической инерционной задачи для среды со сферической полостью.
Библиогр. 4 назв.

УДК 539.3

Грилицкий Д. В. Нестационарное температурное поле слоя, обусловленное фрикционным нагревом и переменным во времени коэффициентом теплоотдачи// Вiсник Львiвського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 115–119.

Определяется нестационарное температурное поле в плоскопараллельном слое, обусловленное фрикционным нагревом его на одной стороне и теплообменом с окружающей средой с переменным во времени коэффициентом теплоотдачи с противоположной стороны. Для решения задачи применяется конечное интегральное преобразование Фурье. Полученная формула для вычисления температурного поля содержит неизвестную температуру на границе слоя, которая находится из линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Его удобно решать методом последовательных приближений.
Библиогр. 5 назв.

УДК 539.3

Грилицкий Д. В., Никон Ю. Е. Квазистатическая задача термоупругости для двухслойного круглого ортотропного цилиндра с теплообразованием от трения// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 120–127.

Определяются неограниченные во времени решения пространственно–одномерной задачи теплопроводности и соответствующей задачи термоупругости для двухслойного круглого ортотропного цилиндра (цилиндрическая ортотропия) с теплообразованием от трения и при неидеальности теплового контакта составляющих в моменты времени, достаточно отдаленные от начального.

Внешние радиальные нагрузки и искомые характеристики в цилиндре представляются полиномами по времени. В виде примера детально рассмотрен частный случай линейной зависимости, для которого определены температурные поля, радиальные перемещения и напряжения.
Библиогр. 2 назв.

УДК 517.956

Грицевич В. С. Метод продолжения функций для двумерной задачи теплопроводности в композитном теле ограниченного сечения// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 128–130.

Определяется понятие L - каноничности плоской области. Рассмотрена задача теплопроводности, которая моделирует распространение тепла в призме с произвольным ограниченным сечением, нагревающейся призматическими включениями. На границе призмы задано граничное условие 3-го рода. Получено разрешающее уравнение, которое содержит асимметричную двумерную дельта-функцию. Решение задачи ищется в виде двойного представления искомой температуры с помощью рядов. Сначала находится температура в сечении включений, а затем она продолжается на сечение всей призмы. Окончательное решение представлено в замкнутом виде через коэфициенты, которые определяются из системы линейных уравнений.
Библиогр. 1 назв.

УДК 539.377

Ковальчук Б. В., Гой О. И. Обобщение теоремы Сомилиано в обобщенной термоупругости, учитывающую ортотропию времени релаксации теплового потока// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 131–134.

Рассматривается динамическая задача обобщенной термоупругости анизотропных тел, учитывающая ортотропию времени релаксации теплового потока. На основании интегро-дифференциальных уравнений выведены обобщенные уравнения Сомилиано обобщенной термоупругости анизотропных тел для случая, когда время релаксации теплового потока имеет различные значения для главных направлений. Полученные уравнения дают возможность определить перемещения и температуру внутри тела, если они заданы на его поверхности.
Библиогр. 4 назв.

УДК 539.3

Мандзик Ю. И. Квазистатическая термоупругая контактная задача для двухслойного цилиндра с учётом теплообразования. Численный анализ// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1997. – Вып. 47. – С. 135–139.

В работе проведён численный анализ квазистатической контактной задачи термоупругости для полого кругового цилиндра с учётом теплообразования, неидеальности теплового контакта и условия упругого закрепления Винклера на внешней границе системы. Исследовано влияние термической проводимости участка контакта и жёсткости внешней системы закрепления на основные характеристики контакта цилиндров.
Библиогр. 3 назв.