УДК 519.48

СТРУКТУРА ДУО-КІЛЕЦЬ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ СКРУТАМИ ТА РЕГУЛЯРНІ КІЛЬЦЯ ЗІ СКІНЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ МАКСИМАЛЬНИХ ІДЕАЛІВ

І. Я. Тушницький

Tushnytskyi I. Ya. A structure of duo-rings with locally determined torsion theory and regular rings with the finite set of maximal ideals. In this note is shown that the regular duo-rings are rings with locally determined torsion theories. As consequences the structure of regular duo-rings with finite number of the maximal ideals is described.

Кільце називається дуо-кільцем, якщо в ньому кожний односторонній ідеал є двостороннім. Використовуватимемо такі позначення: R – дуо-кільце з $1 \neq 0$, $Id(R)$ – множина всіх його ідеалів, $\operatorname{mspec}(R)$ – множина всіх максимальних ідеалів, що містять I, $R_{\mathfrak{M}}$ – локалізація кільця R стосовно максимального ідеалу $\mathfrak{M}$, $J(R)$ – радикал Джекобсона кільця R.

Для кожного ідеалу I і будь-якого елемента $r \in R$ визначимо ідеал $I : r$ як множину $\{x \in R / xr \in I\}$.

Сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R називається напередрадикальним фільтром кільця R, якщо вона задовольняє таким умовам:

(T_1) $\forall I \in Id(R)\ \forall J \in \mathfrak{F} : J \subseteq I \Rightarrow I \in \mathfrak{F}$;

(T_2) $\forall I, J \in \mathfrak{F} : I \cap J \in \mathfrak{F}$;

(T_3) $\forall i \in \mathfrak{F}\ \forall r \in RI : r \in \mathfrak{F}$, [3].

Якщо виконується ще умова:

$(T4)$ $\forall I \in Id(R)\ \forall J \in \mathfrak{F}\ \forall j \in JI\ ;\ j \in \mathfrak{F} \Rightarrow I \in \mathfrak{F}$

то сім'я $\mathfrak{F}$ називається радикальним фільтром кільця R [3].

Через $\mathcal{R}_0(R)$ позначимо сім'ю всіх ненульових ідеалів кільця R і їх скінченних добутків. Для первинних кілець $\mathcal{R}_0(R)$ – це сім'я всіх ненульових ідеалів кільця R, для непервинних кілець $\mathcal{R}_0(R)$ – це сім'я всіх, враховуючи і нульовий, ідеалів кільця R. Зауважимо, що якщо R – дуо-кільце, то сім'я $\mathcal{R}_0(R)$ утворює радикальний фільтр кільця R.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18E40.

Радикальний (напередрадикальний) фільтр назвемо ненульовим, якщо він складається лише з ідеалів, які належать $\mathcal{R}_0(R)$. Для первинних кілець це означає, що радикальний (напередрадикальний) фільтр не містить нульового ідеалу.

Через $\mathcal{F}(R)$ $(\mathcal{F}'(R))$ позначимо сім'ю всіх ненульових радикальних (напередрадикальних) фільтрів кільця R.

Означення 1. *Кільце R називається кільцем з локально визначеними скрутами (напередскрутами), якщо відображення*

$$\Phi : \mathcal{F}(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M}\in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}}) \ (\Phi' : \mathcal{F}'(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M}\in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})),$$

визначене так

$$\Phi(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M}\in \mathrm{mspec}(R)} \ (\Phi'(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M}\in \mathrm{mspec}(R)})$$

для будь-якого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(R)$ $(\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R))$ є бієктивним [1], [5], [6], [7], [8].

Зауважимо, що в [1] відображення Φ було введено для комутативних областей цілісності. Позначимо через $\mathcal{B}(R)$ сім'ю всіх ідеалів кільця R, що містяться не більш ніж в скінченній кількості максимальних ідеалів кільця R.

Означення 2. *Кільце R називається h-локальним, якщо воно задовольняє такі умови:*

(i) кожний ненульовий первинний ідеал кільця R міститься в єдиному максимальному ідеалі;

(ii) кожний ненульовий елемент з R міститься не більш, ніж в скінченній кількості максимальних ідеалів [2] [5], [6], [7],[8].

Поняття h-локальності було введене Матлісом для комутативних областей [2]. Для кожного ідеалу I кільця R визначимо ідеал $K(I)$ кільця $R : K(I) = \{x \in R/I : x \in \mathcal{B}(R)\}$. Якщо a – деякий елемент кільця R, то через $K(a)$ позначимо $K(aR)$.

Означення 3. *Кільце R називається h-квазілокальним, якщо воно задовольняє умову (i) з означення 2, а також умову:*

(ii$'$) для кожного ненульового елемента a з R маємо $K(a) \in \mathcal{B}(R)$ [5], [6], [7], [8].

Зауважимо, що кожне h-локальне кільце є h-квазілокальним. Для дуо-кілець, що задовольняють умову

$$\forall \mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)\ \forall r \in R\ \forall d \notin \mathfrak{M} \exists d' \notin \mathfrak{M}\ \exists c \in R : rd' = drc, \qquad (*)$$

справедливе таке твердження.

Твердження 1. *Кільце R є кільцем з локально визначеними скрутами (напередскрутами) тоді і тільки тоді, коли воно h-квазілокальне (h-локальне).*

Доведення можна знайти в праці [8]. Добре відомий такий факт.

Лема 1. *Якщо R – регулярне в сенсі Неймана кільце, то R – напівпросте за Джекобсоном [4].*

Покажемо, що регулярне в сенсі Неймана дуо-кільце задовольняє умову $(*)$. Для цього доведемо таку лему.

Лема 2. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і I – будь-який ідеал кільця R. Тоді, якщо $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T}$, то $I = \bigcap_{i\in T} \mathfrak{M}_i$.*

Зауваження. Якщо множина T одноелементна, наприклад, $T = \{j\}$, то перетин $I = \bigcap_{i\in T} \mathfrak{M}_i$ ми розуміємо як максимальний ідеал $\mathfrak{M}_j$. Якщо ж T порожня, то цей перетин ми розуміємо як все кільце R.

Доведення. Нехай I – будь-який ідеал кільця R і $\mathrm{mspec}(R/I) = \{\mathfrak{M}_i/I \mid i \in I\}$. Кільце R є регулярним, тому R/I є також регулярним, а за лемою 1 воно є півпростим, тобто $\bigcap_{i\in T}(\mathfrak{M}_i/I) = 0$. Оскільки $\bigcap_{i\in T}(\mathfrak{M}_i/I) = (\bigcap_{i\in T} \mathfrak{M}_i)/I$, то за лемою 1 $(\bigcap_{i\in T} \mathfrak{M}_i)/I = 0$. Отже, $\bigcap_{i\in T} \mathfrak{M}_i \subseteq I$. Включення $I \subseteq \bigcap_{i\in T} \mathfrak{M}_i$ випливає з умови $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T}$, тому $I = \bigcap_{i\in T} \mathfrak{M}_i$. Лему доведено.

Отже, в регулярному дуо-кільці кожний ідеал є перетином максимальних ідеалів.

Лема 3. *Нехай R – дуо-кільце, I, J – довільні ідеали кільця R, $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1}$, $V(J) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_2}$ для деяких множин K_1 і K_2. Тоді $V(IJ) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$.*

Доведення. Нехай I, J – деякі ідеали кільця R і $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1}$, $V(J) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_2}$. Очевидно, що $IJ \subseteq \bigcap_{i\in K_1\cup K_2} \mathfrak{M}_i$. Покажемо, що множину $K_1 \cup K_2$ не можна збільшити. Припустимо, що $IJ \subseteq \bigcap_{i\in L} \mathfrak{M}_i$, де L строго містить $K_1 \cup K_2$. Нехай $j \in L$, але $j \notin K_1 \cup K_2$. Тоді $IJ \subseteq \mathfrak{M}_j$. Оскільки $\mathfrak{M}_j$ максимальний, то він первинний. Але тоді $I \subseteq \mathfrak{M}_j$ або $J \subseteq \mathfrak{M}_j$, тобто $i \in K_1$ або $j \in K_2$, а це суперечить умові, що L строго містить $K_1 \cup K_2$. Отже, $V(IJ) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$.

Лема 4. *Регулярне дуо-кільце задовольняє умову $(*)$.*

Доведення. Розглянемо довільні елементи r і d кільця R. Нехай $V(rR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1}$, $V(dR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_2}$ для деяких множин K_1 і K_2. Оскільки кільце R є дуо-кільцем, то $rdR = rRdR$. Тоді за лемою 3 $V(rdR) = V(rRdR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$. Аналогічно можна довести, що $V(drR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$. Звідси, за лемою 2, $rdR = drR$. З цієї рівності видно, що існує таке $c \in R$, що $rd = drc$. Лему доведено.

Лема 5. *Нехай R – регулярне дуо-кільце. Тоді кожний первинний ідеал кільця R є максимальним.*

Доведення. Нехай P – первинний ідеал і $a \notin P$. Тоді існує таке $x \in R$, що $axa = a$. Звідси $a(xa - 1) = 0$ або $a(xa - 1)R = 0$. Враховуючи, що R – дуо-кільце, маємо $(xa - 1)R = R(xa - 1)$. З цього випливає, що $aR(xa - 1) = 0$. Ідеал P – первинний, тому $xa - 1 \in P$. Отже, $1 \in P + aR$, тобто $P + aR = R$ для будь-якого $a \in R\backslash P$. Таким чином, P – максимальний.

Лема 6. *Якщо сім'я ідеалів $\mathfrak{F} = \{J \in Id(R)/J \supseteq I\}$ є радикальним фільтром, то виконується рівність $I^2 = I$.*

Доведення. Розглянемо ідеал $I^2 : i$ для будь-якого $i \in I$. Згідно того, що $I^2 : i = \{x \in R/xi \in I^2\}$, маємо $I \subseteq I^2 : i$; $I \in \mathfrak{F}$, то з умови $T1$ випливає, що $I^2 : i \in \mathfrak{F}$. Але останній вираз має місце для будь-яких $i \in I$ та $I \in \mathfrak{F}$, тому за умовою $T4$ маємо $I^2 \in \mathfrak{F}$. Це означає, що $I \subseteq I^2$. Включення $I^2 \subseteq I$ випливає з того, що I є ідеалом кільця R. Отже, $I^2 = I$. Лему доведено.

Твердження 2. *Регулярне за Нейманом дуо-кільце R є h-локальним тоді і тільки тоді, коли* $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$.

Доведення. ($\Rightarrow$). Нехай R – h-локальне. Припустимо, що R не має дільників нуля. Оскільки R є регулярним за Нейманом, то за [4] воно є тілом і, отже, $\mathrm{mspec}(R) = \{0\}$. Тепер припустимо, що R має дільники нуля. Тоді з h-локальності випливає, що $V(0)$ – скінченна, тобто $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$.

($\Leftarrow$). На підставі леми 5 кожний первинний ідеал є максимальним і, крім того, $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$, тому кільце R є h-локальним.

Лему доведено.

Надалі будемо розглядати лише ті регулярні дуо-кільця, для яких $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$. Справедливе таке твердження.

Лема 8. *Нехай R регулярне дуо-кільце і* $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. *Тоді* $|\mathcal{F}'(R)| = 2^n$.

Доведення. Кільце R є дуо-кільцем, тому за лемою 4 воно задовольняє умову $(*)$, а оскільки $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$, то R є h-локальним. Тоді за твердженням 1 кільце R є кільцем з локально визначеними скрутами. Це означає, що відображення

$$\Phi' : \mathcal{F}'(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}}),$$

задане формулою $\Phi(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)}$ для будь-якого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R)$, є бієктивним. Розглянемо канонічне відображення $f_{\mathfrak{M}} : R \longrightarrow R_{\mathfrak{M}}$, де $R_{\mathfrak{M}}$ – локалізація кільця R стосовно максимального ідеалу $\mathfrak{M}$. З означення кільця дробів маємо, що $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \{x \in R / \exists t \notin \mathfrak{M} : xt = 0\}$. Доведемо, що $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Спочатку встановимо включення $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$. Візьмемо $x \in R$ таке, що $xt = 0$ для деякого $t \notin \mathfrak{M}$. Зауважимо, що $xRt = 0$. Справді, $xtR = 0$. Оскільки R – дуо-кільце, то $tR = Rt$. Звідси, і з попередньоі рівності, $xRt = 0$. Ідеал $\mathfrak{M}$ первинний, $0 \subseteq \mathfrak{M}$ і $t \notin \mathfrak{M}$, тому $x \in \mathfrak{M}$. Включення доведено. Тепер покажемо, що $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}}$. Справді, нехай $x \in \mathfrak{M}$. Кільце R – регулярне, тому існує $x' \in R$ таке, що $xx'x = x$. Звідси $x(x'x - 1) = 0$. Оскільки $s \in \mathfrak{M}$, то $xx' - 1 \notin \mathfrak{M}$. Отже, для $x \in \mathfrak{M}$ існує таке $t = xx' - 1 \notin \mathfrak{M}$, що $xt = 0$. Включення доведене. З умови $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$ випливає, що $R_{\mathfrak{M}}$ є тілом. Справді, $R_{\mathfrak{M}}$ є локальним кільцем з єдиним максимальним ідеалом $\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}$. З того, що $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, маємо $\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}} = 0_{\mathfrak{M}}$, тобто $0_{\mathfrak{M}}$ є єдиним власним ідеалом кільця $R_{\mathfrak{M}}$. Отже, $R_{\mathfrak{M}}$ є тілом. Оскільки в $R_{\mathfrak{M}}$ є лише два ідеали $0_{\mathfrak{M}}$ і $R_{\mathfrak{M}}$, то $R_{\mathfrak{M}}$ має лише два напередрадикальних фільтри $\{0_{\mathfrak{M}}\}$ і $\{0_{\mathfrak{M}}, R_{\mathfrak{M}}\}$. Таким чином $|\prod_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})| = 2^n$. Вищезазначене відображення Φ' є бієктивним, тому $|\mathcal{F}'(R)| = |\prod_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})|$. Отже, $|\mathcal{F}'(R)| = 2^n$.

Лема 9. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і* $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$. *Тоді* $\mathcal{F}'(R) = \mathcal{F}(R)$, *тобто кожний напередрадикальний фільтр є радикальним.*

Доведення. Оскільки R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$, то за лемою 7 кільце R є h-локальним. Як ми зауважили раніше, з h-локальності випливає h-квазілокальність. Тоді за твердженням 1 кільце R є кільцем з локально визначеними скрутами, тобто є бієктивним відображення $\Phi : \mathcal{F}(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}})$, задане наступним чином $\Phi(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)}$ для будь-якого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(R)$. Оскільки $\{0_{\mathfrak{M}}\}$, $\{0_{\mathfrak{M}}, R_{\mathfrak{M}}\}$ є також радикальними фільтрами, то $\mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}}) = \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})$ для будь-якого $\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)$. З цього факту, а також з бієктивності відображень Φ і Φ' випливає наступна низка рівностей: $|\mathcal{F}(R)| = |\prod_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}})| = |\prod_{\mathfrak{M}\in\mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})| = |\mathcal{F}'(R)|$. З включення $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{F}'(R)$ і $|\mathcal{F}(R)| = |\mathcal{F}'(R)|$, маємо $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}'(R)$, тобто кожний напередрадикальний фільтр є радикальним.

Наслідок. *Нехай R – дуо-кільце і $\mathrm{mspec}(R) < \infty$. Тоді R – регулярне тоді і тільки тоді, коли для будь-якого I з $Id(R)$ виконується рівність $I^2 = I$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай R – регулярне. Тоді за лемою 9 кожний напередрадикальний фільтр є радикальним. Для довільного ідеалу I розглянемо напередрадикальний фільтр $\mathfrak{F}_I = \{J \in Id(R)/I \subseteq J\}$. Оскільки $\mathfrak{F}_I$ є також радикальним фільтром, то за лемою 6 виконується рівність $I^2 = I$.

($\Leftarrow$) Нехай $I^2 = I$ для будь-якого $I \in Id(R)$. Тоді для будь-якого $a \in R$ маємо $aRaR = aR$. Оскільки R – дуо-кільце, то $aR = Ra$. З цієї і попередньої рівності маємо $aRa = aR$. Взявши в правій частині $1 \in R$ маємо, що існує $x \in R$ таке, що $axa = a$.

Доведення завершено.

Лема 10. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді $|Id(R)| = 2^n$.*

Доведення. Розглянемо відображення $\phi : Id(R) \longrightarrow \mathcal{F}'(R)$, визначене наступним чином $\phi(I) = \mathfrak{F}_I$, де $I \in Id(R)$ і $\mathfrak{F}_I = \{J \in Id(R)/I \subseteq J\}$. Легко бачити, що воно є ін'єктивним, бо різним ідеалам відповідають різні напередрадикальні фільтри. Справді, нехай $I, J \in Id(R)$ і $\mathfrak{F}_I = \mathfrak{F}_J$. З включення $\mathfrak{F}_J \subseteq \mathfrak{F}_I$ випливає, що $I \in \mathfrak{F}_J$, а, отже, $J \subseteq I$. Аналогічно, з включення $\mathfrak{F}_J \subseteq \mathfrak{F}_I$ випливає, що $I \subseteq J$, тому $I = J$. Отже, множина ідеалів ізоморфна деякій підмножині напередрадикальних фільтрів. Покажемо, що відображення ϕ є сюр'єктивним, тобто, що для кожного $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R)$ існує ідеал I кільця R такий , що $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_I$. Нехай $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R)$. Покладемо $I = \cap\{J/J \in \mathfrak{F}\}$. Оскільки $\mathfrak{F}$ скінченна, як підмножина скінченної множини $Id(R)$, то за умовою $T2$ з означення напередрадикального фільтру $I \in \mathfrak{F}$. Всі ідеали більші, ніж I, належать $\mathfrak{F}$ за умовою $T1$ з цього означення. Інших ідеалів в $\mathfrak{F}$ немає, бо I міститься в кожному ідеалі з $\mathfrak{F}$ як перетин всіх ідеалів з $\mathfrak{F}$. Таким чином, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_I$, і відображення ϕ є бієктивним. Звідси і з леми 8 випливає рівність $|Id(R)| = |\mathcal{F}'(R)| = 2^n$.

Нехай $\mathrm{mspec}(R) = \{\mathfrak{M}\}_{i\in K}$. Оскільки $|\mathrm{mspec}(R)| = n$, то $|K| = n$. Нехай 2^K – множина всіх підмножин множини K, $M(R)$ – множина, що складається з різних максимальних ідеалів кільця R, їх всеможливих перетинів, нульового ідеалу і кільця R. Розглянемо відображення $f : 2^K \longrightarrow M(R)$, задане так : $f(T) = \cap_{i\in T}\mathfrak{M}_i$, де $T \in 2_K$. Перетин тут розуміється як в зауваженні до леми 2. Відомо, що $|2^K| = 2^{|K|}$. З рівності $|K| = n$ маємо, що $|2^K| = 2^n$. Відображення f – сюр'єктивне, тому $|M(R)| \leqslant 2^n$. Відображення f ін'єктивне тоді і тільки тоді, коли $|M(R)| = 2^n$.

Отже, ми довели таку лему:

Лема 11. *Нехай R – кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді відображення f – бієктивне тоді і тільки тоді, коли $|M(R)| = 2^n$.*

Лема 12. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$. Тоді має місце наступне твердження:*

(**) Кожний власний ідеал кільця R є або максимальним ідеалом або перетином максимальних ідеалів, причому перетини різних максимальних ідеалів різні.

Доведення. Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді за лемою 2 кожний ідеал кільця R є максимальним ідеалом або перетином максимальних ідеалів. Покажемо, що перетини різних максимальних ідеалів різні. Припустимо супротивне, тобто, що існують хоча б два однакові перетини різних максимальних ідеалів. Тоді відображення f не є бієктивним, а, отже, за лемою 11 $|M(R)| < n$. Оскільки $M(R) = Id(R)$, то ми отримали суперечність з лемою 10, яка говорить, що $|Id(R)| = 2^n$. Лему доведено.

Лема 13. *Нехай R – дуо-кільце, для якого виконується твердження (**). Тоді* $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i = \bigcap_{i\in T_1\cap T_2}\mathfrak{M}_i$.

Доведення. $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_k$, $\bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_k$, де k – будь-який елемент з $T_1\cap T_2$. Звідси $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_k$. Отже, $V(\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i) \supseteq \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T_1\cap T_2}$. Нехай $j \notin T_1\cap T_2$. Для визначеності $j\notin T_1$. Оскільки кільце задовольняє твердженню (**), то

$$\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i \neq \bigcap_{i\in T_1\cup\{j\}}\mathfrak{M}_i.$$

Звідси існує таке $t\in R$, що $t\in\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i$, але $t\notin\bigcap_{i\in T_1\cup\{j\}}\mathfrak{M}_i$. Отже, $t\notin\mathfrak{M}_j$ і $t\in \bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i$. Таким чином, $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i \not\subseteq \mathfrak{M}_j$ для будь-якого $j\notin T_1\cap T_2$. Тому $V(\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T_1\cap T_2}$ і за лемою 2 $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i = \bigcap_{i\in T_1\cap T_2}\mathfrak{M}_i$. Лему доведено.

Лема 14. *Нехай eR є мінімальним ідеалом кільця R. Тоді eR є тілом.*

Доведення. Припустимо, що в кільці eR є ненульовий власний ідеал J. Тоді $JR = JeR$ на підставі того, що e є одиницею кільця eR. Оскільки J є ідеалом кільця eR, то $JeR\subseteq J$, а, отже, $JR\subseteq J$. Звідси випливає, що множина J є ідеалом кільця R. Це суперечить мінімальності ідеала eR, оскільки J – власна підмножина в eR.

Лему доведено.

Лема 15. *Нехай R – дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді $R = F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n$, де F_i – тіло для кожного $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, тоді і тільки тоді, коли для кільця R виконується твердження (**).*

Доведення. ($\Rightarrow$) Твердження очевидне, бо $\mathrm{mspec}(R) = \{\{0\}\times F_2\times F_3\times\cdots\times F_n, F_1\times\{0\}\times F_3\times\cdots\times F_n,\cdots, F_1\times F_2\times F_3\times\cdots\times F_{n-1}\times\{0\}\}$.
($\Leftarrow$) Позначимо $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$. Розглянемо суму $\sum_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j)$. Оскільки $\bigcap_{i\in\Omega}\Omega\setminus\{i\} = \emptyset$, то за лемою 13 $\sum_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j) = R$. За лемою 1 R – напівпросте, тому $(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i_1\}}\mathfrak{M}_j)\cap(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i_2\}}\mathfrak{M}_j) = \mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{M}_n = \{0\}$. Отже,

$$\sum_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j) = \oplus_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j).$$

Звідси $1 = e_1+e_2+\cdots+e_n$, де $e_i\in\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$. Покажемо, що $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j = e_iR$ для будь-якого $i\in\Omega$. Включення $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j\supseteq e_iR$ випливає з того, що $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$ – ідеал і $e_i\in\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$, а включення $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j\subseteq e_iR$ – з того, що $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$ є мінімальним ідеалом кільця R. Мінімальність ідеалу $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$ випливає з того, що вищевизначене відображення f є антиізоморфізмом гратки ідеалів стосовно включення і підмножин скінченної множини стосовно включення і максимальними власними підмножинами множини Ω є множини вигляду $\Omega\backslash\{i\}$ для кожного $i \in \Omega$. Отже, $R = e_1R + e_2R + \cdots + e_nR$. З мінімальності ідеалу e_iR за лемою 14 також випливає, що e_iR є тілом для кожного $i \in \Omega$.

Лему доведено.

Наслідок. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді $R = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, де F_i є тілом для кожного $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Доведення випливає з лем 12 і 15.

З доведених лем випливають ще такі прості факти.

Теорема. *Нехай R – кільце, в якому $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді R є регулярним за Нейманом дуо-кільцем тоді і тільки тоді, коли $R = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, де F_i є тілом для кожного $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Наслідок 1. *Нехай R – кільце, в якому $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді R є комутативним регулярним за Нейманом кільцем тоді і тільки тоді, коли $R = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, де F_i є полем для кожного $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Наслідок 2. *Нехай R – кільце, в якому $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді R булеве тоді і тільки тоді, коли $R = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

1. Brandal W., Barbut E. *Localizations of torsion theories* // Pacific J. Math. – 1983.– Vol. 107, 1. – P.27–37.
2. Matlic E. *Decomposable modules* // Trans. Amer. Soc.– 1966. – Vol. 125. – P.147-179.
3. Steström B. Rings and modules of quotients. – Springer Verlag: Berlin, N.Y., 1975.
4. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: "Мир", 1971.
5. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Международная конференция по алгебре. Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1989. – С.135.
6. Тушницкий И.Я. *Кольца с локально определенными кручениями*// Алгебра и логика.– 1991. – Т. 30, 3. – С.369–377.
7. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Ширшова. Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1991. – С.117.
8. Тушницький І.Я. *Кільця з локально визначеними крученнями* // Тематичний збірник наукових праць "Алгебра і топологія". Інститут системних досліджень освіти України. Київ. 1993. – С.88–109.

Стаття надійшла до редколегії 05.12.96