УДК 517.535.4

ДЕФЕКТИ МЕРОМОРФНИХ У ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ

І. Е. Чижиков

Chyzhykov I. E. Deficiencies of meromorphic functions in a half-plane.
In this paper we construct an example of meromorphic in the half-plane $\{w : \mathrm{Im} w < 0\}$ function which has given positive order of growth and deficient values a_n. Its deficiencies satisfies the condition $\delta^*(a_n, f) \geqslant \frac{\delta_n}{2}$, where sequence (δ_n) such that $\sum_n \delta_n \leqslant 2$ is given.

Ми будемо дотримуватися у даній праці стандартних позначень теорії Неванлінни. Файнберг О.Д. у праці [2] показала, що множиною дефектних значень за Цудзі і Неванлінною мероморфних в півплощині функцій може бути довільна, не більш ніж злічення, множина. Для випадку одиничного круга В.І. Крутінь довів таку теорему.

Теорема А. *Нехай $(\delta_k)_{k=1}^{\infty}$ послідовність додатних чисел така, що $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqslant 2$, (a_k) — довільна послідовність скінченних комплексних чисел і $\rho \geqslant 0$ довільне наперед задане число. Існує мероморфна при $|z| < 1$ функція $g(z, \rho)$ порядку ρ така, що $\delta(a_n, g) \geqslant \dfrac{\delta_n}{4}$.*

Ми доведемо аналог теореми А у випадку півплощини для дефектів за Цудзі. Зауважимо, що ідея доведення запозичена у В.І. Крутіня, проте її технічна реалізація значно спрощується, якщо провести заміну змінної $w = 1/z$ в означеннях характеристик Цудзі, які використані в [2]. Ефективність такої заміни добре відома.

Позначимо $\mathbb{C}_- = \{w : \mathrm{Im} w < 0\}$. Нехай $f(w)$ - мероморфна в $\mathbb{C}_- \cup (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ функція, де $w = u + iv$, $u = \mathrm{Re} w$, $v = \mathrm{Im} w$, а $n^*(v, f)$ — кількість полюсів функції $f(w)$ на множині $\{w : |w| < 1, \mathrm{Im} w \leqslant v\}$. Характеристиками Цудзі будемо називати величини $(-1 < v < 0)$:

$$N^*(v, f) = \int_{-1}^{v} n^*(v, f) dv, \quad N^*(v, a, f) \equiv N^*\Big(v, \frac{1}{f-a}\Big),$$

$$m^*(v, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu(v)}^{\nu(v)} \ln^+ |f(u + iv)| du, \quad m^*(v, a, f) \equiv m^*\Big(v, \frac{1}{f-a}\Big),$$

$$T^*(v, f) = m^*(v, f) + N^*(v, f),$$

де $\nu(v) = \sqrt{1 - v^2}$, $a \in \mathbb{C}$. Дефектом в точці a за Цудзі назвемо величину $\delta^*(a, f) = \varliminf\limits_{v \to -0} \dfrac{m^*(v, a, f)}{T^*(v, f)}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D30.

Лема 1. *Нехай $\mu \in (-1,1)$. Тоді при $v \in (-1,0)$*

$$m^*\Big(v, E_{\rho+1}\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big) = \frac{K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1),$$

де $E_{\rho+1}(z)$ — функція Міттаг-Лефлера порядку $\rho+1$, $K_1(\rho) > 0$.

Доведення. Відомо асимптотичне зображення [1]

$$E_{\rho+1}(z) = \begin{cases} (\rho+1)e^{z^{\rho+1}} + \varphi_1(z), & |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2(\rho+1)}, \\ \varphi_2(z), & |\arg z| \in \Big[\dfrac{\pi}{2(\rho+1)}, \pi\Big], \end{cases}$$

де $|\varphi_j(z)| \leqslant C_2 = E_{\rho+1}(1)$, при $|z| \leqslant 1$, $\varphi_j(z) \leqslant \dfrac{C_1}{|z|}$, при $|z| > 1$, $j = 1,2$. Отже, $|\varphi_j(z)| \leqslant C_3$. Легко бачити, що

$$\Big|\arg\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big| \iff |\pi/2 + \arg(w-\mu)| \leqslant \frac{\pi}{2(\rho+1)}.$$

Нехай $\psi = \arg(w - \mu) \in (-\pi, 0)$. Тоді за попереднім

$$\Big|\arg\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big| \leqslant \frac{\pi}{2(\rho+1)} \iff \psi \in \Big(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(\rho+1)}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(\rho+1)}\Big).$$

Нехай $I = \Big\{u : u \in (-\nu(v), \nu(v)), \psi \in \Big(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(\rho+1)}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(\rho+1)}\Big)\Big\}$. Враховуючи, що $u - \mu = v\mathrm{ctg}\psi$, $u'(\psi) = -\dfrac{v}{\sin^2\psi}$. Тоді

$$m^*\Big(v, E_{\rho+1}\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\nu(v)}^{\nu(v)} \ln^+\Big|E_{\rho+1}\Big(\frac{i}{\mu - u - iv}\Big)\Big|du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_I \ln^+\Big|(\rho+1)\exp\Big(\Big(\frac{i}{\mu - u - iv}\Big)^{\rho+1}\Big)\Big|du + O(1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_I \mathrm{Re}^+\Big(\Big(\frac{i}{\mu - u - iv}\Big)^{\rho+1}\Big)du +$$

$$+O(1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_I \frac{\cos^+(\rho+1)(\frac{\pi}{2} + \psi(u))}{((\mu-u)^2+v^2)^{\frac{\rho+1}{2}}}du = \frac{1}{2\pi|v|^\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(\rho+1)}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2(\rho+1)}} \frac{\cos^+(\rho+1)(\frac{\pi}{2}+\psi)d\psi}{(1+\mathrm{ctg}^2\psi)^{\frac{\rho+1}{2}}\sin^2\psi} +$$

$$+O(1) = \frac{1}{2\pi|v|^\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(\rho+1)}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2(\rho+1)}} \cos^+(\rho+1)(\frac{\pi}{2}+\psi)|\sin\psi|^{\rho-1}d\psi + O(1) = \frac{K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1).$$

Лему доведено.

Теорема. *Нехай* (δ_n) — *довільна незростаюча послідовність,* $0 < \delta_n \leqslant 1$, $\sum_{n\geqslant 1}\delta_n \leqslant 2$, (a_n) – *довільна послідовність різних комплексних чисел з* $\bar{\mathbb{C}}$, $\rho \in (0, +\infty)$. *Тоді існує мероморфна в* $\mathbb{C}_-$ *функція* $f(w)$ *порядку* ρ *така, що* $\delta^*(a_n, f) \geqslant \dfrac{\delta_n}{2}$.

Доведення. Нехай $\alpha = \dfrac{1}{\rho+1}$, $\mu_1 = \dfrac{3}{4}$, $\mu_{n+1} = \mu_n - (1/4)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $a_1 = \infty$ (при потребі доданок $e_1(w)$ в означенні $g_1(w)$ можна відкинути). Нехай $e_n(w) = E_{\rho+1}\Big(\dfrac{\delta_n^\alpha i}{\mu_n - w}\Big)$, при $n \geqslant 1$. Означимо $g_2(w) = \sum_{n\geqslant 2} b_n e_n(w)$, $g_1(w) = \sum_{n\geqslant 2} b_n a_n e_n(w) + e_1(w)$, де (b_k) — послідовність додатних чисел така, що

$$\sum_{n\geqslant 2} b_n = S_2, \quad \sum_{n\geqslant 2} |a_n| b_n + 1 = S_1.$$

Очевидно, $g_1(w)$, $g_2(w)$ аналітичні в $\mathbb{C}_-$. Покладемо $f(w) = \dfrac{g_1(w)}{g_2(w)}$. Згідно з лемою 1 $m^*(v, e_n(w)) = \dfrac{\delta_n K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1)$. Позначимо $l(v) = \{w = u + iv : u \in (-\nu(v), \nu(v))\}$. Нехай $\Omega_n = \{w : |\arg(w - \mu_n) + \dfrac{\pi}{2}| < \dfrac{\pi}{2(\rho+1)}\} \cap l(v)$, $\Omega = l(v) \setminus \bigcup_{n\geqslant 1}\Omega_n$. Позначимо $N(v) = \max\{n : \Omega_n \cap \Omega_{n+1} = \varnothing\}$. Це рівносильно тому, що

$$|v| \leqslant \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)}$$

виконується лише при $1 \leqslant n \leqslant N(v)$. Оскільки

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{N(v)+1}^{N(v)+p}\Omega_n\Big) \leqslant (\mu_{N(v)} - \mu_{N(v)+1}) + \cdots + (\mu_{N(v)+p-1} - \mu_{N(v)+p}),$$

то

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{n>N(v)}\Omega_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant N(v)}(\mu_n - \mu_{n+1}) \leqslant \int_{N(v)-1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^x dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 4}\Big(\frac{1}{4}\Big)^{N(v)-1} \leqslant \frac{16\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2(\rho+1)}}{\ln 2}|v|.$$

Тобто, $\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{n>N(v)}\Omega_n\Big) = O(|v|)$.

Оцінимо тепер $g_1(w)$ і $g_2(w)$. Нехай $w \in \Omega_k$, $2 \leqslant k \leqslant N(v)$. Тоді

$$\ln^+|g_1(w)| = \ln^+\Big|\sum_{n\geqslant 2} a_n b_n e_n(w) + e_1(w)\Big| \leqslant \ln^+|a_k b_k e_k(w)| +$$

$$+ \ln^+\Big|\sum_{n\neq k, n\geqslant 2} a_n b_n e_n(w) + e_1(w)\Big| + \ln 2 \leqslant \ln^+|e_k(w)| + \ln^+|a_k b_k| + \ln^+(C_3 S_1) + \ln 2.$$

Подібно до попереднього, при $w \in \Omega_1$ маємо

$$\ln^+ |g_1(z)| \leqslant \ln^+ |e_1(w)| + \ln^+(C_3 S_1) + \ln 2.$$

Нарешті, при $w \in \bigcup_{n>N(v)} \Omega_n$ отримаємо

$$\ln^+ |g_1(w)| \leqslant \ln^+ \Big| \sum_{n=2}^{N(v)} a_n b_n e_n(w) + \sum_{n>N(v)} a_n b_n e_n(w) + e_1(w) \Big| \leqslant \ln^+ \Big| C_3 \Big(\sum_{n\geqslant 2} |a_n| b_n + 1 \Big) +$$

$$\sum_{n>N(v)} |a_n| b_n (\rho+1) e^{\frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}} \Big| \leqslant \ln^+ |C_3 S_1| + \ln 2 + \ln^+ |(\rho+1) S_1| + \frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}} \leqslant C_4 + \frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}.$$

Зауважимо, що $N(v) \to +\infty$ при $v \to 0$. При $w \in \Omega$, маємо $\ln^+ |g_1(z)| \leqslant \ln^+ |S_1 C_3|$. Подібно, для $g_2(w)$ матимемо

$$\ln^+ |g_2(w)| \leqslant \begin{cases} \ln^+ |e_k(w)| + C_5, & w \in \Omega_k, 2 \leqslant k \leqslant N(v) \\ C_6 + \dfrac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}, & w \in \Omega_k, k > N(v), \\ C_7, & w \in \Omega \cup \Omega_1. \end{cases}$$

Оцінимо характеристику $T^*(v, f)$, використовуючи рівність

$$T^*(v,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\nu(v)}^{\nu(v)} \max\{\ln |g_1(u+iv)|, \ln |g_2(u+iv)|\}\, du + O(1).$$

Отже, при $w = u + iv$

$$T^*(v,f) = \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_{n=2}^{N(v)} \int\limits_{\Omega_n} + \int\limits_{\bigcup_{n>N(v)} \Omega_n} + \int\limits_{\Omega_1} + \int\limits_{\Omega} \Big) (\max\{\ln |g_1(w)|, \ln |g_2(w)| du + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{N(v)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_n} \ln^+ |e_n(u+iv)|\, du + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\bigcup_{n>N(v)} \Omega_n} \frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}\, du + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_1} \ln^+ |e_1(u+iv)|\, du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega} C_8\, du + O(1) = \sum_{n=1}^{N(v)} \frac{\delta_n K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O\Big(\frac{\delta_{N(v)}}{|v|^\rho} \Big) + O(1) \leqslant (1 + o(1)) \frac{2K_1(\rho)}{|v|^\rho}, \ v \to 0.$$

Лема 2. $m^*(v, a_k, f) \geqslant \dfrac{\delta_k K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1)$ *при* $v \to 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Зафіксуємо k. Тоді

$$|f(w) - a_k| = \frac{|\sum_{n\neq k} b_n(a_n - a_k)e_n(w) + e_1(w)|}{|\sum_{n\geqslant 2} b_n e_n(w)|}.$$

Нехай $|v|$ настільки мала, що $\Omega_k \cap \Omega_n = \varnothing$, при $k \neq n$. Тоді

$$\Big|\sum_{n\neq k, n\geqslant 2} b_n(a_n - a_k)e_n(w) + e_1(w)\Big| \leqslant 2S_1C_3, \quad \Big|\sum_{n\geqslant 2} b_n e_n(w)\Big| \geqslant b_k|e_k(w)| - 2S_2C_3,$$

$$\frac{1}{|f(w) - a_k|} \geqslant \frac{b_k|e_k(w)| - 2S_2C_3}{2S_1C_3}.$$

Отже,

$$m^*(v, a_k, f) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_k} \ln^+ \frac{1}{|f(u+iv) - a_k|}\, du = \frac{\delta_k K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1).$$

Лему доведено.

Звідси випливає, що $\delta^*(a_k, f) = \varliminf\limits_{v\to 0} \dfrac{m^*(v, a_k, f)}{T^*(v, f)} \geqslant \dfrac{\delta_n}{2}$. Крім того, очевидно, що $f(w)$ має порядок ρ за Цудзі. Це завершує доведення теореми.

1. Крутинь В.И. *О величинах дефектов Р.Неванлинны для мероморфных при* $|z| < 1$ *функций*// Изв. АН АрмССР, Математика.– 1973.– Т. VIII, N 5.– С.347-358.
2. Файнберг Е.Д. *О дефектах функций, мероморфных в полуплоскости*// Сб. "Теор. функций функ. анализ и их пр.".– 1976.– Вып. 25.– С.120-131.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.97