УДК 517.524

РОЗВИНЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ АППЕЛЯ F_1 ТА ЛАУРІЧЕЛЛИ $F_D^{(N)}$ У ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Н. П. Молнар, О. С. Манзій

Molnar N.P., Manziy O.S. The expansion of the Lauricella hypergeometric functions $F_D^{(N)}$ into branch continued fractions. With use of recurrent relations for Lauricella hypergeometric functions $F_D^{(N)}$ the development of ratios of such functions into branch continued fractions was built. The convergence of obtained expansion in the case of real parameters is investigated.

Ефективним засобом для наближення аналітичних, зокрема, гіпергеометричних функцій, є апарат неперервних дробів [4,8]. Розвинення гіпергеометричних функцій у неперервні дроби збігаються, як правило, в більш ширших областях, ніж відповідні розвинення у степеневі ряди. Аппель [5], Лаурічелла [7] розглянули гіпергеометричні функції від двох та n змінних, дослідили властивості цих функцій, встановили для них рекурентні співвідношення.

Побудовано різні алгоритми розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля та Лаурічелли у багатовимірні δ- та С-дроби [2,3]. Залишається відкритим питання збіжності цих розвинень.

У праці запропоновано нові алгоритми розвинення відношення гіпергеометричних функцій $F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)$ та $F_D^{(N)}(a,b_1,\dots,b_N;c;z_1,\dots,z_N)$ у гіллясті ланцюгові дроби , досліджено відповідність цих розвинень, знайдено застосування до зображень розв'язків рівняння Шредінгера.

1. Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли $F_D^{(N)}$ у гіллястий ланцюговий дріб.

Розглянемо гіпергеометричну функцію Лаурічелли [7]

$$F_D^{(N)}(a,b_1,\dots,b_N;\,c;\,z_1,\dots,z_N)=\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_1+\dots+k_N}(b_1)_{k_1}\cdots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\dots+k_N}}\frac{z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}}{k_1!\cdots k_N!},$$

де $a,\ b_1,\dots,b_N,\ c$ – комплексні сталі, причому $c\neq 0,-1,-2,\dots$; $z_1,\dots,z_N$ – комплексні змінні; $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ – символ Похгаммера; $(\alpha)_0=1$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 33C65.

Легко переконатися, що справджуються такі рекурентні співвідношення:

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;\bar{z}) = F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e_i},c;\bar{z}) - \frac{a}{c}z_iF_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};c+1;\bar{z}),\ i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};\,c;\,\bar{z}) = \frac{c-a}{c}F_D^{(N)}(a,\bar{b};\,c+1;\,\bar{z}) + \frac{a}{c}F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};\,c+1;\,\bar{z}), \tag{2}$$

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};\,c;\,\bar{z}) = F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};\,c;\,\bar{z}) - \sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{c}z_iF_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z}), \tag{3}$$

де $\bar{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_N)$, $\bar{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)$, $\bar{e_i}=(\delta_1^i,\delta_2^i,\ldots,\delta_N^i)$; δ_i^j – символ Кронекера. Формули(2), (3) наведені в монографії [6] без доведення.

Побудуємо розвинення частки двох гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\,c;\,\bar{z})}, \qquad 1\leqslant i\leqslant N, \tag{4}$$

у гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД). Із співвідношення (1) випливає, що

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\,c;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})} = \frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e_i};\,c;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})} - \frac{a}{c}z_i. \tag{5}$$

Враховуючи формулу (2), одержимо

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e_i};\,c;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})} = \frac{c-a}{c}\frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})} + \frac{a}{c}. \tag{6}$$

З властивості (3) випливає, що

$$\frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})} = 1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{b_k+\delta_i^k}{c+1}z_k\frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\,c;\,\bar{z})}. \tag{7}$$

Введемо позначення

$$G_i(a,\bar{b};\,c;\,\bar{z}) := \frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\,c;\,\bar{z})}, \qquad 1\leqslant i\leqslant N\,. \tag{8}$$

Враховуючи отримані співвідношення (5) – (7), маємо

$$G_i(a,\bar{b};c;\bar{z}) = \cfrac{1}{\cfrac{a}{c}(1-z_i) + \cfrac{1-\frac{a}{c}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{b_k+\delta_i^k}{c+1}z_kG_k(a,\bar{b}+\bar{e_i};\,c+1;\,\bar{z})}}, \tag{9}$$

де $i=1,2,\ldots,N$. Послідовно вкладаючи співвідношення (9), одержимо теорему.

Теорема 1. *Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли (4) для кожного* i, $1 \leqslant i \leqslant N$, *має формальне розвинення у гіллястий ланцюговий дріб*

$$\frac{F_D^{(N)}(a+1, \bar{b}+\bar{e}_i;\, c+1;\, \bar{z})}{F_D^{(N)}(a, \bar{b};\, c;\, \bar{z})} = G_i(a, \bar{b};\, c;\, \bar{z}) =$$

$$= \cfrac{1}{v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{u_{i(n)}(\bar{z})}{v_{i(n)}(\bar{z}) + \ddots}}}}}, \tag{10}$$

де

$$v_0(\bar{z}) = \frac{a}{c}(1 - z_i), \quad w_n = 1 - \frac{a}{c+n-1}, \quad u_{i(n)} = \frac{b_{i_n} + p_{i(n)}}{c+n} z_{i_n},$$

$$v_{i(n)} = \frac{a}{c+n}(1 - z_{i_n}), \qquad p_{i(n)} = \begin{cases} \alpha_{i(n)}, & \text{якщо } i_n \neq i, \\ \alpha_{i(n)} + 1, & \text{якщо } i_n = i; \end{cases} \tag{11}$$

$\alpha_{i(n)}$ – *кількість чисел* i_n *в мультиіндексі* $i(n-1) = i_1 i_2 \ldots i_{n-1}$, *якщо* $n \geqslant 2$; $\alpha_{i(1)} = 0$.

Доведення. Методом математичної індукції покажемо, що для довільного натурального n правильне розвинення відношення (8) у скінченний гіллястий ланцюговий дріб

$$G_i = \cfrac{1}{v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_{n-1}}{1 + \sum\limits_{i_{n-1}=1}^{N} \cfrac{u_{i(n-1)}(\bar{z})}{v_{i(n-1)}(\bar{z}) + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \widehat{u}_{i(n)}(\bar{z})}}}}}}, \tag{12}$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами (11) і

$$\widehat{u}_{i(n)}(\bar{z}) = u_{i(n)}(\bar{z}) G_{i_n}\left(a, \bar{b} + \sum_{j=1}^{N} p_{i(n-1)j}\bar{e}_j;\, c;\, \bar{z}\right).$$

З формули (9) випливає, що

$$v_0(\bar{z}) = \frac{a}{c}(1 - z_i), \quad w_1 = 1 - \frac{a}{c}, \quad u_{i(1)}(\bar{z}) = \frac{b_{i_1} + p_{i(1)}}{c+1} z_{i_1}$$

(оскільки $p_{i(1)} = \delta_i^{i_1}$), тобто розвинення (12) справедливе при $n = 1$.

Припустивши, що формули (12) справджуються при $n = k$ і використавши співвідношення (9), матимемо

$$G_{i_k}\left(a, \bar{b} + \sum_{j=1}^{N} p_{i(k-1)j}\bar{e_j};\ c+k;\ \bar{z}\right) =$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{a}{c+k}(1 - z_{i_k}) + \cfrac{1 - \cfrac{a}{c+k}}{1 + \sum\limits_{i_k=1}^{N} \cfrac{b_{i_{k+1}} + p_{i(k-1)i_{k+1}} + \delta_{i_k}^{i_{k+1}}}{c+k+1} z_{i_{k+1}} \widehat{G}_{i_{k+1}}}}, \tag{13}$$

де $\widehat{G}_{i_{k+1}} = G_{i_{k+1}}\left(a, \bar{b} + \sum\limits_{j=1}^{N}(p_{i(k-1)} + \delta_{i_k}^{j})\bar{e_j};\ c+k+1;\ \bar{z}\right)$. Враховуючи, що $p_{i(k+1)} = p_{i(k-1)i_{k+1}} + \delta_{i_k}^{i_{k+1}}$, з формули (13) одержимо

$$v_{i(k)}(\bar{z}) = \frac{a}{c+k}(1 - z_{i_k}),\ w_{k+1} = 1 - \frac{a}{c+k},\ u_{i(k+1)}(\bar{z}) = \frac{b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}}{c+k+1} z_{i_{k+1}}.$$

Отже, розвинення (12) справедливе для $n = k+1$. Теорему доведено.

Еквівалентними перетвореннями ГЛД (13) зводиться до дробу такого вигляду:

$$\cfrac{ca^{-1}(1-z_i)^{-1}}{1 + \cfrac{t_0(\bar{z})}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{s_{i(1)}(\bar{z})}{1 + \ddots + \cfrac{t_{i(n-1)}(\bar{z})}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{s_{i(n)}(\bar{z})}{1 + \ddots}}}}}, \tag{14}$$

$$t_0(\bar{z}) = \frac{c-a}{a(1-z_i)}, \quad t_{i(n)}(\bar{z}) = \frac{c-a+n}{a(1-z_{i_n})}, \quad s_{i(n)}(\bar{z}) = \frac{(b_{i_n} + p_{i(n)})z_{i_n}}{a(1-z_{i_n})}.$$

2. Відповідність.

Розглянемо послідовність раціональних функцій $f_n(\bar{z}) = \dfrac{P_m(\bar{z})}{Q_l(\bar{z})}$, де $P_m(\bar{z})$, $Q_l(\bar{z})$ – поліноми степеня $m = m(n)$ і $l = l(n)$ відповідно. Функція $f_n(\bar{z})$ розвивається у формальний степеневий ряд (ФСР) в околі нуля, якщо знаменник $Q_l(\bar{z})$ в точці $\bar{z} = (0, 0, \dots, 0)$ відмінний від нуля.

Раціональна функція $f_n(\bar{z})$ називається відповідною деякому ФСР

$$f = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N = 0}^{\infty} c_{i(N)} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_N^{i_N}$$

з порядком відповідності ν_n, якщо розвинення $f_n(\bar{z})$ у формальний степеневий ряд збігається з f за всіма однорідними поліномами до степеня $\nu_n - 1$ включно. Послідовність $f_n(\bar{z})$ є відповідною ФСР, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$.

Нехай

$$F_n(\xi) = \cfrac{1}{v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{u_{i(n)}(\bar{z})}{v_{i(n)}(\bar{z}) + \xi}}}}}, \ n = 1, 2, \dots .$$

Підхідні дроби ГЛД (10) визначаються так

$$f_0 = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + w_1}; \qquad f_{2n-1} = F_n(0); \qquad f_{2n} = F_n(w_{n+1}), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Відповідність ГЛД формальному степеневому ряду f означає, що послідовність підхідних дробів ГЛД $\{f_n\}$ є відповідною f.

Теорема 2. *Гіллястий ланцюговий дріб (10) є відповідним формальному степеневому ряду, в який розвивається функція G_i, з порядком відповідності*

$$\nu_n = \left[\frac{n+1}{2}\right], \quad n = 1, 2, \dots ,$$

для кожного n-го підхідного дробу.

Доведення. Використовуючи алгоритм розвинення G_i у гіллястий ланцюговий дріб, можна записати тотожності, що справджуються для довільного натурального n:

$$G_i^{-1} = v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_{n-1}}{1 + \sum\limits_{i_{n-1}=1}^{N} \cfrac{u_{i(n-1)}(\bar{z})}{v_{i(n-1)}(\bar{z}) + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} u_{i(n)}(\bar{z})\widehat{G}_{i_n}(\bar{z})}}}}}$$

Введемо позначення

$$S_l^k(\eta) = 1 + \sum_{i_k=1}^{N} \cfrac{u_{i(k)}(\bar{z})}{v_{i(k)}(\bar{z}) + \cfrac{w_k}{1 + \ddots + \cfrac{w_l}{1 + \sum\limits_{i_l=1}^{N} u_{i(l)}(\bar{z})\eta}}}, \qquad 1 \leqslant l \leqslant k,$$

$$R_l^k = S_l^k(1/v_{i(l)}(\bar{z})), \quad Q_l^k = S_l^k(\widehat{G}_{i_l}(\bar{z})), \quad P_l^k = S_l^k(1/(v_{i(l)}(\bar{z}) + w_{l+1})),$$
$$\widehat{R}_l^k = \frac{w_k}{R_l^k}, \quad \widehat{Q}_l^k = \frac{w_k}{Q_l^k}, \quad \widehat{P}_l^k = \frac{w_k}{P_l^k}.$$

Згідно з введеними позначеннями

$$G_i = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + \widehat{Q}_n^1}, \qquad f_{2n-1} = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + \widehat{R}_n^1}, \qquad f_{2n} = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + \widehat{P}_n^1}.$$

Використовуючи методику виведення формули різниці підхідних дробів [1], легко довести, що

$$G_i - f_{2n-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{w_k}{R_n^k Q_n^k} \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{N} \frac{\left(1 - v_{i(n)}(\bar{z})\widehat{G}_{i_n}(\bar{z})\right) \prod\limits_{k=1}^{n} u_{i(k)} z_{i_k}}{v_{i(n)}(\bar{z}) \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left[(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{Q}_n^{k+1})(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{R}_n^{k+1}) \right]},$$

$$G_i - f_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{w_k}{P_n^k Q_n^k} \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{N} \frac{\left((w_n + v_{i(n)}(\bar{z}))\widehat{G}_{i_n}(\bar{z}) - 1\right) \prod\limits_{k=1}^{n} u_{i(k)} z_{i_k}}{(v_{i(n)}(\bar{z}) + w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n-1} \left[(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{Q}_n^{k+1})(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{P}_n^{k+1}) \right]},$$

де $i(0) = 0$, $u_{i(k)} = \dfrac{b_{i_k} + p_{i(k)}}{c + k}$, $n = 1, 2, \dots$

Оскільки всі вирази в знаменниках цих формул дорівнюють одиниці, якщо $z_1 = \ldots = z_N = 0$, то в деякому околі точки $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N$ вони відмінні від нуля. Розклавши формально в степеневі ряди величини, обернені до цих знаменників, а також $\widehat{G}_{i_n}(\bar{z})$, одержимо

$$G_i - f_n = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N \geqslant 0 \, i_1 + i_2 + \ldots + i_N \geqslant \nu_n} \alpha_{i(N)} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_N^{i_N}, \quad \nu_n = \left[\frac{n+1}{2} \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Отже, ГЛД (10) є відповідний ряду, в який формально розкладається функція G_i.

3. Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля у гіллястий ланцюговий дріб.

Розглянемо гіпергеометричну функцію двох змінних

$$F_1(a, b, b'; c; z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!},$$

де a,b,b',c – комплексні сталі, z_1,z_2 – комплексні змінні, причому $c \neq 0, -1, -2, \dots$

Ця функція була введена та досліджена французьким математиком Аппелем у монографії [5], де, зокрема, наведені такі рекурентні співвідношення:

$$F_1(a, b, b'; c; z_1, z_2) = F_1(a-1, b, b'; c; z_1, z_2) + \frac{z_1 b}{c} F_1(a, b+1, b'; c+1; z_1, z_2) + \\ + \frac{z_2 b'}{c} F_1(a, b, b'+1; c+1; z_1, z_2); \tag{15}$$

$$F_1(a,b,b';c;z_1,z_2) = (1-z_1)^{-b}(1-z_2)^{-b'} F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right). \tag{16}$$

Побудуємо розвинення

$$K := \frac{F_1(a-1,b,b';c;z_1,z_2)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)}$$

у гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження.

Із співвідношення (15) випливає, що

$$K = 1 - \frac{z_1 b}{c}\frac{F_1(a,b+1,b';c+1;z_1,z_2)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)} - \frac{z_2 b'}{c}\frac{F_1(a,b,b'+1;c+1;z_1,z_2)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)}.$$

Використавши формулу (16), зможемо записати

$$\begin{aligned} K =& 1 + \frac{bz_1}{c(z_1-1)}\frac{F_1\left(c-a+1,b+1,b';c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}+ \\ &+\frac{b'z_2}{c(z_2-1)}\frac{F_1\left(c-a+1,b,b'+1;c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $F_1(a,b,b';c;z_1,z_2) = F_D^{(2)}(a,b,b';c;z_1,z_2)$, використаємо попередні викладки для побудови розвинення відношення K у гіллястий ланцюговий дріб.

Згідно з позначеннями (8) маємо:

$$\frac{F_1\left(c-a+1,b+1,b';c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)} = G_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right) = G_1,$$

$$\frac{F_1\left(c-a+1,b,b'+1;c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)} = G_2\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right) = G_2.$$

Тоді

$$K = \frac{F_1(a-1,b,b';c;z_1,z_1)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)} = 1 + \frac{b}{c}\frac{z_1}{z_1-1}G_1 + \frac{b'}{c}\frac{z_2}{z_2-1}G_2,$$

де G_k, $k=1,2$, розвиваються у гіллясті ланцюгові дроби вигляду (14). Отже,

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{2} \cfrac{s_0^k(z)}{1 + \cfrac{t_0^k(z)}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{2} \cfrac{s_{i(1)}^k(z)}{1 + \ddots + \cfrac{t_{i(n-1)}^k(z)}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{2} \cfrac{s_{i_n}^k(z)}{1 + \ddots}}}}}, \tag{17}$$

де $z=(z_1,z_2)$ і

$$s_0^k(z) = \begin{cases} \dfrac{b}{(a-c)} z_1, & \text{якщо } k=1, \\ \dfrac{b'}{(a-c)} z_2, & \text{якщо } k=2; \end{cases}$$

$$t_0^k(z) = \frac{a}{a-c}(z_k - 1); \qquad t_{i(n)}^k(z) = \frac{a+n}{a-c}(z_{i_n} - 1); \tag{18}$$

$$s_{i(n)}^k(z) = \begin{cases} \dfrac{b + p_{i(n)} + 1}{a-c} z_1, & \text{якщо } i_n = 1,\ k=1, \\ \dfrac{b' + p_{i(n)}}{a-c} z_2, & \text{якщо } i_n = 2,\ k=1, \\ \dfrac{b + p_{i(n)}}{a-c} z_1, & \text{якщо } i_n = 1,\ k=2, \\ \dfrac{b' + p_{i(n)} + 1}{a-c} z_2, & \text{якщо } i_n = 2,\ k=2. \end{cases}$$

Враховуючи, що $F_1(0,b,b';c;z_1,z_2)=1$, отримаємо розвинення функції $F_1^{-1}(1,b,b';c;z_1,z_2)$ у ГЛД.

4. Застосування розвинення функції $F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)$ у ГЛД для побудови розв'язку рівняння Шредінгера.

У монографії [6] подані розв'язки радіального рівняння Шредінгера

$$\frac{d^2x}{dr^2} = \left[u^2 v(r) - \frac{Eh^2}{2m} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] x,$$

де $u^2 = \dfrac{Kh^2}{2m}$, K – стала, h – стала Планка, $v(r) = (\alpha_1 - r)^{-\beta_1}(\alpha_2 - r)^{-\beta_2}$ – сферично-симетричний потенціал, у вигляді $x = (\alpha_1 - r)^{-\frac{\beta_1}{2}}(\alpha_2 - r)^{-\frac{\beta_2}{2}} \exp(\pm u\xi(r))$, причому

$$\xi(r) = (r - r_0)(\alpha_1 - r_0)^{-\frac{\beta_1}{2}}(\alpha_2 - r_0)^{-\frac{\beta_2}{2}} F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r - r_0}{\alpha_1 - r_0}, \frac{r - r_0}{\alpha_2 - r_0}\right),$$

де r_0 – довільна стала. У реальній фізичній моделі на параметри накладаються такі обмеження: $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$. Використовуючи розвинення гіпергеометричної функції Аппеля $F_1^{-1}(1, b, b'; c; z_1, z_2)$ у гіллястий ланцюговий дріб (17), одержимо

$$F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r-r_0}{\alpha_1 - r_0}, \frac{r-r_0}{\alpha_2 - r_0}\right) =$$

$$\cfrac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{2} \cfrac{s_0^k(r)}{1+\cfrac{t_0^k(r)}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{2}\cfrac{s_{i(1)}^k(r)}{1+\ddots+\cfrac{t_{i(n-1)}^k(r)}{1+\sum\limits_{i_n=1}^{2}\cfrac{s_{i(n)}^k(r)}{1+\ddots}}}}}}, \tag{19}$$

де $s_0^k(r) = \dfrac{\beta_k}{2}\dfrac{(r-r_0)}{(r_0-\alpha_k)}$, $t_0^k(r) = \dfrac{(r-\alpha_k)}{(r_0-\alpha_k)}$, $\quad t_{i(n)}^k = \dfrac{(n+1)(r-\alpha_k)}{r_0-\alpha_k}$,
$s_{i(n)}^k = \dfrac{(\beta_{i_n}/2 + p_{i(n)}^k)(r-r_0)}{r_0-\alpha_k}$.

Теорема 3. *Нехай параметри ГЛД (19) задовольняють умови:*
а) $r > r_0 > \alpha_k$, $k = 1, 2$;
б) $\beta_k \geqslant 0$, $k = 1, 2$.
Тоді ГЛД (19) збігається і справедлива оцінка швидкості збіжності:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{m} \frac{2}{2+\phi_j(r)}, \tag{20}$$

де $f_n(z), f_m(z)$ *– підхідні дроби ГЛД (19),*

$$\phi_{2j-1}(r) = \max{}^{-1}(s_{i(j-1)}^k(r) : i_p = 1, 2,\ p = \overline{0, m-1},\ k = 1, 2),$$
$$\phi_{2j}(r) = \max{}^{-1}(t_{i(j-1)}^k(r) : i_p = 1, 2,\ p = \overline{0, m-1},\ k = 1, 2),\ n > m,\ i(0) = 0.$$

Доведення. Компоненти ГЛД (19) при заданих умовах є невід'ємними числами. Використовуючи методику, запропоновану в [1, теор.3.12], одержимо оцінку (20), з якої випливає збіжність ГЛД (19).

Гіпергеометричний ряд

$$F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r-r_0}{\alpha_1 - r_0}, \frac{r-r_0}{\alpha_2 - r_0}\right)$$

збігається, якщо $|r - r_0| < |\alpha_k - r_0|$. А розвинення у гіллястий ланцюговий дріб (19) збігається при умові, що $(r-r_0)/(r-\alpha_k) < 1$. Ці умови нееквівалентні, якщо $\alpha_k < r_0 < r$.

У цьому випадку ГЛД збігається завжди, а ряд є збіжним при виконанні додаткової умови $r < 2r_0 - \alpha_k$.

При виконанні умов теореми 3 ГЛД (19) збігається до

$$F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r - r_0}{\alpha - r_0}, \frac{r - r_0}{\alpha_2 - r_0}\right),$$

якщо $\exists k_0 : \forall k > k_0$

$$G_{i_k}\left(2, \frac{\beta_1}{2} + p_{i(k)1}, \frac{\beta_2}{2} + p_{i(k)2}; 3 + k; \frac{r - r_0}{r - \alpha_1}, \frac{r - r_0}{r - \alpha_2}\right) > 0, \quad i_k = 1, 2.$$

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986.– 176 с.
2. Боднар Д. И., Дубиняк О. С.*Розвинення відношення функцій Аппеля в гіллясті ланцюгові дроби*// Волин. мат. вісн.– 1996.– Вип.2. – С.15-16.
3. Гоєнко Н. П.*Алгоритм розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли в гіллясті ланцюгові дроби*// Волин. мат. вісн. – 1996.– Вип.2. – С.49-51.
4. Джоунс У.,Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985.–414 с.
5. Appell P., Kampe de Feriet. Fonction hypergemetriques et hyperspheriques Polinomies d'Hermite. – Paris: Couthier-Villars, 1926.– 434 p.
6. Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. – New York–Sydney–Toronto, Chichester, Ellis Horwood, 1976.–376 p.
7. Lauricella G.*Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili*// Rend. Circ. Mat. Palermo.– 1893.– Vol. 7.– P. 111–113.
8. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fraction with Application. – Amsterdam: North-Holland, 1992.–606 p.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.97