УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ З ТРЬОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ І ПЕРІОДИЧНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

М. О. Оліскевич

Oliskevych M.O. Solution's stability of mixed problem for system with three values for periodic boundary conditions The mixed problem for a system of partial differential equations of the first order is considered. The existence of a solution is obtained with use of the parabolic system of the second order. Theorem of Liapunov's stability of a trivial solution is proved.

Поведінку розв'язку задач при великих значеннях часу досліджують різними методами. У працях П. Ванга і П. Паркса стійкість схематизованого гнучкого літального апарата [1] чи стійкість розв'язку задачі флатера панелі [2] доведено методом Ляпунова. У працях [3],[4] досліджено стійкість тривіального розв'язку задачі Коші спеціального класу напівлінійних гіперболічних систем. У праці [5] за допомогою зображення функції Гріна доведено теорему про стійкість за Ляпуновим стаціонарного розв'язку мішаної задачі для лінійної гіперболічної системи. У даній праці досліджено стійкість нульового розв'язку мішаної задачі з нелокальними крайовими умовами методом апріорних оцінок.

Розглянемо в смузі $P = \{(x,y,t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0\}$ мішану задачу для лінійної системи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,y,t)u_j = f_i(x,y,t), \qquad (1)$$

$i = \overline{1,n}$, де матриці $A(x,y,t) = (a_{ij}(x,y,t))$, $B(x,y,t) = (b_{ij}(x,y,t))$ $(i,j = \overline{1,n})$ – симетричні, а $|a_{ijt}|$, $|a_{ijx}|$, $|a_{ijy}|$, $|b_{ijt}|$, $|b_{ijx}|$, $|b_{ijy}|$, $|c_{ij}|$, $|c_{ijt}|$, $|c_{ijx}|$, $|c_{ijy}|$ належать простору $L^\infty(P)$.

Для системи (1) задано крайові

$$u_i(0,y,t) = u_i(1,y,t), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B35; Secondary 35L50.

$$u_i(x,0,t) = u_i(x,1,t)\,, \quad i=\overline{1,n} \tag{3}$$

і початкові умови

$$u_i(x,y,0) = \varphi_i(x,y), \quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

причому функції $\varphi_i(x,y)$ задовольняють умови узгодження. Позначимо через $P_T = \{(x,y,t) : 0 < x < 1\,, 0 < y < 1\,, 0 < t < T\}$, $D = (0,1)\times(0,1)$, а через $H^1_{loc}(P)$ $\left(L^2_{loc}(P)\right)$ простір функцій $u(x,y,t)$ таких, що $u \in H^1(P_T)$ і задовольняють умови (2), (3) $\left(u \in L^2(P_T)\right)$ для довільного $T > 0$.

Означення. *Вектор-функція u з простору $H^1_{loc}(P)$ називається узагальненим розв'язком задачі (1)–(4), якщо вона задовольняє умови (2)–(4) і для довільних функцій $v_i(x,y,t)$ з $L^2_{loc}(P)$ виконуються інтегральні тотожності*

$$\int\limits_{P_T}\left(u_{it} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{jx} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_{jy} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}u_j\right) v_i\, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{P_T} f_i(x,y,t)\, v_i\, dxdydt\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \quad \forall T>0\,. \tag{5}$$

Для доведення існування розв'язку задачі (1)–(4), розглянемо допоміжну задачу

$$\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,y,t)u_j^\varepsilon =$$
$$= \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial y^2}\right) + f_i(x,y,t)\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \tag{6}$$

$$u_i^\varepsilon(0,y,t) = u_i^\varepsilon(1,y,t), \quad u_i^\varepsilon(x,0,t) = u_i^\varepsilon(x,1,t), \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$u_{ix}^\varepsilon(0,y,t) = u_{ix}^\varepsilon(1,y,t), \quad u_{iy}^\varepsilon(x,0,t) = u_{iy}^\varepsilon(x,1,t), \quad i=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$u_i^\varepsilon(x,y,0) = \varphi_i(x,y), \quad i=\overline{1,n}), \tag{9}$$

де ε – додатний малий параметр.

Нехай

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(1,y,t) - a_{ij}(0,y,t))\xi_i\xi_j \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x,1,t) - b_{ij}(x,0,t))\xi_i\xi_j \geqslant 0 \quad \forall \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n). \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай* $\varphi_i \in H^1(D)$, $f_i \in H^1_{loc}(P)$, $i = \overline{1,n}$, *і виконуються умови (10),(11). Тоді для розв'язку задачі (6) – (9) справедлива оцінка*

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right) dxdy \leqslant C(T) \tag{12}$$

для майже всіх $t \in [0,T]$.

Доведення. Можна довести, що задача (6) – (9) має розв'язок $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \ldots, u_n^\varepsilon)$, причому похідні $\dfrac{\partial^{|\alpha|} u_i^\varepsilon(x,y,t)}{\partial t^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}\partial y^{\alpha_3}}$, $i = \overline{1,n}$ $\left(|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i \leqslant 3,\ \alpha_1 \leqslant 2,\ \alpha_2 \leqslant 3,\ \alpha_3 \leqslant 3\right)$ належать простору $L^2_{loc}(P)$. Домноживши кожне рівняння системи (5) на $2u_i^\varepsilon$ і проінтегрувавши по P_T, отримаємо

$$\int\limits_{P_T} \left(2u_{it}^\varepsilon u_i^\varepsilon + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^\varepsilon u_i^\varepsilon + 2\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_{jy}^\varepsilon u_i^\varepsilon + 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) dxdydt =$$
$$= \int\limits_{P_T} 2\left(\varepsilon(u_{ixx}^\varepsilon u_i^\varepsilon + u_{iyy}^\varepsilon u_i^\varepsilon) + f_i u_i^\varepsilon\right) dxdydt\,.$$

Звідси

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right) dxdydt + \int\limits_{P_T} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) - \sum_{j=1}^{n} a_{ijx} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) dxdydt +$$
$$+ \int\limits_{P_T} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y}\left(b_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{ijy} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) dxdydt + \int\limits_{P_T} 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon dxdydt =$$
$$= \int\limits_{P_T} 2\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(u_{ix}^\varepsilon u_i^\varepsilon) - \varepsilon u_{ix}^{\varepsilon\,2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}(u_{iy}^\varepsilon u_i^\varepsilon) - \varepsilon u_{iy}^{\varepsilon\,2} + f_i u_i^\varepsilon\right) dxdydt\,.$$

Врахувавши обмеженість a_{ijx}, b_{ijy}, c_{ij} і оцінивши останню рівність, отримаємо нерівність

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right) dxdydt +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(1,y,t)u_j^\varepsilon(1,y,t)u_i^\varepsilon(1,y,t) - a_{ij}(0,y,t)u_j^\varepsilon(0,y,t)u_i^\varepsilon(0,y,t)\right) dydt +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij}(x,1,t)u_j^\varepsilon(x,1,t)u_i^\varepsilon(x,1,t) - b_{ij}(x,0,t)u_j^\varepsilon(x,0,t)u_i^\varepsilon(x,0,t)\right) dxdt -$$

$$
-\int\limits_{P_T}\left(2\mu\sum_{j=1}^{n}u_j^{\varepsilon\,2}+2n\mu u_i^{\varepsilon\,2}\right)dxdydt\leqslant
$$

$$
\leqslant\int\limits_0^t\int\limits_0^1 2\varepsilon\left(u_{ix}^{\varepsilon}(1,y,t)u_i^{\varepsilon}(1,y,t)-u_{ix}^{\varepsilon}(0,y,t)u_i^{\varepsilon}(0,y,t)\right)dydt+
$$

$$
+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 2\varepsilon\left(u_{iy}^{\varepsilon}(x,1,t)u_i^{\varepsilon}(x,1,t)-u_{iy}^{\varepsilon}(x,0,t)u_i^{\varepsilon}(x,0,t)\right)dxdt+
$$

$$
+\int\limits_{P_T}\left(f_i^2+u_i^{\varepsilon\,2}\right)dxdydt\,.
$$

Підсумувавши по i від 1 до n та врахувавши крайові умови (6),(7) і умови (10), (11), матимемо

$$
\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^{\varepsilon\,2}\right)dxdydt\leqslant(4n\mu+1)\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n}u_i^{\varepsilon\,2}dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n}f_i^2dxdydt\,, \tag{13}
$$

де стала μ залежить від коефіцієнтів $a_{ij}\,,b_{ij}\,,c_{ij}$ і їх перших похідних за $t\,,x\,,y$. Продиференціюємо тепер кожне рівняння системи (5) за t і помножимо на $2u_{it}^{\varepsilon}$. Після інтегрування по P_T, отримаємо рівність

$$
\int\limits_{P_T}\left(2u_{itt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+2\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_{jxt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+2\sum_{j=1}^{n}a_{ijt}u_{jx}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+2\sum_{j=1}^{n}b_{ij}u_{jyt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}\right)dxdydt+
$$

$$
+\int\limits_{P_T}\left(2\sum_{j=1}^{n}b_{ijt}u_{jy}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+2\sum_{j=1}^{n}c_{ij}u_{jt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+2\sum_{j=1}^{n}c_{ijt}u_{j}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}\right)dxdydt=
$$

$$
=\int\limits_{P_T}2\left(\varepsilon(u_{ixxt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+u_{iyyt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon})+f_{it}u_{it}^{\varepsilon}\right)dxdydt\,,
$$

яку можна подати у вигляді

$$
\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt+
$$

$$
+\int\limits_{P_T}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{ij}u_{jt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}\right)-\sum_{j=1}^{n}a_{ijx}u_{jt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+2\sum_{j=1}^{n}a_{ijt}u_{jx}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}\right)dxdydt+
$$

$$
+\int\limits_{P_T}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y}\left(b_{ij}u_{jt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}\right)-\sum_{j=1}^{n}b_{ijy}u_{jt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}+2\sum_{j=1}^{n}b_{ijt}u_{jy}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}\right)dxdydt+
$$

$$+\int\limits_{P_T} 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij}u_{jt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} c_{ijt}u_j^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}dxdydt =$$

$$= \int\limits_{P_T} 2\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(u_{ixt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}) - \varepsilon u_{ixt}^{\varepsilon\,2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}(u_{iyt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}) - \varepsilon u_{iyt}^{\varepsilon\,2} + f_{it}u_{it}^{\varepsilon}\right)dxdydt\,.$$

Підсумувавши ці рівності по i від 1 до n та врахувавши обмеженість відповідних перших похідних коефіцієнтів системи (5), крайові умови (6),(7) і умови (10), (11), матимемо

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T}\Bigg((7n\mu+1)\sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2} +$$
$$+ n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2}\Bigg)dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n} f_{it}^2dxdydt\,. \tag{14}$$

Аналогічно можемо продиференціювати кожне рівняння системи (1) по x (по y), а після цього помножити на $2u_{ix}^{\varepsilon}$ (на $2u_{iy}^{\varepsilon}$). Після інтегрування по P_T, підсумувавши отримані рівності по i від 1 до n і відповідно їх оцінивши, матимемо нерівності

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T}\Bigg((6n\mu+1)\sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} +$$
$$+ n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2}\Bigg)dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n} f_{ix}^2dxdydt\,, \tag{15}$$

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T}\Bigg((6n\mu+1)\sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2} +$$
$$+ n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2}\Bigg)dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n} f_{iy}^2dxdydt\,. \tag{16}$$

Якщо додати нерівності (13),(14),(15) та (16), то отримаємо

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{P_T}\left((7n\mu+1)\sum_{i=1}^{n}\left(u_{it}^{\varepsilon\,2} + u_{ix}^{\varepsilon\,2} + u_{iy}^{\varepsilon\,2} + u_i^{\varepsilon\,2}\right)\right)dxdydt +$$
$$+ \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i^2 + f_{it}^2 + f_{ix}^2 + f_{iy}^2\right)dxdydt\,.$$

Позначивши $K = 7n\mu + 1$, прийдемо до нерівності

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} \right) dxdydt \leqslant$$
$$\leqslant K \int\limits_{P_T} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2} \right) dxdydt +$$
$$+ \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i^2 + f_{it}^2 + f_{ix}^2 + f_{iy}^2 \right) dxdydt,$$

з якої згідно з лемою Гронуолла-Беллмана випливає оцінка

$$\int\limits_{D} \sum_{i=1}^{n} \left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) \right) dxdy \leqslant C(T)\,,$$

що і треба було довести.

Теорема 2. *Якщо* $\varphi_i \in H^1(D)$, $f_i \in H^1_{loc}(P)$, $i = \overline{1,n}$, *і виконуються умови (10), (11), то існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (4).*

Доведення. З теореми 1 випливає, що з послідовностей $\{u_i^\varepsilon\}, i = \overline{1,n}$, можна вибрати підпослідовності, які слабко збігаються при $\varepsilon \to 0$ в просторі $H^1_{loc}(P)$ до деяких елементів $u_i(x,y,t), i = \overline{1,n}$.

Помноживши i-те рівняння системи (5) на довільну функцію v_i з простору $H^1_{loc}(P)$, що задовольняє умови (2), і проінтегрувавши по P_T, отримаємо

$$\int\limits_{P_T} \left(u_{it}^{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_{jy}^{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^{\varepsilon} \right) v_i \, dxdydt =$$
$$= \varepsilon \int\limits_{P_T} \left(u_{ixx}^{\varepsilon} v_i + u_{iyy}^{\varepsilon} v_i \right) dxdydt + \int\limits_{P_T} f_i v_i \, dxdydt \quad i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

У першому інтегралі в правій частині рівностей (17) проведемо інтегрування частинами

$$\int\limits_{P_T} \left(u_{it}^{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_{jy}^{\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^{\varepsilon} \right) v_i \, dxdydt =$$
$$= -\varepsilon \int\limits_{P_T} \left(u_{ix}^{\varepsilon} v_{ix} + u_{iy}^{\varepsilon} v_{iy} \right) dxdydt + \int\limits_{P_T} f_i v_i \, dxdydt, \ i = \overline{1,n}\,. \tag{18}$$

Перейдемо тепер до границі при $\varepsilon \to 0$ в рівностях (18). Оскільки перший інтеграл в правій частині (18) обмежений для довільного $\varepsilon > 0$, то в границі він прямує до нуля.

Тому отримаємо, що $u_i, i = \overline{1,n}$, задовольняють рівності (5). Крім того, граничні функції u_i задовольняють крайові умови (2),(3) і початкові умови (4), тому згідно з означенням 1 вектор $u = (u_1, \dots, u_n)$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Дослідимо стійкість нульового розв'язку задачі (1) – (4). Припускатимемо, що $f_i(x, y, t) \equiv 0$ для всіх $(x, y, t) \in P$.

Нехай для всіх $(x, y, t) \in P$ існує таке $c_0 \geqslant 0$, що виконується умова

$$\sum_{i,j=1}^{n} (2c_{ij} - a_{ijx} - b_{ijy})\xi_i\xi_j \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n). \tag{19}$$

Теорема 3. *Якщо виконуються умови (10), (11), (19), то для нульового розв'язку задачі (1)–(4) з* $f_i(x, y, t) \equiv 0$ *справедлива така нерівність*

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} u_i^2(x, y, t)dxdy \leqslant C_3 e^{-\beta t} \int_D \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(x, y)dxdy\,, \tag{20}$$

де $0 < \beta \leqslant c_0$, *тобто розв'язок задачі стійкий за Ляпуновим, якщо* $c_0 = 0$ *та експоненціально стійкий за Ляпуновим, якщо* $c_0 > 0$.

Доведення. Візьмемо в рівностях (5) функції $v_i = 2e^{\beta t}u_i$. Проінтегрувавши отримані рівності по P_T і підсумувавши за i від 1 до n, отримаємо

$$\int_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x, y, t)\right) dxdydt + \int_{P_T} e^{\beta t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijx}u_j u_i + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijy}u_j u_i\right) dxdydt+$$

$$+\int_{P_T} e^{\beta t}\left(2\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}u_j u_i - \beta\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) dxdydt \leqslant 0\,,$$

$$\int_D e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x, y, t)dxdy + \int_{P_T} e^{\beta t}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} (2c_{ij} - a_{ijx} - b_{ijy})u_j u_i -$$

$$-\beta\sum_{i=1}^{n} u_i^2\Big)dxdydt \leqslant \int_D \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y)dxdy\,. \tag{21}$$

Оскільки згідно з припущеннями теореми виконується умова (19), то при $\beta \leqslant c_0$ другий інтеграл в лівій частині (12) невід'ємний і оцінивши його, отримаємо потрібну нерівність (20).

1. Ванг П.К. *Исследование устойчивости схематизированого гибкого летательного аппарата прямым методом Ляпунова*// Ракетная техника и космонавтика.– 1965. – N 9. – С.249-251.

2. Паркс П.С. *Применение второго метода Ляпунова к задаче устойчивости флаттера панели*// Ракетная техника и космонавтика.– 1966, N 1. – С.220-223.

3. A.Jeffrey, J.Kato *Liapunov's direct method in stability problems for semilinear and quasilinear hyperbolic systems*// Journal of Mathematics and Mechanics. – 1969. – Vol. 18, N 7. – P. 659-682.

4. Knut S., Eckhoff *On stability for symmetric hyperbolic systems*// Journal of Differential Equations. – 1981. – Vol. 40. – P. 94-115.

5. Елтышева Н.А. *О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости*// Матем. сб. – 1988. – Т.135 (177), N 2. – С.186-209.

Стаття надійшла до редколегії 05.02.97