УДК 517.95

# ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ СИЛЬНО ВИРОДЖУЮТЬСЯ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

М. М. Бокало, В. М. Сікорський

**Bokalo M.M., Sikorsky V.M. A problem without initial conditions for weak nonlinear parabolic equations with strong degeneration at the initial moment of time** We studied weak nonlinear parabolic equations which are defined in unbounded domains with respect to spaces variables and strongly degenerated in initial moment of time. The problems with mixed boundary conditions without initial data for these equations are investigated. The uniqueness classes of generalized solutions of this problems have been obtained. The existence of generalized solutions of a problems in classes of uniqueness when the right side of equations belongs to corresponding classes functions have been proved.

**Вступ.** Дана праця присвячена дослідженню існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі без початкових умов зі змішаною граничною умовою для квазілінійних параболічних рівнянь, які сильно вироджуються в початковий момент часу.

Деякі задачі без початкових умов для параболічних рівнянь та систем, що вироджуються, досліджено в працях [1-7] та ін. Для лінійних і більшості нелінійних параболічних рівнянь, які вироджуються в початковий момент часу, єдиність розв'язків задачі без початкових умов має місце в класах функцій з кваліфікованою поведінкою при $t \to 0$, а доведення існування проводиться при певних обмеженнях на зростання вихідних даних при $t \to 0$. Такого ж роду результати стосовно єдиності та існування розв'язку отримано тут для лінійних і близьких до них нелінійних рівнянь параболічного типу в необмежених за просторовими змінними областях. Для їх доведення у даній задачі зроблено відповідну заміну часової змінної $t$, яка приводить до задачі Фур'є (така ідея належить С.П.Лавренюку) . Ця задача досліджена методами, аналогічними тим, які використовувалися у працях [8, 9].

**1. Формулювання задачі.**

Нехай $Q = \Omega \times (0,T)$, де $\Omega$ – необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з некомпактною кусково - гладкою межею $\partial\Omega$, $0 < T < +\infty$. Нехай $\partial\Omega = \overline{\Gamma^{(1)}} \cup \overline{\Gamma^{(2)}}$, де $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ – відкриті або порожні

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K65.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061007

множини на поверхні $\partial\Omega$, $\Gamma^{(1)}\cap\Gamma^{(2)}=\varnothing$. Покладемо $\Sigma^{(1)}=\Gamma^{(1)}\times(0,T]$, $\Sigma^{(2)}=\Gamma^{(2)}\times(0,T]$, $\Sigma^{(0)}=\overline{\Omega}\times\{0\}=\{(x,0):x\in\overline{\Omega}\}$.

Розглянемо задачу

$$\varphi(t)u_t-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j(x,t,u,\nabla u)+a_0(x,t,u,\nabla u)=f_0(x,t)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}f_j(x,t)\quad \text{в } Q, \tag{1}$$

$$u=\psi^{(1)}\quad \text{на}\quad \Sigma^{(1)}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_j(x,t,u,\nabla u)\nu_j+au=\psi^{(2)}\quad \text{на}\quad \Sigma^{(2)}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньоі нормалі до $\partial\Omega$.

Тут і далі на вихідні дані накладаються такі умови:

1) функція $\varphi(t)$ – неперервна на $[0,T]$ і неперервно диференційовна на $(0,T]$, $\varphi(0)=0, \varphi(t)>0$ при $t>0$, $\int\limits_0^T\frac{ds}{\varphi(s)}\,ds=+\infty$.
2) функції $a_j(x,t,s,\xi)$, $j=0,1,...,n$, визначені для $(x,t)\in Q$, $s\in\mathbb{R}^1$, $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ і каратеодорівські, тобто вимірні за $(x,t)$ для будь-яких $(s,\xi)$ та неперервні за $(s,\xi)$ для майже всіх $(x,t)\in Q$;
3) функції $a_j(x,t,s,\xi), j=1,...,n$, справджують локально умову Ліпшиця за $(s,\xi)$, тобто для майже всіх $(x,t)\in Q$ і довільних $(s,\xi),(r,\eta)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$ справедлива нерівність
$$|a_j(x,t,s,\xi)-a_j(x,t,\tau,\eta)|\leqslant k_j^{(1)}(x,t)|\xi-\eta|+k_j^{(2)}(x,t)|s-r|,$$
де $k_j^{(l)}\in L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)}), k_j^{(l)}\geqslant 0$, $j=1,...,n$, $l=1,2$; $a_j(x,t,0,0)\in L^2_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, $j=1,...,n$; $(|\xi|=(\sum\limits_{l=1}^{n}\xi_l^2)^{1/2})$;
4) $a_0(x,t,s,\xi)=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j(x,t)\xi_j+c(x,t,s,\xi)$, де $b_j,(b_j)_{x_i}\in L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, $i,j=1,...,n$, і для майже всіх $(x,t)\in Q$ і будь-яких $(s,\xi),(r,\eta)$ з простору $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$ справедлива нерівність (умова сильної параболічності)
$$\sum_{j=1}^{n}(a_j(x,t,s,\xi)-a_j(x,t,r,\eta))(\xi_j-\eta_j)+$$
$$+(c_(x,t,s,\xi)-c_(x,t,r,\eta))(s-r)\geqslant p(x,t)|\xi-\eta|^2+q(x,t)|s-r|^2,$$
де $p,q\in L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)}), \inf\limits_{Q'}p>0$ для будь-якої обмеженої підобласті $Q'$ області $Q$ і $\inf\limits_{Q}(q-2^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j)_{x_j})>-\infty$;
5) $f_j\in L^2_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, j=0,1,...,n ; $\psi^{(1)}\in L^2_{\rm loc}(\overline{\Sigma^{(1)}}\setminus\Sigma^{(0)})$, $\psi^{(2)}\in L^2_{\rm loc}(\overline{\Sigma^{(2)}}\setminus\Sigma^{(0)})$; $a\in L^\infty_{\rm loc}(\overline{\Sigma}^{(2)}\setminus\Sigma^{(0)})$, $\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\nu_j+a\geqslant 0$ на $\Sigma^{(2)}$.

Під $L^{\infty}_{\text{loc}}(\overline{G} \setminus \Sigma^{(0)})(L^2_{\text{loc}}(\overline{G} \setminus \Sigma^{(0)}))$, де $G = Q$ або $G = \Sigma^{(l)}, l = 1, 2$, розуміємо простір вимірних функцій, звуження яких на довільну вимірну і обмежену підмножину множини $G$, яка перебуває на додатній відстані від множини $\Sigma^{(0)}$, є вимірними і обмеженими (інтегровними з квадратом) на цій підмножині функціями. Нехай $W^{1,0}_{2,\text{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$ – простір функцій $v \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$, які мають узагальнені похідні $v_{x_j} \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$, $j = 1, ..., n$.

*Зауваження 1.* Якщо виконується умова $\int\limits_0^T \frac{ds}{\varphi(s)} = +\infty$, то кажуть, що рівняння сильно вироджується в момент $t = 0$, а якщо $\int\limits_0^T \frac{ds}{\varphi(s)} < +\infty$, то рівняння слабко вироджується.

*Зауваження 2.* Частковим випадком розглянутих тут рівнянь вигляду (1) є лінійні параболічні рівняння

$$\varphi(t)u_t - (a_{i,j}(x,t)u_{x_j})_{x_i} + b_i(x,t)u_{x_i} + q(x,t)u = f_0(x,t) - \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,t),$$

де $a_{i,j}\xi_i\xi_j \geqslant p|\xi|^2$ для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n; \varphi, p, b_i, i = \overline{1,n}, q, f_i, i = \overline{0,n}$, такі ж як в умовах 1) - 5). Тому для цих рівнянь справедливі всі отримані тут результати.

**Означення 1.** *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію $u$ з простору $W^{1,0}_{2,\text{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$, яка справджує умову (2) (в сенсі сліду) та інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_{Q'} \{-u(\varphi\psi)_t + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t,u,\nabla u)\psi_{x_j} + a_0(x,t,u,\nabla u)\psi\}\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma^{(2)} \cap \overline{Q}'} au\psi\, d\Sigma = \iint\limits_{Q'} \{f_0\psi + \sum_{j=1}^{n} f_j\psi_{x_j}\}\, dxdt + \int\limits_{\Sigma^{(2)} \cap \overline{Q}'} \psi^{(2)}\psi\, d\Sigma \tag{4}$$

*для довільної обмеженої підобласті $Q'$ області $Q$, яка розташована на додатній відстані від множини $\Sigma^{(0)}$, і будь-яких $\psi \in C^1(\overline{Q'})$ таких, що $\psi = 0$ на $\partial Q' \setminus \Sigma^{(2)}$.*

Дослідимо умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).

**2. Позначення і додаткові припущення.**

Нехай $\{\Omega_\tau\}$ – сім'я обмежених підобластей області $\Omega$, які залежать від параметра $\tau = (\tau_1, ..., \tau_M) \in \Pi = \{\tau : \tau_j \geqslant 0, j = 1, ..., M\}$, де $M \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $\Omega_\tau \subset \Omega_{\tau'}$, якщо $\tau_j \leqslant \tau'_j$, $j = 1, ..., M$, і $\Omega = \bigcup\limits_{\tau \in \Pi} \Omega_\tau$. Позначимо $\gamma_\tau = \partial\Omega_\tau \setminus \partial\Omega$ і припустимо, що $\gamma_\tau = \bigcup\limits_{l=1}^{M} \gamma_{\tau_l}$, де $\gamma_{\tau_l}$ є $(n-1)$-вимірною гіперповерхнею, яка має таку ж гладкість, як і $\partial\Omega$, і її границя належить $\partial\Omega$. Припустимо, що для будь-якого $\hat{\tau} \in \Pi$ з $\hat{\tau}_l > 0$, $l = 1, ..., M$, в деякому околі $\gamma_{\hat{\tau}_l}$ можна ввести локальні координати $y$ такі, що $y_j = \psi_j(x)$, $j = 1, ..., n$, де функції $\psi_j(x)$ – неперервно диференційовні, $dx = \chi_l(x)dy$, гіперплощина $y_n = \tau_l$ містить $\gamma_{\tau_l}$ при всіх $\tau_l$ із деякого околу $\hat{\tau}_l$. Тоді існують неперервні додатні на $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_0$ функції $h_l(x), l = 1, ..., M$, такі, що для будь-якої неперервної на $\overline{\Omega}$ функції $v$ справедлива рівність

$$\frac{\partial}{\partial \tau_l} \int\limits_{\Omega_\tau} v(x)\, dx = \int\limits_{\gamma_{\tau_l}} v(x)h_l(x)\, ds, \quad \tau_l > 0.$$

Нехай $\tau \in \Pi$, $t_0 \in (0,T)$. Позначимо

$$Q_{\tau,t_0} = \Omega_\tau \times (t_0,T), \quad \Gamma_\tau^{(1)} = \Gamma^{(1)} \cap \partial\Omega_\tau, \quad \Gamma_\tau^{(2)} = \Gamma^{(2)} \cap \partial\Omega_\tau,$$

$$\Sigma_{\tau,t_0}^{(1)} = \Gamma_\tau^{(1)} \times (t_0,T], \quad \Sigma_{\tau,t_0}^{(2)} = \Gamma_\tau^{(2)} \times (t_0,T], \quad S_{\tau_l,t_0} = \gamma_{\tau_l} \times (t_0,T], \quad S_{\tau,t_0} = \bigcup_{l=1}^{M} S_{\tau_l,t_0}.$$

Нехай

$$d_{1,l}(\tau_l,t_0) = \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left( \sum_{j=1}^{n} [k_j^{(1)}(x,t)]^2/[p(x,t)h_l(x)] \right)^{1/2},$$

$$d_{2,l}(\tau_l,t_0) = \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left( \left( \sum_{j=1}^{n} [k_j^{(2)}(x,t)]^2 \right)^{1/2} - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} b_j \nu_j \right),$$

де $\vec{\nu} = (\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньоі нормалі до $\gamma_{\tau_l}$, $\tau_l > 0, l = 1,...,M$, $0 < t_0 < T$.

Візьмемо дійсне число $\mu$ таке, що $q - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j)_{x_j} + \mu \geqslant 0$ на $Q$ у випадку, коли $\Gamma_\tau^{(1)} \neq \varnothing$ для кожного $\tau \in \Pi$, і $q - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j)_{x_j} + \mu > 0$ на $Q$ в протилежному випадку, і покладемо

$$E_\mu(v) = p|\nabla v|^2 + (q - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} (b_j)_{x_j} + \mu)|v|^2;$$

$$\lambda_l(\tau_l,t_0) = \inf_{t,v} \left\{ \left[ \int_{\gamma_{\tau_l}} E_\mu(v) h_l d\gamma \right] \left[ \int_{\gamma_{\tau_l}} v^2 \, d\gamma \right]^{-1} \right\}, \quad \tau_l > 0,\ 0 < t_0 < T.$$

де нижня грань береться по всіх неперервно диференційовних в околі $\gamma_{\tau_l}$ функціях $v$, які дорівнюють нулю на $\partial\gamma_{\tau_l} \cap \Gamma^{(1)}$, і всіх $t \in [t_0,T], l = 1,...,M$;

$$\Theta(\tau,t_0) = \inf_{v} \left\{ \left[ \int_{\Omega_\tau} E_\mu(v)|_{t=t_0} \, dx \right] \left[ \int_{\Omega_\tau} v^2 \, dx \right]^{-1} \right\},$$

де нижня грань береться по всіх функціях $v$, які належать простору $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ і дорівнюють нулю в околі $\Gamma_\tau^{(1)}$.

Додатково припустимо таке:

6) існують неперервні функції $A_0(\tau,t_0) > 0$, $A_{\tau_l}(\tau_l,t_0) > 0$, $l = 1,...,M$, $(\tau = (\tau_1,...,\tau_M) \in \Pi$, $0 < t_0 \leqslant T)$, такі, що

$$d_{1,l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1/2}(\tau_l,t_0) + d_{2,l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1}(\tau_l,t_0) \leqslant A_l(\tau_l,t_0),\ l = 1,...,M,$$

$$2^{-1}\Theta^{-1}(\tau,t_0) \leqslant A_0(\tau,t_0),$$

і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tau_l}{d\alpha} = A_l(\tau_l,t_0),\ l=1,...,M, \quad \frac{dt_0}{d\alpha} = -\varphi(t_0)A_0(\tau,t_0),$$

$$\tau_l(0)=0, \quad l=1,...,M, \qquad t_0(0)=T$$

має єдиний розв'язок $\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha),...\tau_M(\alpha)$, $t_0(\alpha)$, визначений на $[0,\infty)$ і такий, що $\tau_l(\alpha)\to+\infty$, $l=1,...,M$, $t_0(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to\infty$. Далі під $\tau_1(\alpha),...,\ \tau_M(\alpha),t_0(\alpha)$ завжди будемо розуміти цей розв'язок.

Покладемо

$$Q_\alpha = Q_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)}, \quad \Sigma_\alpha^{(1)} = \Sigma_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)}^{(1)}, \quad \Sigma_\alpha^{(2)} = \Sigma_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)}^{(2)}, \quad S_\alpha = S_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)}.$$

Введемо простір $\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha) = \{v|\, v\in W_2^{1,0}(Q_\alpha), v=0 \text{ на } \Sigma_\alpha^{(1)}\}$ і норму в ньому

$$\langle v\rangle_\alpha = \left(\iint\limits_{Q_\alpha} \frac{E_\mu(v)}{\varphi(t)}\exp\{2\mu\int\limits_t^T \frac{ds}{\varphi(s)}\}dxdt\right)^{1/2}.$$

На підставі наших припущень, як випливає з [8], норма $\langle v\rangle_\alpha$ в просторі $\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha)$ еквівалентна нормі

$$\|v\|_\alpha = \left(\iint\limits_{Q_\alpha} [v^2+|\nabla v|^2]dxdt\right)^{1/2}.$$

Перейдемо до формулювання основних результатів. При цьому завжди будемо вважати, що виконуються умови 1) – 6).

### 3. Формулювання основних результатів.

Сформулюємо твердження, яке є аналогом відомого в механіці принципу Сен-Венана.

**Теорема 1.** *Нехай $R^*>0$ і $u_1(x,t),u_2(x,t)$ – функції з $W_{2,\text{loc}}^{1,0}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, які збігаються на $\Sigma_{R^*}^{(1)}$ та справджують інтегральну тотожність (4) при умові, що $Q'\subset Q_{R^*}$. Тоді для будь-яких $R_1,R_2$ таких, що $0<R_1<R_2\leqslant R^*$, справедлива оцінка*

$$\langle u_1-u_2\rangle_{R_1} \leqslant \exp\{(R_1-R_2)/2\}\langle u_1-u_2\rangle_{R_2}.$$

Із цієї теореми легко випливає теорема про єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).

**Теорема 2.** *В класі функцій $u$ з $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, які справджують умову*

$$\iint\limits_{Q_R}\frac{E_\mu(u)}{\varphi(t)}\exp\{2\mu\int\limits_t^T\frac{ds}{\varphi(s)}\}\,dxdt=o(1)\exp\{R\}\quad \textit{при}\quad R\to+\infty,$$

*узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) єдиний.*

Існування узагальненого розв'язку задачі (1)- (3) досліджено в припущенні, що умови (2), (3) однорідні, тобто мають вигляд

$$u=0\quad\text{на}\quad\Sigma^{(1)},\tag{$2_0$}$$

$$\sum_{j=1}^n a_j(x,t,u,\nabla u)\nu_j+au=0\quad\text{на}\quad\Sigma^{(2)},\tag{$3_0$}$$

і права частина системи (1) справджує певні умови зростання на нескінченності.

Перш ніж формулювати теорему існування, введемо ще деякі позначення. Для кожного $k\in\mathbb{N}$ покладемо $\Omega_k=\Omega_{\tau(k)},\Gamma_k^{(l)}=\Gamma_{\tau(k)}^{(l)},l=1,2,t_k=t_0(k)$,

$$\Lambda_k=\inf_{t,v}\left\{\left[\int\limits_{\Omega_k}E_\mu(v)\,dx\right]\left[\int\limits_{\Omega_k}v^2\,dx\right]^{-1}\right\},$$

де інфімум береться по всіх функціях $v$, які належать простору $C^1(\overline{\Omega_k})$ і дорівнюють нулю на $\Gamma_k^{(1)}$, та всіх $t\in[t_k,T]$; $\quad p_k=\inf\limits_{Q_k}p(x,t)>0$.

**Теорема 3.** *Нехай існують числа $C>0$ і $\varepsilon>0$ такі, що для довільних $k\in\mathbb{N}$*

$$\Lambda_k^{-1}\iint\limits_{Q_k}\frac{[f_0(x,t)-a_0(x,t,0,0)]^2}{\varphi(t)}\exp\{2\mu\int\limits_t^T\frac{ds}{\varphi(s)}\}\,dxdt+$$

$$+p_k^{-1}\iint\limits_{Q_k}\sum_{j=1}^n\frac{[f_j(x,t)-a_j(x,t,0,0)]^2}{\varphi(t)}\exp\{2\mu\int\limits_t^T\frac{ds}{\varphi(s)}\}\,dxdt\leqslant C\exp(1-\varepsilon)k.$$

*Тоді існує узагальнений розв'язок $u$ задачі $(1),(2_0),(3_0)$ з класу єдиності, вказаному в теоремі 2. Більше того, цей розв'язок справджує оцінку*

$$<u>_k\leqslant C_0\exp\{(1-\varepsilon)k/2\},$$

*де $C_0>0$ – стала, яка залежить тільки від $C$ і $\varepsilon$.*

**Доведення основних результатів.**
Зробимо в інтегральній тотожності (4) заміну змінної $t$ на $\sigma$ за правилом

$$\sigma = \int\limits_T^t \frac{ds}{\varphi(s)}. \tag{5}$$

В результаті, позначивши через $\tilde{u}(x,\sigma)$, $\tilde{\varphi}(\sigma)$, $\tilde{a}_j(x,\sigma,s,\xi)$ $\tilde{f}_j(x,\sigma), j = 0,1,...,n$, $\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^{(1)}$, $\tilde{\psi}^{(2)}$ функції, отримані при вказаній заміні відповідно з $u$, $\varphi$, $a_j$, $f_j$, $j = 1,...,n, \psi, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ і зауваживши, що $dt = \tilde{\varphi}(\sigma)\, d\sigma$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\varphi}(\sigma)}\frac{\partial}{\partial \sigma}$, приходимо до тотожності

$$\iint\limits_{\tilde{Q}'} \{-\tilde{u}(\tilde{\varphi}\tilde{\psi})_\sigma[\tilde{\varphi}]^{-1} + \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}_{x_j} + \tilde{a}_0(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}\}\tilde{\varphi}\, dxd\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\Sigma}^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{a}\tilde{u}\tilde{\psi}\tilde{\varphi}\, d\Sigma = \iint\limits_{\tilde{Q}'} \{\tilde{f}_0\tilde{\psi} + \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j\tilde{\psi}_{x_j}\}\tilde{\varphi}\, dxd\sigma + \int\limits_{\tilde{\Sigma}^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{\psi}^{(2)}\tilde{\psi}\tilde{\varphi}\, d\Sigma \tag{6}$$

для довільної обмеженої підобласті $\tilde{Q}'$ області $\tilde{Q}$ і будь-яких $\tilde{\psi} \in C^1(\overline{\tilde{Q}'})$ таких, що $\tilde{\psi} = 0$ на $\partial\tilde{Q}' \setminus \tilde{\Sigma}^{(2)}$.

Тут $\tilde{Q} = \Omega \times (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,\sigma}$, $\tilde{\Sigma}^{(1)} = \Gamma^{(1)} \times (-\infty, 0]$, $\tilde{\Sigma}^{(2)} = \Gamma^{(2)} \times (-\infty, 0]$. Очевидно, що функція $\tilde{u}(x,\sigma)$ належить простору $W^{1,0}_{2,\text{loc}}(\overline{\tilde{Q}})$ (означення цього простору див.[8]) і задовольняє (в сенсі сліду) умову

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}^{(1)} \quad \text{на} \quad \tilde{\Sigma}^{(1)}. \tag{$\tilde{2}$}$$

Відмітимо, що відображення простору $\{\tilde{\psi} : \tilde{\psi} \in C^1(\overline{\tilde{Q}'}), \tilde{\psi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tilde{Q}' \setminus \tilde{\Sigma}^{(2)}\}$ у той же простір, при якому кожній функції $\tilde{\psi}$ ставиться у відповідність функція $\tilde{\psi}\tilde{\varphi}$, є бієктивним. Тому, з (6), взявши $\tilde{\psi}[\tilde{\varphi}]^{-1}$ замість $\tilde{\psi}$, отримаємо

$$\iint\limits_{\tilde{Q}'} \{-\tilde{u}\tilde{\psi}_\sigma + \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}_{x_j} + \tilde{a}_0(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}\}\, dxd\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{a}\tilde{u}\tilde{\psi}\, d\Sigma = \iint\limits_{\tilde{Q}'} \{\tilde{f}_0\tilde{\psi} + \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j\tilde{\psi}_{x_j}\}\, dxd\sigma + \int\limits_{\tilde{\Sigma}^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{\psi}^{(2)}\tilde{\psi}\, d\tilde{\Sigma} \tag{7}$$

для довільної обмеженої підобласті $\tilde{Q}'$ області $\tilde{Q}$ і будь-яких $\tilde{\psi} \in C^1(\overline{\tilde{Q}'})$ таких, що $\tilde{\psi} = 0$ на $\partial\tilde{Q}' \setminus \tilde{\Sigma}^{(2)}$.

Звідси та з [8, 9] випливає, що функція $\tilde{u}$ є узагальненим розв'язком задачі

$$\tilde{u}_\sigma - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j}\tilde{a}_j(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u}) + \tilde{a}_0(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u}) = \tilde{f}_0(x,\sigma) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{f}_j(x,\sigma) \quad \text{в} \quad \tilde{Q}, \tag{$\tilde{1}$}$$

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}^{(1)} \quad \text{на} \quad \tilde{\Sigma}^{(1)}, \tag{$\tilde{2}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j(x, \sigma, \tilde{u}, \nabla\tilde{u})\nu_j + a\tilde{u} = \tilde{\psi}^{(2)} \quad \text{на} \quad \tilde{\Sigma}^{(2)}. \tag{$\tilde{3}$}$$

Неважко перевірити, що задача $(\tilde{1}), (\tilde{2}), (\tilde{3})$ є частковим випадком задачі (1)-(3) праці [9] (див. також [8]) і для неї виконані всі без винятку умови теорем 1-3 цієї праці. Звідси, оскільки кожному розв'язку $u$ задачі (1)-(3) відповідає розв'язок $\tilde{u}$ задачі $(\tilde{1}) - (\tilde{3})$ і навпаки, отримаємо твердження теорем 1-3 даної праці. Відмітимо, що з цих міркувань та результатів [9], як наслідок, отримаємо такий факт: узагальнений розв'язок $u$ задачі (1)-(3) є границею сильно збіжної у $W^{1,0}_{2,\text{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$ послідовності $\{u_k\}$, де $u_k$ – продовжений нулем поза $Q_k$ узагальнений розв'язок (означення аналогічне як у [9]) змішаної задачі ( в $Q_k$)

$$\varphi(t)u_{kt} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j(x, t, u_k, \nabla u_k) + a_0(x, t, u_k, \nabla u_k) = f_0(x, t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(x, t) \text{ в } Q_k,$$

$$u_k = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j(x, t, u_k, \nabla u_k)\nu_j + a u_k = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(2)},$$

$$u_k|_{t=t_k} = 0.$$

**Приклад.** Отримані результати проілюструємо на простому прикладі. Нехай $\Omega = \{(x_1, x_2) \; : \; 0 < x_1 < \pi, -\infty < x_2 < \infty\}$. Розглянемо в області $Q = \Omega \times (0, T)$ задачу

$$t\, u_t - \Delta u = f(x, t) \quad \text{в} \quad Q, \quad u|_{x_1=0} = 0, \quad u_{x_1}|_{x_1=\pi} = 0,$$

де $f \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$. Як легко бачити, для даної задачі умови 1) - 5) виконуються з $k_j^{(1)} = 1, k_j^{(2)} = 0$, $p = 1, q = 0$. Покладемо $\tau = (\tau_1, \tau_2), \Omega_\tau = \{(x_1, x_2)|0 < x_1 < \pi, -\tau_1 - 1 < x_2 < \tau_2 + 1\}$ $(\tau_1 \geqslant 0, \tau_2 \geqslant 0)$. Очевидно, що $h_1(x) = h_2(x) = 1$, $d_{1,l} = \sqrt{2}$, $d_{2,l} = 0$. Візьмемо $\mu = 0$. Тоді $E_\mu(v) = |\nabla v|^2$, $\lambda_l(\tau_l, t_0) = 1/4$, $l = 1, 2$, $\Theta(\tau, t_0) = 1/4$, і, як наслідок, виконується умова 6), причому $A_l(\tau_l, t_0) = 2\sqrt{2}, A_0(\tau, t_0) = 2$. Тоді $\tau_l(\alpha) = 2\sqrt{2}\alpha, l = 1, ..., M$, $t_0(\alpha) = T\exp\{-2\alpha\}, Q_R = \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < \pi, -2\sqrt{2}R - 1 < x_2 < 2\sqrt{2}R + 1, T\exp\{-2R\} < t < T\}$. Таким чином, клас єдиності узагальненого розв'язку даної задачі (див. теорему 2) визначається умовою

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{|\nabla v|^2}{t}\, dxdt = o(1)\exp\{R\} \quad \text{при } R \to +\infty.$$

Відмітимо, що дана задача при $f = 0$ має розв'язок вигляду $u_A = \dfrac{A}{t^{1/4}} \sin \dfrac{x_1}{2}$, де $A$ – довільна стала. Як легко бачити,

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{|\nabla u_A|^2}{t}\, dxdt = \frac{\pi A^2(2\sqrt{2}R + 1)}{2\sqrt{T}}(\exp\{R\} - 1) = O(R)\exp\{R\} \text{ при } R \to \infty.$$

Звідси випливає, зокрема, що отриманий нами клас єдиності узагальненого розв'язку даної задачі близький до точного.

З теореми 3, врахувавши, що в даному випадку $\Lambda_k = 1/4, p_k = 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, випливає, що коли існують числа $C > 0, \varepsilon > 0$ такі, що

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{f^2(x,t)}{t}\, dxdt \leqslant C \exp\{(1-\varepsilon)R\},$$

то існує узагальнений розв'язок з класу єдиності і він справджує оцінку

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{|\nabla u|^2}{t}\, dxdt = C_0 \exp\{(1-\varepsilon)R\}.$$


1. Олейник О.А.,Радкевич Е.В.*Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*// Итоги науки.– Матем. анализ. 1969.М.-1971.-243с.
2. Калашников А.С. *Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка*// Вестник МГУ. Сер. матем.- 1971.-I.-N2.- С.42-48. -II.- N3.- С.3-8.
3. Иванов А.В.*Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка*// Труды Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР.-1982.- т.160.-С.3-285.
4. Глаголева Р.Я.*О классах единственности и устойчивости решений вырождающихся квазилинейных уравнений параболического типа в задаче без начальных условий*// Диффер. уравнения.- 1985.-Т.21, N8.- С.1376-1389.
5. Лавренюк С.П.*Змішана задача з видозміненими початковими умовами для однієї еволюційної системи, яка вироджується у початковий момент часу* // Доповіді АН України. Матем., природозн., техн. науки.-1993.- N 6. - С. 12-15.
6. Лавренюк С.П. *Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы*// Дифференц. уравн.- 1994. - Т. 30, N 8. - С. 1405 - 1411.
7. Пукач П.Я.*Задачі для нелінійних параболічних рівнянь з виродженням*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат.-1991. – Вип.36.- С.6-10.
8. Бокало М.М.*Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений*// Дифференц. уравн. - 1994.- Т. 30, N8,- С.1395-1402.
9. Сікорський В.М. *Задача Фур'є зі змішаною граничною умовою для систем квазілінійних параболічних рівнянь* // Вісник Львів. ун-ту. Сер.мех-мат.-1996.-Вип.45.-С.45-56.


*Стаття надійшла до редколегії 09.02.97*