УДК 517.95

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

М. О. Колінько, С. П. Лавренюк

Kolinko M.O., Lavrenyuk S.P. Existence of a solution for a nonlinear pseudoparabolic system. Existence of weak solution of the initial boundary value problem for a pseudoparabolic system was studied. Some sufficient conditions were obtained. The problem is considered in a bounded domain with respect to space variables and with zero boundary values.

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (t_0, T)$, $T < \infty$; $S_T = \partial\Omega \times (t_0, T)$. Розглянемо в Q_T систему рівнянь

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_t + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} H_\alpha(x,t) D^\alpha u -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_i t})_{x_i} + \mathcal{B}(u) + G(x,t) u = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \tag{1}$$

з крайовими

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \ldots, l-1, \tag{2}$$

і початковою

$$u(x, t_0) = 0 \tag{3}$$

умовами, де $\mathcal{B}(u) = -\sum\limits_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i)_{x_i}$; $l \geqslant 1$; $A_{\alpha\beta}$, B_{ij}, H_α, G – квадратні матриці розміру $N \times N$; $C_i(x) = \mathrm{diag}\{c_1^i(x), \ldots, c_N^i(x)\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\theta_i = \mathrm{colon}(|u_{1,x_i}|^{p-2} u_{1,x_i}, \ldots, |u_{N,x_i}|^{p-2} u_{N,x_i})$, $i = 1, \ldots, n$; $p > 2$; $u = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_N)$; $F_\alpha = \mathrm{colon}(f_{1\alpha}, \ldots, f_{N\alpha})$, $|\alpha| \leqslant 1$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n;$$

ν – зовнішня нормаль до S_T. Метою даної праці є встановлення умов існування узагальненого розв'язку задачі (1) – (3). Зауважимо, що мішані задачі для лінійних і нелінійних псевдопараболічних рівнянь і систем досліджено раніше багатьма авторами [1 – 8].

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (A), (B), (C), (G), якщо:

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K70.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061062

Умова (A). $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l;$

$$\int_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta w, D^\alpha w)dx \geqslant a_0 \int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w|^2 dx, \ a_0 > 0, \forall w \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N.$$

Умова (B). $B_{ij}(x,t), B_{ijt}(x,t) \in L^\infty(Q_T)$; $B_{ij}(x,t) = B_{ji}(x,t)$; $B_{ij}(x,t) = B^*_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n;$

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \geqslant b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad b_0 > 0$$

для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}^N$ *і майже для всіх* $(x,t) \in Q_T$.

Умова (C). $C_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$; $c^i_k(x) \geqslant c_0 > 0$ *майже для всіх* $x \in \Omega$, $j = 1,\dots,n$; $k = 1,\dots,N$.

Умова (G). $G \in L^\infty(Q_T)$; $(G(x,t)\xi,\xi) \geqslant g_0(t)|\xi|^2$, $g_0 \in L^\infty(-\infty,T)$ *для всіх* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *і майже для всіх* $(x,t) \in Q_T$.

Тут через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^N$. Позначимо через V рефлексивний банахів простір $V = (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N$. Очевидно, справедливі неперервні вкладення $V \subset (L^2(\Omega))^N \subset V^*$, де $V^* = (H^{-l}(\Omega))^N + (W^{-1,q}(\Omega))^N$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Надалі будуть використовуватися нерівності Фрідріхса ([8], с.50)

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2 dx \leqslant \gamma_{l,j} \int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx,$$

$j = 0,\dots,l$, справедливі для будь-яких $v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$, де сталі $\gamma_{l,j}$ залежать від Ω, l, n. Введемо такі позначення:

$$h_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \|H_\alpha(x,\tau)\|^2; \quad g_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_0(t) \geqslant 0, \\ g_0(t), & \text{якщо} \quad g_0(t) < 0. \end{cases}$$

Означення. *Функцію* $u(x,t)$, *яка задовольняє включення*

$$u \in L^2_{loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N) \cap L^p_{loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N), \ u_t \in L^2_{loc}((-\infty,T); (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$$

і рівність

$$\int_{Q_T} \Big[(u_t, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)u_{x_i t}, v_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (C_i(x)\theta_i, v_{x_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + (G(x,t)u,v) \Big] dxdt = \int_{Q_T} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v) dxdt \qquad (4)$$

для довільної функції $v \in (C_0^\infty(Q_T))^N$, *називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).*

Теорема. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (G) і, крім того,* $F_\alpha(x,t) \in L^2(Q_{t_0,T})$, $|\alpha| \leqslant 1$; $H_\alpha(x,t) \in L^\infty(Q_{t_0,T})$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$; $A_{\alpha\beta}(x) = A_{\beta\alpha}(x)$; $A_{\alpha\beta}(x) = A^*_{\alpha\beta}(x)$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l$, $\partial G \in C^l$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).*

Доведення. Виберемо у просторі V базис $\{\varphi^k(x)\}$ і розглянемо послідовність

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m z_k^m(t)\varphi^k(x), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

де функції $z_1^m(t), \ldots, z_m^m(t)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\int\limits_\Omega \Big[(u_t^m, \varphi^k) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u^m, D^\alpha\varphi^k) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)u^m_{x_it}, \varphi^k_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (C_i(x)\Theta_i^m, \varphi^k_{x_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha u^m, \varphi^k) + (G(x,t)u^m, \varphi^k)\Big]dx = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha\varphi^k)dx, \qquad (5)$$

$$z_k^m(t_0) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \qquad (6)$$

де $\Theta_i^m = \mathrm{colon}(|u^m_{1,x_i}|^{p-2}u^m_{1,x_i}, \ldots, |u^m_{N,x_i}|^{p-2}u^m_{N,x_i})$. Зробимо у системі (5) заміну $u^m(x,t) = v^m(x,t)e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$. Тоді $u_t^m(x,t) = v_t^m(x,t)e^{\lambda t} + \lambda v^m(x,t)e^{\lambda t}$, $\varkappa_i^m = e^{\lambda(p-2)t}\,\mathrm{colon}(|v^m_{1,x_i}|^{p-2}v^m_{1,x_i}, \ldots, |v^m_{N,x_i}|^{p-2}v^m_{N,x_i})$, а задача (5), (6) набуде вигляду

$$\int\limits_\Omega \Big[(v_t^m, \varphi^k) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)(x)D^\beta v^m, D^\alpha\varphi^k) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v^m_{x_it}, \varphi^k_{x_j}) +$$
$$+\lambda\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v^m_{x_i}, \varphi^k_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (C_i(x)\varkappa_i^m, \varphi^k_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m, \varphi^k) + \qquad (7)$$
$$+((G(x,t)+\lambda E)v^m, \varphi^k)\Big]dx = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha\varphi^k)e^{-\lambda t}dx,$$

$$v_k^m(t_0) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \qquad (8)$$

Помножимо кожне рівняння системи (7) відповідно на функцію $z_k^m(t)\exp(-\lambda t)$, додамо їх і проінтегруємо по проміжку $[t_0, \tau]$. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[(v_t^m, v^m) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^m, D^\alpha v^m) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v^m_{x_it}, v^m_{x_j}) +$$
$$+\lambda\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v^m_{x_i}, v^m_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (C_i(x)\varkappa_i^m, v^m_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m, v^m) + \qquad (9)$$
$$+((G(x,t)+E)v^m, v^m)\Big]dxdt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha v^m)e^{-\lambda t}dxdt.$$

Тепер, враховуючи умови (8) та умови теореми, перетворимо і оцінимо кожний доданок рівності (9) окремо. Матимемо:

$$\Im_1 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (v_t^m, v^m)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v^m|^2 dx, \quad \Omega_\tau = Q_\tau \cap \{t = \tau\};$$

$$\Im_2 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}D^\beta v^m, D^\alpha v^m)dxdt \geqslant a_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^m|^2 dxdt;$$

$$\Im_3 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} [(B_{ij}(x,t)v^m_{x_i t}, v^m_{x_j}) + \lambda(B_{ij}(x,t)v^m_{x_i}, v^m_{x_j})]dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,\tau)v^m_{x_i}, v^m_{x_j})dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} ((2\lambda B_{ij}(x,t) - B_{ijt}(x,t))v^m_{x_i}, v^m_{x_j})dxdt.$$

Нехай λ таке число, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} ((2\lambda B_{ij}(x,t) - B_{ijt}(x,t))\xi_i, \xi_j) \geqslant h_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$$

майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1,\ldots,n$, де $h_1 = 2h_0(T)a_0{}^{-1}\gamma_{1,0}\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}$. Тоді

$$\Im_3 \geqslant \frac{b_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v^m_x|^2 dx + \frac{h_1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |v^m_x|^2 dxdt.$$

Далі

$$\Im_4 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\varkappa_i^m, v^m_{x_i})dxdt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} e^{\lambda(p-2)t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} c_k^i(x)|v^m_{k,x_i}|^p dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \mu_3 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} e^{\lambda(p-2)t}|v^m_x|^p dxdt, \quad \mu_3 > 0;$$

$$\Im_5 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m, v^m)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\delta_0 h_0(t)\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v^m|^2 + \frac{1}{\delta_0}\gamma_{1,0}|v^m_x|^2\right]dxdt.$$

Вибравши $\delta_0 = a_0\left(2h_0(t)\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right)^{-1}$, отримаємо оцінку

$$\Im_5 \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\frac{a_0}{2}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v^m|^2 + 2h_0(t)a_0{}^{-1}\gamma_{1,0}\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}|v^m_x|^2\right]dxdt.$$

Нехай, крім того, λ таке, що $((G(x,t)+\lambda E)\xi,\xi) \geqslant 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$. Тоді

$$\Im_6 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} ((G(x,t)+\lambda E)v^m, v^m)dxdt \geqslant 0.$$

Нарешті,

$$\Im_7 \leqslant \frac{(\gamma_{l,0}+\gamma_{l,1})}{a_0} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 e^{-2\lambda t} dxdt + \frac{a_0}{4} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^m|^2 dxdt.$$

Отже, на підставі оцінок інтегралів $\Im_1, \ldots, \Im_7$, з рівності (9) ми отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (|v^m|^2 + b_0|v_x^m|^2)dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[a_0 \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^m|^2 + 2\mu_3 e^{\lambda(p-2)t_0}|v_x^m|^p\right] dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \mu_4 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 e^{-2\lambda t} dxdt \tag{10}$$

для всіх $\tau \in [t_0, T]$. Крім того, легко бачити, що

$$\mathcal{B}(v^m \exp(\lambda t)) = -\left(\sum_{i=1}^n C_i(x)\varkappa_i^m\right)_{x_i}$$

обмежений у просторі $L^q((t_0,T);(W^{-1,q}(\Omega))^N)$.

Помножимо тепер кожне рівняння системи (7) відповідно на функцію $z_{kt}^m(t)e^{-\lambda t}$, додамо їх і проінтегруємо по проміжку $[t_0,\tau]$. Від отриманого результату віднімемо рівність (9), помножену на λ. Після виконання цих операцій будемо мати рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[(v_t^m, v_t^m) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^m, D^\alpha v_t^m) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v_{x_it}^m, v_{x_jt}^m) + \right.$$
$$+\lambda \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v_{x_i}^m, v_{x_jt}^m) + \sum_{i=1}^m (C_i(x)\varkappa_i^m, v_{tx_i}^m) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m, v_t^m) + \tag{11}$$
$$\left. +((G(x,t)+\lambda E)v^m, v_t^m)\right] dxdt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v_t^m)e^{-\lambda t} dxdt.$$

Знову перетворюючи і оцінюючи кожний доданок рівності (11) на підставі умов теореми та оцінки (10), отримаємо нерівності

$$\|v^m\|_{L^\infty((t_0,T);V)} \leqslant \mu_8, \quad \|v_t^m\|_{L^2((t_0,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)} \leqslant \mu_8, \tag{12}$$

причому стала μ_8 не залежить від m. Отже, згідно з оцінками (10), (12) з послідовності $\{v^m(x,t)\}$ можна виділити таку підпослідовність $\{u^{m_k}(x,t)\}$, що $v^{m_k}(x,t) \to v(x,t)$ $*$ – слабко в $L^\infty((t_0,T);V)$; $v_t^{m_k}(x,t) \to v_t(x,t)$ слабко в $L^2((t_0,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$; $\mathcal{B}(v^{m_k}\exp(\lambda t)) \to \mathcal{Z}_\lambda$ слабко в $L^q((t_0,T);(W^{-1,q}(\Omega))^N)$, коли $m_k \to \infty$. Легко показати, що

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[(v_t,w) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v, D^\alpha w) + \sum_{i,j=1}^{m}(B_{ij}(x,t)v_{x_it}, v_{x_j}) +$$
$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v_{x_i},v_{x_j}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v,w) + ((G(x,t)+\lambda E)v,w)\Big]dxdt +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{T}\langle\mathcal{Z},w\rangle dt = \int\limits_{Q_{t_0,T}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t),D^\alpha w)e^{-\lambda t})dxdt$$

для довільної функції $w \in (C_0^\infty(Q_{t_0,T}))^N$. Крім того, оскільки $v \in L^2((t_0,T);V)$, $v_t \in L^2((t_0,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$, то на підставі теореми 1.17 ([8], c.177) $v \in C([t_0,T];(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$. Тому $v(x,t_0) = 0$. На підставі монотонності оператора $\mathcal{B}$ маємо, що $\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{B}(v\exp(\lambda t))$. Отже, $u(x,t) = v(x,t)\exp(\lambda t)$ буде узагальненим розв'язком задачі (1) – (3) і теорему доведено.

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і у випадку ненульової початкової умови $u(x,t_0) = \varphi(x)$, коли $\varphi \in (L^2(\Omega))^N$.

1. Ting T.W. *Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations*// J. Math. Soc. Japan. – 1969. – Vol. 21, N 3. – P. 440–453.
2. Gopala Rao V.R., Ting T.W. *Initial-value problems for pseudoparabolic partial differential equations*// Indiana Univ. Math. J. – 1973. – Vol.23, N 2. – P. 131–153.
3. Showalter R.E. *Partial differential equations of Sobolev-Galpern type*// Pacif. J. Math. – 1969. – Vol. 31, N 3. – P. 787–793.
4. Rundell W. *The solution of initial-boundary value problem for pseudoparabolic partial differential equations*// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1976. – A74. – P.311–326.
5. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable*// J. Different. Equat. – 1972. – Vol. 12, N 3. – P. 559–565.
6. Ford W.H. *Galerkin approximations to non-linear pseudoparabolic partial differential equations*// Aequet. math. – 1976. – Vol. 14, N 3. – P. 271–291.
7. Ляшко С.И. *Аналог метода Галеркина для решения псевдопараболических уравнений*// Доп. АН УРСР. – 1991. – N 8. – С. 59–60.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
9. Лионс Ж.- Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.96