УДК 517.956

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Г. І. Берегова

Beregova G. I. The inverse problem for a hyperbolic equation of the second order. In a rectangle $P_T = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ the inverse problem for the strictly hyperbolic equation is considered at an unknown right part. The additional information about a solution of the equation is given in the integral form. With the help of the characteristics method the theorems of existence and uniqueness of the solution of problem for local t are proved.

У праці досліджено обернену задачу з невідомим множником при вільному члені правої частини гіперболічного рівняння другого порядку на прямій. Додаткову умову задано в інтегральній формі. Обернені задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку досліджувались у працях [1-4, 10-11]. Ці праці присвячені, в основному, задачам визначення одного з коефіцієнтів при u_{x_i} або u. Деякі задачі знаходження незалежних від часової змінної правих частин гіперболічних рівнянь та систем розглянуті в [3, 5, 8–10]. Зокрема, в [12] досліджено обернену задачу для хвильового рівняння з невідомою правою частиною $f(t)$ і додатковою умовою $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma(\xi) = -4\pi g_0(t)$. За допомогою методу Фур'є у частковому випадку доводено існування та єдиність узагальненого і класичного розв'язків задачі.

Розглянемо в прямокутнику $P_T = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$ строго гіперболічне рівняння другого порядку

$$u_{tt} + a_1(x,t)u_{xt} + a_2(x,t)u_{xx} = b_1(x,t)u_t + b_2(x,t)u_x + b(x,t)u + f(t)g(x,t), \tag{1}$$

в якому окрім функції $u(x,t)$ невідомою є також і функція $f(t)$. Задамо початкові умови

$$u(x,0) = \beta_1(x), \qquad u_t(x,0) = \beta_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

граничні умови $(c_1 = 0,\ c_2 = l)$

$$u_x(c_i,t) = \nu_i(t), \quad i = 1,2, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та додаткову умову

$$\int\limits_0^l \alpha(x,t)u(x,t)\, dx = h(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L20.

Надалі вважатимемо, що $\lambda_1(x,t) < 0 < \lambda_2(x,t)$, $(x,t) \in P_T$, де λ_1 і λ_2 – дійсні корені відповідного характеристичного рівняння $\lambda^2 + a_1(x,t)\lambda + a_2(x,t) = 0$.

Користуючись методикою праці [13], зведемо рівняння (1) до системи рівнянь першого порядку в припущенні, що функція $u(x,t)$ є двічі неперервно диференційовна в $\overline{P}_T$, а $f \in C([0,T])$ і справджуються рівності (1)-(4). Введемо функції

$$v_i(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_{3-i}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad i = 1,2. \tag{5}$$

Перепишемо рівняння (1) у вигляді системи

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = \left[b_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + \left(b_2(x,t) - \frac{\partial \lambda_{3-i}}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial \lambda_{3-i}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,t)\right]u+ \\ +f(t)g(x,t), \qquad i = 1,2. \tag{6}$$

З позначень (5) також випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)} v_1(x,t) - \frac{1}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)} v_2(x,t), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\lambda_1(x,t)}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)} v_1(x,t) - \frac{\lambda_2(x,t)}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)} v_2(x,t). \end{aligned} \tag{7}$$

На підставі рівності $u(x,t) = u(x,0) + \int\limits_0^t \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau$ та умов (2), (7), отримаємо зображення розв'язку

$$u(x,t) = \beta_1(x) + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_0^t A_j(x,\tau) v_j(x,\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in \overline{P}_T, \tag{8}$$

де $A_j(x,\tau) = (-1)^{j+1}\lambda_j(x,\tau)/(\lambda_1(x,\tau) - \lambda_2(x,\tau))$, $j = 1,2$.

Підставляючи вирази (7) і (8) у рівняння (6), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x,t) v_j(x,t) + \\ + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{2} B_j(\tau,x,t) v_j(x,\tau)\, d\tau + f(t)g(x,t) + B(x,t), \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$a_{ij}(x,t) = (-1)^{j+1}\frac{b_1(x,t)\lambda_j(x,t) + b_2(x,t) - \partial\lambda_{3-i}(x,t)/\partial t + \lambda_i(x,t)\partial\lambda_{3-i}(x,t)/\partial x}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)},$$

$B_j(\tau,x,t) = b(x,t)A_j(x,\tau)$, $B(x,t) = b(x,t)\beta_1(x)$.

Використовуючи рівності (2), (3), (5) та друге співвідношення (7), отримаємо початкові і граничні умови для системи (9):

$$v_i(x,0) = \beta_2(x) - \lambda_{3-i}(x,0)\beta_1'(x) \equiv q_i(x), \quad i = 1,2, \tag{10}$$

$$v_1(c_i,t) - v_2(c_i,t) = \big(\lambda_1(c_i,t) - \lambda_2(c_i,t)\big)\nu_i(t) \equiv \gamma_i(t), \quad i = 1,2. \tag{11}$$

За допомогою зображення (8) умову (4) перепишемо у такому вигляді

$$\sum_{j=1}^{2}\int_0^t\int_0^l \alpha(x,t)A_j(x,\tau)v_j(x,\tau)\,dxd\tau = h_1(t),\ h_1(t) = h(t) - \int_0^l \alpha(x,t)\beta_1(x)\,dx. \tag{12}$$

Розв'язком оберненої задачі (9)–(12) назвемо трійку функцій $\big(v_1(x,t), v_2(x,t), f(t)\big) \in C^1(\overline{P}_T)\times C^1(\overline{P}_T)\times C([0,T])$, яка задовольняє рівняння (9) та умови (10)–(12). Тоді пару $\big(u(x,t), f(t)\big) \in C^{1,2}(\overline{P}_T)\times C([0,T])$, де функція $u(x,t)$ подається зображенням (8), назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Теорема 1. *Нехай*

1) $a_i \in C^{2,1}(\overline{P}_T), b \in C^{1,0}(\overline{P}_T), b_i \in C^{1,0}(\overline{P}_T), g \in C^{1,0}(\overline{P}_T),\ a_2(x,t) \neq 0,$ $\big(a_1(x,t)\big)^2 - 4a_2(x,t) > 0;$

2) $\alpha \in C^{0,2}(\overline{P}_T), h \in C^2([0,T]),\ \beta_i \in C^{3-i}([0,l]),\ \nu_i \in C^1([0,T]);$

3) $\int_0^l \alpha(x,t)g(x,t)\,dx \neq 0, \quad t \in [0,T];$

4) виконуються умови узгодження нульового та першого $\beta_1'(0) = \nu_1(0),\ \ \beta_1'(l) = \nu_2(0),$ $\alpha(l,0)\beta_1(l) = \alpha(0,0)\beta_1(0), \quad \int_0^l \alpha(x,0)\beta_1(x)\,dx = h(0), \quad \beta_2'(0) = \nu_1'(0), \quad \beta_2'(l) = \nu_2'(0),$ $\int_0^l \left[\alpha_t'(x,0)\beta_1(x) + \alpha(x,0)\beta_2(x)\right] dx = h'(0)$ *порядків.*

Тоді в області $\overline{P}_T$ *існує єдиний узагальнений розв'язок* $\big(u(x,t), f(t)\big) \in C^{1,2}(\overline{P}_T)\times C([0,T])$ *задачі (1)–(4).*

Доведення. З наведених вище міркувань випливає, що для знаходження узагальненого розв'язку (1)–(4) достатньо розв'язати задачу (9)–(12) з невідомими $f(t)$ та $v_i(x,t)$, а потім із співвідношення (8) знайти $u(x,t)$. Задачу (9)–(12) будемо розв'язувати методом характеристик. Введемо такі допоміжні функції

$$v_i(c_i,t) = \mu_i(t), \quad i = 1,2. \tag{13}$$

Нехай $\varphi_i(\tau;x,t)$ – розв'язок характеристичного рівняння $d\xi/d\tau = -\lambda_i(\xi,\tau)$ при $\xi(t) = x$, де $(x,t) \in P_T$. Через $L_i(x,t)$ позначимо відповідні інтегральні криві, які проходять через точку (x,t). Візьмемо $T_1 \in (0,T]$ таке, щоб характеристики, випущені з кутових точок $(c_i,0)$ в області P_{T_1} не перетиналися. Тоді ці характеристики розбивають $\overline{P}_{T_1}$

на три підобласті: $\overline{P}_{T_1} = \bigcup\limits_{j=0}^{2} P_j$. Інтегруючи в кожній області P_j рівність (9) вздовж характеристик, отримуємо систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} v_i(x,t) = \omega_i(x,t) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} \Big[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) v_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + B(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + \\ + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{0}^{\tau} B_j(\eta,\varphi_i(\tau;x,t),\tau) v_j(\varphi_i(\tau;x,t),\eta) d\eta + f(\tau) g(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \Big] d\tau, \quad i=1,2, \end{aligned} \tag{14}$$

де $t_i(x,t) = \min\{\tau : (\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \in \overline{P}_{T_1}\}$,

$$\omega_i(x,t) = \begin{cases} q_i(\varphi_i(0;x,t)), \text{при } (x,t) \in P_0 \cup P_{3-i}; \\ \mu_i(t_i(x,t)), \quad \text{при} \quad (x,t) \in P_i. \end{cases}$$

Підставляючи (14) в граничні умови (11), знаходимо функції μ_i :

$$\begin{aligned} \mu_i(t) = q_{3-i}(\varphi_{3-i}(0;c_i,t)) + \int\limits_{0}^{t} \Big[\sum_{j=1}^{2} a_{3-i,j}(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau) v_j(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau) + \\ + \int\limits_{0}^{\tau} \sum_{j=1}^{2} B_j(\eta,\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau) v_j(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\eta)\, d\eta + \\ + f(\tau) g(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau) + B(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau) \Big] d\tau + (-1)^{i+1}\gamma_i(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Умову (12) двічі продиференціюємо за t. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{0}^{l} \Big[2\alpha_t^{'}(x,t) A_j(x,t) + \alpha(x,t) A_{jt}^{'}(x,t) \Big] v_j(x,t)\, dx + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{0}^{l} \alpha(x,t) A_j(x,t) \frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t}\, dx + \\ + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{0}^{l} \alpha_{tt}^{''}(x,t) A_j(x,\tau) v_j(x,\tau)\, dx = h_1^{''}(t). \end{aligned} \tag{16}$$

Перепишемо цю рівність так

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \Bigg[\int\limits_{0}^{\varphi_i(t;c_i,0)} \Big[2\alpha_t^{'} A_i + \alpha A_{it}^{'} \Big] v_i\, dx + \int\limits_{\varphi_i(t;c_i,0)}^{l} \Big[2\alpha_t^{'} A_i + \alpha A_{it}^{'} \Big] v_i\, dx + \\ + \int\limits_{0}^{\varphi_i(t;c_i,0)} \alpha A_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\, dx + \int\limits_{\varphi_i(t;c_i,0)}^{l} \alpha A_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\, dx \Bigg] + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{0}^{l} \alpha_{tt}^{''} A_i v_i\, dx = h_1^{''}(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Надалі нам знадобляться такі похідні [6]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x} &= \exp\left(\int_\tau^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right),\\
\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t} &= \lambda_i(x,t)\exp\left(\int_\tau^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right),\\
\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x} &= \frac{1}{\lambda_i(c_i,t_i(x,t))}\exp\left(\int_{t_i(x,t)}^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right),\\
\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial t} &= \frac{\lambda_i(x,t)}{\lambda_i(c_i,t_i(x,t))}\exp\left(\int_{t_i(x,t)}^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right), \qquad i=1,2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

У вираз (17) підставимо (14), (15), а також результат диференціювання (14) за t. Після цього в отриманому співвідношенні проведемо такі перетворення [7]: в подвійних і потрійних інтегралах змінюємо порядок інтегрування з метою отримання доданків типу Вольтерра, а потім у внутрішніх інтегралах від змінної x переходимо до y заміною змінних:
1) $y=\varphi_i(\tau;x,t)$, тоді $x=\varphi_i(t;y,\tau)$, $i=1,2$; 2) $y=\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))$.
Оскільки згідно (18), для кожної точки $(x,t)\in P_i$ виконуються рівності

$$\frac{d\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{dx}=\frac{\partial\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{\partial t}\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\neq 0,$$

то на підставі теореми про неявну функцію в P_i існує $\psi_i\in C^1$, що $x=\psi_i(y,\tau,t)$. В однократних інтегралах отриманої рівності від змінної y переходимо до змінної τ заміною $\tau=t_i(y,t)$. Оскільки $\dfrac{\partial t_i(y,t)}{\partial y}\neq 0$, то за теоремою про неявну функцію в кожній P_i існує неперервно диференційовна χ_i така, що $y=\chi_i(\tau,t)$.

Обчислимо похідні $\frac{\partial\psi_i(y,\tau,t)}{\partial y}$, $\frac{\partial\chi_i(\tau,t)}{\partial\tau}$, $i=1,2$. Враховуючи заміну $y=\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))$, після диференціювання виразу $x=\psi_i(y,\tau,t)$ за x, отримаємо

$$\frac{\partial\psi_i(y,\tau,t)}{\partial y}=\left(\frac{\partial\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{\partial t}\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\right)^{-1}.$$

Щоб знайти $\dfrac{\partial\chi_i(\tau,t)}{\partial\tau}(i=1,2)$, розглянемо тотожність $\varphi_i(t_i(x,t);x,t)=c_i$ при $\tau=t_i(x,t)$, $(x,t)\in P_i$. Тоді, диференціюючи $\varphi_i(\tau;\chi_i(\tau,t),t)=c_i$ за τ, маємо

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\chi_i(\tau,t)}{\partial\tau}=0.$$

Звідси, з врахуванням (18), отримуємо

$$\frac{\partial \chi_i(\tau,t)}{\partial \tau} = \lambda_i(c_i,\tau)\exp\left(-\int\limits_\tau^t \lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\sigma;\chi_i(\tau,t),t),\sigma\big)\,d\sigma\right).$$

Всі отримані вирази для шуканих похідних виражаються через відомі функції.

Перетворивши так рівність (17), приходимо до інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду стосовно $f(t)$, в яке входять невідомі функції v_j та v'_{jx} :

$$\begin{gathered}
f(t)\int\limits_0^l \alpha(y,t)g(y,t)\,dy = \sum_{i=1}^{2}(-1)^i\int\limits_0^t f(\tau)\Bigg[\int\limits_{c_i}^{\varphi_i(\tau;c_{3-i},t)}\Big(2\alpha'_t(x,t)A_i(x,t)+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)+\\
+\alpha(x,t)A_i(x,t)\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t}+\alpha(x,t)\sum_{j=1}^{2}A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\Bigg|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)} g(y,\tau)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dy-\\
-\int\limits_{c_i}^{\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t)}\bigg(\Big(2\alpha'_t(x,t)A_i(x,t)+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)\Big)\lambda_i(x,t)+\alpha(x,t)\Big(A_i(x,t)+\\
+\sum_{j=1}^{2}A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\frac{\partial\psi_i(y,\tau,t)}{\partial y}\bigg)\bigg|_{x=\psi_i(y,\tau,t)} g(y,\tau)\,dy\Bigg]d\tau-\\
-\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l v_j(y,\tau)\Big(\sum_{i=1}^{2}\alpha(y,t)A_i(y,t)B_j(t,y,\tau)+\alpha''_{tt}(y,t)A_j(y,t)\Big)\,dy\,d\tau+\\
+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_{c_i}^{\varphi_i(\tau;c_{3-i},t)}\bigg\{\Big(2\alpha'_t(x,t)A_i(x,t)+ \qquad\qquad (19)\\
+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)+\alpha(x,t)\sum_{j=1}^{2}A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\Bigg|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)}\times\\
\times\sum_{j=1}^{2}\Big(a_{ij}(y,\tau)v_j(y,\tau)+\int\limits_0^\tau B_j(\eta,y,\tau)v_j(y,\eta)\,d\eta\Big)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}+\\
+\alpha(x,t)A_i(x,t)\lambda_i(x,t)\Big|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)}\Big(\frac{\partial a_{ij}(y,\tau)}{\partial y}v_j(y,\tau)+\int\limits_0^\tau\frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y}v_j(y,\eta)\,d\eta\Big)\bigg\}\,dy-\\
-\int\limits_{c_i}^{\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t)}\bigg\{\Big(2\alpha'_i(x,t)A_i(x,t)+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)+\alpha(x,t)\sum_{j=1}^{2}A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\bigg|_{x=\psi_i(y,\tau,t)}\times
\end{gathered}$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \left(a_{3-i,j}(y,\tau) v_j(y,\tau) + \int_0^\tau B_j(\eta,y,\tau) v_j(y,\eta)\, d\eta \right) \frac{\partial \psi_i(y,\tau,t)}{\partial y} +$$

$$+\alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\psi_i(y,\tau,t)} \left(\frac{\partial a_{3-i,j}(y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\tau) + \int_0^\tau \frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\eta)\, d\eta \right) \Bigg\} dy \Bigg] d\tau +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\chi_i(\tau,t)} \big(a_{1j}(c_i,\tau) - a_{2j}(c_i,\tau) \big) v_j(c_i,\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \int_0^t \Bigg[\int_{c_i}^{\varphi_i(\tau;c_{3-i},t)} \alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)} \left(a_{ij}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y}\, d\eta \right) dy - \int_{c_i}^{\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t)} \alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\psi_i(y,\tau,t)} \times$$

$$\times \left(a_{3-i,j}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \int_0^\tau B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y}\, d\eta \right) dy \Bigg] d\tau + H(t),$$

де $H(t)$ – функція, яка містить $h''(t)$ та вирази, складені з відомих функцій та коефіцієнтів рівняння (1) та умов (2)–(4).

Щоб отримати систему інтегральних рівнянь стосовно невідомих $f(t)$, v_j та $\frac{\partial v_j}{\partial x}$ продиференціюємо (14) за x. В результаті отримаємо

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} = \Omega_i(x,t) + \int_0^{t_i(x,t)} \Bigg[\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial a_{3-i,j}(y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\tau) + a_{3-i,j}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\eta) + B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y} \right\} d\eta \right) +$$

$$+ f(\tau) \frac{\partial g(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial B(y,\tau)}{\partial y} \Bigg] \Bigg|_{y=\varphi_{3-i}\left(\tau;c_i,t_i(x,t)\right)} \times \frac{\partial \varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{\partial t} \frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\, d\tau + \tag{20}$$

$$+ \int_{t_i(x,t)}^{t} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{2} \Bigg[\frac{\partial a_{ij}(y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\tau) + a_{ij}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \int_0^\tau \Big\{ \frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\eta) +$$

$$+ B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y} \Big\} d\eta \Bigg] + f(\tau) \frac{\partial g(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial B(y,\tau)}{\partial y} \Bigg\} \Bigg|_{y=\varphi_i(\tau;x,t)} \frac{\partial \varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}\, d\tau,$$

де

$$\Omega_i(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\partial q_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi_i(0;x,t)}{\partial x}, \quad \text{при} \quad (x,t)\in P_0\cup P_{3-i};\\ \left[\dfrac{\partial q_{3-i}\big(\varphi_{3-i}(0;a_i(t_i(x,t)),t_i(x,t))\big)}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t}+(-1)^{i+1}\dfrac{\partial\gamma_i}{\partial t}+(-1)^i\gamma_i\big(t_i(x,t)\big)\times\right.\\ \left.\times\big(a_{2,3-i}(c_i,t_i(x,t))-a_{1,3-i}(c_i,t_i(x,t))\big)\right]\dfrac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}, \quad \text{при} \quad (x,t)\in P_i.\end{cases}$$

Отже, для визначення функцій $f(t), v_i$, та $\dfrac{\partial v_i}{\partial x}$ ми отримали систему інтегро-функціональних рівнянь типу Вольтерра (14), (19), (20), яку з врахуванням умови 3) теореми 1 запишемо в операторній формі

$$\begin{cases} v(x,t)=\Omega^1(x,t)+\big(G^1f\big)(x,t)+\big(K^1v\big)(x,t),\\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}=\Omega^2(x,t)+\big(G^2f\big)(x,t)+\big(K^2v\big)(x,t)+\Big(D^1\dfrac{\partial v}{\partial x}\Big)(x,t),\\ f(t)=H(t)+\big(G^3f\big)(t)+\big(K^3v\big)(t)+\Big(D^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\Big)(t).\end{cases} \tag{21}$$

Тут $v=(v_1,v_2)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x},\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right)$, а компоненти векторів G^l, K^l, D^k $(l=\overline{1,3},\ k=1,2)$ – лінійні інтегральні оператори типу Вольтерра; Ω^l $(l=\overline{1,2})$ – відомі величини, побудовані за коефіцієнтами та вільними членами рівнянь (14) та (20). Ця система в області P_{T_1} розв'язується методом ітерацій. Отже, ми отримали єдиний неперервний розв'язок системи $\big(f(t), v_1(x,t), v_2(x,t), v_{1x}(x,t), v_{2x}(x,t)\big)$. Не важко переконатись, що $v_{it}(x,t)$ також є неперервними. Для цього досить продиференціювати (14) за t і проаналізувати результат. Далі за співвідношенням (8) знаходимо $u(x,t)$. Диференціюючи (8), знайдемо вирази для перших частинних похідних $u(x,t)$:

$$u_x(x,t)=\beta_1'(x)+\sum_{j=1}^{2}\int_0^t\Big[A'_{jx}(x,\tau)v_j(x,\tau)+A_j(x,\tau)v'_{jx}(x,\tau)\Big]\,d\tau, \tag{22}$$

$$u_t(x,t)=\sum_{j=1}^{2}A_j(x,t)v_j(x,t). \tag{23}$$

Оскільки $v_i(x,t)\in C^1(\overline{P}_{T_1})$, то з умов теореми 1 випливає, що $u(x,t)\in C^1(\overline{P}_{T_1})$. Диференціюючи (23) за t знайдемо

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{j=1}^{2}\Big[A'_{jt}(x,t)v_j(x,t)+A_j(x,t)v'_{jt}(x,t)\Big].$$

Звідси видно, що $u(x,t)\in C^{1,2}(\overline{P}_{T_1})$. Після того як знайдено розв'язок в $(\overline{P}_{T_1})$ (тобто відоме значення $u(x,T_1)$, яке вибираємо за нову початкову умову), знову проводимо характеристики $L_1(0,T_1)$ і $L_2(l,T_1)$ і аналогічно шукаємо розв'язок в області $P_T\setminus P_{T_1}$. Оскільки

T – обмежене, то повторюючи цей процес, за скінченне число кроків вийдемо на верхню межу прямокутника P_T.

Теорему доведено.

При сильніших припущеннях на гладкість вихідних даних справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай* $a_i \in C^{2,2}(\overline{P}_T)$, $b \in C^{2,0}(\overline{P}_T)$, $b_i \in C^{2,0}(\overline{P}_T)$, $g \in C^{2,0}(\overline{P}_T)$, $\beta_i \in C^{4-i}([0,l])$, $\nu_i \in C^2([0,T]), (i = 1, 2)$, *виконуються всі припущення теореми 1, а також умови узгодження другого порядку в кутових точках* $(0,0)$ *та* $(l, 0)$.

Тоді існує єдиний класичний розв'язок $u \in C^2(\overline{P}_T)$, $f \in C([0,T])$ *задачі (1)–(4).*

Доведення теореми 2 подібне до доведення теореми 1.

Зауваження. Покажемо на прикладі, що умова 3) теореми 1 є суттєвою для коректної розв'язності задачі (1)–(4).

Розглянемо таку задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + f(t),$$

$$u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0) = 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \ u_x(0,t) = 1, \qquad u_x(l,t) = 1 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\int_0^l t^2 \cos\frac{\pi x}{l} u(x,t)\,dx = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тут виконуються всі припущення теореми 1, за винятком умови 3), так як

$$\int_0^l t^2 \cos\frac{\pi x}{l}\,dx = 0, \quad t \in [0,1].$$

Розв'язуючи задачу запропонованим методом, прийдемо до рівняння стосовно $f(t)$:

$$\frac{1}{2} f(t) t^2 \int_0^l \cos\frac{\pi x}{l}\,dx + 4t \int_0^l \cos\frac{\pi x}{l} \int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dx +$$

$$+2\int_0^t d\tau \int_0^l \cos\frac{\pi x}{l} \int_0^\tau f(\eta)\,d\eta\,dx + 8t\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi t}{l} - \frac{4l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{l} = h''(t),$$

тобто

$$f(t)\cdot 0 + 8t\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi t}{l} - \frac{4l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{l} = h''(t). \tag{24}$$

Отже, коли $h''(t) = 8t\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi t}{l} - \frac{4l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{l}$, або $h(t) = -4\frac{l^3}{\pi^3}\left(2t\sin\frac{\pi t}{l} + \frac{3l}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{l} - 1\right)\right)$, то існує безліч функцій $f \in C([0,1])$. Якщо ж $h(t) \neq -4\frac{l^3}{\pi^3}\left(2t\sin\frac{\pi t}{l} + \frac{3l}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{l} - 1\right)\right)$, то рівняння (24) несумісне, тобто не існує такої функції $f \in C([0,1])$, яка була б розв'язком вихідної задачі. В обох випадках коректна розв'язність задачі порушується.

1. Благовещенский А.С. *Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка.*// В кн. Математич. вопросы теории распространения волн.— Л., 1969.— Т.2.— С. 85–90.
2. Благовещенский А.С. *Обратная задача для волнового уравнения с неизвестным источником.*// В кн. Проблемы мат. физики.— Л.: ЛГУ, 1970.— Вып.4.— С. 27–39.
3. Бубнов Б.А. *Разрешимость обратной задачи для волнового уравнения* // Краевые задачи для неклассических уравнений мат. физики, Новосибирск. — 1987. — С. 43–51.
4. Кабанихин С.И. *Об одной постановке двумерной обратной задачи для уравнения колебаний.*// В кн.: Некорректные мат. задачи и проболемы геофизики.— Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976.— С. 64–73.
5. Кабанихин С.И. *Методы решения обратных динамических задач для гиперболических уравнений.*// Условно корректные задачи мат. физики и анализа, Новосибирск.— 1992.— С. 109–123.
6. Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій.– Навч. посібн., К.: ІСДО, 1993.— 72 с.
7. Мельник З.О. *Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем на прямой*// Дифференц. уравнения. — 1985. – Т.21, N2. — С. 246–253.
8. Орловский Д.Г. *К задаче определения правой части гиперболической системы*// Дифференц. уравнения. — 1983. — Т.19, N8. — С. 137–146.
9. Орловский Д.Г. *Определение правой части гиперболического уравнения второго порядка* //Теор. функц. и числ. методы исслед. физ. процессов, М., 1983.— С.38–42.
10. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики.— М., 1984.— 263с.
11. Романов В.Г. *К задаче об определении коэффициентов при младших членах гиперболического уравнения* // Сиб. мат. журнал — 1992. — Т.33, N3. — С. 156–160.
12. Ройхель Б.З. *Об одной обратной задаче для уравнения гиперболического типа* // Дифференц. уравнения — 1990. — Т.26, N8. — С. 1462–1464.
13. Thomee V. *Estimates of the Fridrichs-Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equations in two independent variables* // Math. Scand. — 1957. — Vol. 5, N1. — P.93–113.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.1997