УДК 517.956.3

УМОВИ КОРЕКТНОСТІ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Ю. І. Говда

Govda Yu.I. On correctness of some boundary value problems for a hyperbolic system. Some boundary value problems for hyperbolic system of partial differential equations were studied. Models of locally-gradient elastic body mechanics can be reduced to such kind of problems. The theorem of unique solvability of an abstract operator equation was proved, and as a consequency the conditions of correctness of a hyperbolic system were established.

У праці розглянуто деякі крайові задачі для системи рівнянь гіперболічного типу, до якої може бути зведена повна система рівнянь моделі локально-градієнтного пружного тіла. Доведено теорему про однозначну розв'язність загального операторного рівняння, на підставі якої сформульовано умови коректності крайових задач для вихідної системи рівнянь. При доведенні теореми суттєво використано результати праці [1].

1. У циліндрі $Q = \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ 0 < t < T\}$ розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + L\vec{U} + B\vec{U} = \vec{F}(x,t), \tag{1}$$

де Ω – скінченна область, обмежена кусково-гладкою поверхнею Γ; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка простору $\mathbb{R}^3$;

$$\vec{U}(x,t) = \begin{pmatrix} \vec{u}^1(x,t) \\ \vec{u}^2(x,t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}(x,t) = \begin{pmatrix} \vec{f}^1(x,t) \\ \vec{f}^2(x,t) \end{pmatrix},$$

$\vec{u}^i(x,t) = (u_1^i(x,t), u_2^i(x,t), u_3^i(x,t))^T$, $i = 1,2$, — шукані функції,
$\vec{f}^i(x,t) = (f_1^i(x,t), f_2^i(x,t), f_3^i(x,t))^T$, $i = 1,2$, — відомі функції;

$$L\vec{U} = -\begin{pmatrix} \beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^1 + \nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \end{pmatrix} + \varkappa\vec{U}; \tag{2}$$

B – лінійний оператор, на який нижче буде накладена умова певної підпорядкованості оператору L; α, β, γ, ν, $\varkappa$ – додатні сталі, причому $\gamma^2 \leqslant \alpha\nu$; індекс "т" означає транспонування.

Відзначимо, що у випадку, коли B – матриця, всі елементи b_{ij}, $i,j = 1,\dots,6$, якої дорівнюють нулеві, крім $b_{ii} = -\varkappa$, $i = 1,2,3$, то до системи (1) може бути зведена повна система рівнянь моделі локально-градієнтного пружного тіла [2].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L55.

На нижній основі циліндра ($t = 0,\ x \in \Omega$) задамо початкові умови

$$\vec{U} = \vec{\Phi}(x), \qquad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{\Psi}(x), \tag{3}$$

де

$$\vec{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}^1(x) \\ \vec{\varphi}^2(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}^1(x) \\ \vec{\psi}^2(x) \end{pmatrix},$$

$\vec{\varphi}^i(x) = (\varphi_1^i(x), \varphi_2^i(x), \varphi_3^i(x))^T$, $\vec{\psi}^i(x) = (\psi_1^i(x), \psi_2^i(x), \psi_3^i(x))^T$, $i = 1, 2$, – задані функції.

Для системи (1) будемо розглядати три крайові задачі з початковими умовами (3) і такими граничними умовами, заданими на бічній поверхні циліндра $S = \{(x,t) : x \in \Gamma,\ t \in [0;T]\}$

$$\vec{U} = \vec{0}; \tag{4_1}$$

$$G\vec{U} = \vec{0}; \tag{4_2}$$

$$G\vec{U} + \sigma\vec{U} = \vec{0}. \tag{4_3}$$

Тут

$$G\vec{U} = \begin{pmatrix} \beta \dfrac{\partial \vec{u}^1}{\partial n} + \left[\vec{\nabla} \cdot (\nu\vec{u}^1 + \gamma\vec{u}^2)\right]\vec{n} \\ \left[\vec{\nabla} \cdot (\gamma\vec{u}^1 + \alpha\vec{u}^2)\right]\vec{n} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

σ – додатна стала; $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ – зовнішня нормаль до Γ; $\dfrac{\partial \vec{u}^1}{\partial n}$ – похідна в напрямку $\vec{n}$.

Нашою метою є встановлення умов коректності задач $(1), (3), (4_i)$, $i = 1, 2, 3$. Покажемо, що такі умови випливатимуть з умов однозначної розв'язності більш загального операторного рівняння.

2. Введемо в розгляд сепарабельний гільбертів простір H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Позначимо H_1 – сепарабельний гільбертів простір, елементами якого є вимірні функції $u = u(\cdot)$, задані на відрізку $[0;T]$, зі значеннями для майже всіх t з проміжку $[0;T]$ в H, зі скалярним добутком

$$(u, v)_1 = \int_0^T (u(t), v(t))\, dt \tag{6}$$

і нормою

$$\|u\|_1 = (u, u)_1^{1/2}. \tag{7}$$

Означення 1. *Будемо говорити, що функція u з простору H_1 має похідну на $[0;T]$, якщо для довільного t з $[0;T]$*

$$u(t) = u(a) + \int_a^t v(\tau)\, d\tau,$$

де $v \in H_1$, *причому* $v(t) = \dfrac{\partial u(t)}{\partial t}$ *для майже всіх* t.

Розглянемо задачу знаходження розв'язків рівняння

$$Su \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + S_1 u + S_2 u = f, \tag{8}$$

що справджують початкові умови

$$u(0) = \varphi_0, \qquad \frac{\partial u(0)}{\partial t} = \varphi_1. \tag{9}$$

Нехай виконуються такі умови.

1) $S_1 \colon H \to H$ лінійний симетричний додатно визначений оператор зі щільною в H областю визначення $D(S_1)$.

За допомогою оператора S_1 на множині $D(S_1)$ можна ввести скалярний добуток

$$(u, v)_S = (S_1 u, v) \tag{10}$$

і норму

$$\|u\|_S = (S_1 u, u)^{1/2}. \tag{11}$$

Через H_S позначимо енергетичний простір [3] оператора S_1. Відомо [3], що H_S буде гільбертовим простором, $H_S \subset H$ і $(\forall f \in H)(\exists! \varphi \in H_S)(\forall h \in H_S)\big[(\varphi, h)_S = (f, h)\big]$.

2) $S_2 \colon H \to H$ – лінійний оператор з областю визначення $D(S_2) \supset H_S$; для всіх u з простору H_S виконується $\|S_2 u\|^2 \leqslant c_1 \|u\|_S^2$, де c_1 – деяка додатна стала. Надалі вважаємо $c_1 \geqslant 2$.

Позначимо $C^k\big([0;T]; H(H_S)\big) = \big\{u \in H_1 : \forall t \in [0;T]\, \frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i} \in H(H_S);\ \frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i}$ неперервні в нормі $\|\cdot\|(\|\cdot\|_S)$; $i = 0, \ldots, k; \big\}$, $k \geqslant 0$, $C^0\big([0;T]; H(H_S)\big) \equiv C\big([0;T]; H(H_S)\big)$; $M = C\big([0;T]; H_S\big) \cap C^1\big([0;T]; H\big)$; $M^* = M \cap \big\{\eta \in M : \eta(0) = \eta(T) = 0_S\big\}$, де 0_S – нульовий елемент простору H_S.

3) M^* щільна в H_1.

Якщо на множині M ввести норму співвідношенням

$$\|u\|_M = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \big(\|u\|_S^2 + \|u_t\|^2\big)^{1/2}, \tag{12}$$

то M перетвориться в банахів простір. Тут і надалі $u_t \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Введемо в розгляд гільбертів простір $W = H_1 \times H_S \times H$ зі скалярним добутком

$$\big((f; \varphi_0; \varphi_1), (g; \psi_0; \psi_1)\big)_W = (f, g)_1 + (\varphi_0, \psi_0)_S + (\varphi_1, \psi_1) \tag{13}$$

і нормою

$$\|(f; \varphi_0; \varphi_1)\|_W = \big((f; \varphi_0; \varphi_1), (f; \varphi_0; \varphi_1)\big)_W^{1/2}. \tag{14}$$

Задамо лінійний оператор $A \colon M \to W$ з областю визначення $D(A) = \big\{u \in M : S_1 u \in C\big([0, T]; H\big);\ S_1 u_t,\ u_{tt} \in H_1\big\}$ рівністю

$$Au \equiv (Su; u(0); u_t(0)). \tag{15}$$

Задачу (8),(9) можна розглядати як задачу знаходження розв'язків рівняння

$$Au = (f; \varphi_0; \varphi_1), \tag{16}$$

де $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ – заданий елемент простору W.

Означення 2. *Узагальненим розв'язком задачі (8),(9) будемо називати функцію u з M, яка справджує умови (9) та інтегральну тотожність*

$$\int_0^T \left[(u_t, \eta_t) - (u, \eta)_S - (S_2 u, \eta) + (f, \eta)\right] dt = 0 \tag{17}$$

для довільних η з M^*.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1) – 3). Тоді для довільних $f \in H_1$, $\varphi_0 \in H_S$, $\varphi_1 \in H$ задача (8),(9) має єдиний узагальнений розв'язок u і для нього справедлива оцінка*

$$\|u\|_M \leqslant \sqrt{c_1} e^{c_1 T/2} \left(\|\varphi_0\|_S^2 + \|\varphi_1\|^2 + \|f\|_1^2\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Доведення. З леми 11 праці [1] випливає, що для всіх елементів з D(A) виконується нерівність

$$\|u\|_M \leqslant \sqrt{c_1} e^{c_1 T/2} \|Au\|_W. \tag{19}$$

Лема 1. *Оператор A допускає замикання $\overline{A}$; $D(\overline{A}) \subset M$; $R(\overline{A}) = \overline{R(A)}$.*

Доведення леми 1. Будемо позначати 0_1, 0_H, 0_M – нульові елементи просторів H_1, H, M відповідно. З (19) випливає: якщо послідовність $\left\{Au_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігається в нормі простору W до деякого елемента $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ з W, то послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, з $D(A)$ збігається до деякого елемента u з M. Для можливості замикання оператора A досить показати [4], що із збіжності послідовностей $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ з $D(A)$ до 0_M та $\left\{Au_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ до $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ випливає, що $(f; \varphi_0; \varphi_1) = (0_1; 0_S; 0_H)$. Очевидно, що $\varphi_0 = 0_S$ і $\varphi_1 = 0_H$. Покажемо, що $f = 0_1$. З цією метою розглянемо вираз

$$(f_n, \eta)_1 = \int_0^T \left[(u_{ntt}, \eta) + (S_1 u_n, \eta) + (S_2 u_n, \eta)\right] dt =$$
$$= \int_0^T \left[-(u_{nt}, \eta_t) + (u_n, \eta)_S + (S_2 u_n, \eta)\right] dt,$$

де $\eta \in M^*$. Якщо в останній рівності перейти до границі по n, то будемо мати

$$(f, \eta)_1 = 0 \tag{20}$$

для довільного η з M^*. З рівності (20) і умови 3) випливає, що $f = 0_1$. Отже, A допускає замикання, яке будемо позначати $\overline{A}$. Область визначення $D(\overline{A})$ буде складатися з $D(A)$ і границь послідовностей $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ з $D(A)$ у нормі простору M таких, що послідовності $\left\{Au_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігаються до деяких елементів з простору W. Якщо $v \in D(\overline{A})$, то за означенням $\overline{A}v \equiv \lim\limits_{n\to\infty} Av_n$ у випадку, коли $\|v - v_n\|_M \to 0$ при $n \to \infty$. З вище викладеного випливає, що $D(\overline{A}) \subset M$ і область значень $R(\overline{A})$ замикання оператора A збігається з $\overline{R(A)}$. Лему 1 доведено.

На підставі оцінки (19) та леми 1 неважко переконатись, що розв'язок рівняння

$$\overline{A}u = (f;\, \varphi_0;\, \varphi_1)$$

є узагальненим розв'язком задачі (8),(9) і для нього справедлива оцінка (18).

Лема 2. $R(\overline{A}) = W$.

Доведення леми 2. Нехай $R(\overline{A}) \neq W$. Тоді існує відмінний від нуля елемент $(v; \psi_0; \psi_1)$ з W ортогональний до $R(\overline{A})$. Для функції u з $D(\overline{A})$ такої, що $\overline{A}u = (f; 0_S; 0_H)$, це означає виконання рівності

$$(f, v)_1 = 0. \tag{21}$$

За умовою 3) існує така послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ з M^+, що $\|v - v_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді

$$(f, v)_1 = \lim_{n\to\infty} (f, v_n)_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left[-(u_t, v_{nt}) + (u, v_n)_S + (S_2 u, v_n)\right] dt = 0. \tag{22}$$

Для майже всіх t з $[0; T]$ $v(t) \in H$ і $v_n(t) \in H_S$. Тому з умови 1) випливає: для майже кожного t з $[0, T]$ знайдеться один і лише один елемент φ з H_S такий, що

$$(\varphi; v_n)_S = (v, v_n). \tag{23}$$

Візьмемо

$$u = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad t \in [0; a), \\ \int_a^t \int_a^\tau \int_T^\xi \varphi(\zeta)\, d\zeta\, d\xi\, d\tau \quad \text{при} \quad t \in [a; T]. \end{cases} \tag{24}$$

Неважко перевірити, що $u \in D(\overline{A})$ і

$$(u, v_n)_S = \left(\int_a^t \int_a^\tau \int_T^\xi v(\zeta)\, d\zeta\, d\xi\, d\tau, v_n\right) \tag{25}$$

при $t \in [a, T]$.

На підставі (24),(25) рівність (22) можна записати так

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^T \left[-(u_t, v_{nt}) + \left(\int_a^t \int_a^\tau \int_T^\xi v(\zeta)\, d\zeta\, d\xi\, d\tau, v_n\right) + (S_2 u, v_n)\right] dt =$$
$$= \int_a^T \left[(u_{tt}, v) + \left(\int_a^t \int_a^\tau \int_T^\xi v(\zeta)\, d\zeta\, d\xi\, d\tau, v\right) + (S_2 u, v)\right] dt = 0,$$

звідки, інтегруючи частинами з урахуванням (23),(25), отримуємо

$$\left\|\int_T^a \varphi(\tau)\, d\tau\right\|_S^2 + \left\|\int_a^T \int_T^\xi v(\tau)\, d\tau\, d\xi\right\|^2 = 2\int_a^T (S_2 u, v)\, dt. \tag{26}$$

Далі, використовуючи метод доведення леми 10 праці [1], приходимо до висновку, що $v = 0_1$.

Тепер умова ортогональності елемента $(v; \psi_0; \psi_1)$ до $D(\overline{A})$ може бути записана так:

$$\big(u(0), \psi_0\big)_{\boldsymbol{S}} + \big(u_t(0), \psi_1\big) = 0 \tag{27}$$

для довільного $\boldsymbol{u}$ з $D(\overline{A})$. З рівності (27) та щільності $D(S_1)$ в H і в H_S випливає, що $\psi_0 = 0_{\boldsymbol{S}}$ і $\psi_1 = 0_{\boldsymbol{H}}$. Отже, в W не існує відмінного від нуля елемента, ортогонального до $R(\overline{A})$. А, оскільки $R(\overline{A}) = \overline{R(\overline{A})}$ – замкнена множина, то $R(\overline{A}) = W$. Лему 2 доведено.

З лем 1, 2 та нерівності (19) безпосередньо випливає існування і оцінка (18) узагальненого розв'язку задачі (8),(9). Його єдиність є наслідком оцінки (18). Теорему 1 доведено.

3. Скористаємось теоремою 1 для встановлення умов коректності змішаних задач $(1), (3), (4_i)$, $i = 1, 2, 3$.

За простір H виберемо $L_2(\Omega)$ – простір вектор-функцій $\vec{U} = \vec{U}(\cdot)$, заданих на Ω, скалярний квадрат яких інтегровний на Ω, зі скалярним добутком

$$(\vec{U}, \vec{U}_1) = \int_\Omega \vec{U}(x) \cdot \vec{U}_1(x)\, dx \tag{28}$$

і нормою

$$\|\vec{U}\| = \big(\vec{U}, \vec{U}\big)^{1/2}, \tag{29}$$

а за H_1 – гільбертів простір $L_2(Q)$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_1$ і нормою $\|\cdot\|_1$. Через $C^2(\overline{\Omega})$ позначимо сукупність вектор-функцій, кожна компонента яких двічі неперервно диференційовна в $\overline{\Omega}$. Введемо в розгляд множину $\dot{C}^2(\Omega) = \big\{\vec{U} \in C^2(\overline{\Omega}) : \vec{U}$ фінітна в $\Omega\big\}$. За області визначення оператора L, що відповідають крайовим задачам, приймемо $D_1(L) = \dot{C}^2(\Omega)$, $D_2(L) = \big\{\vec{U} \in C^2(\overline{\Omega})\colon\ G\vec{U}\big|_\Gamma = 0\big\}$ та $D_3(L) = \big\{\vec{U} \in C^2(\overline{\Omega}) : \ (G\vec{U} + \sigma\vec{U})\big|_\Gamma = 0\big\}$. Крайову задачу $(1), (3), (4_i)$ будемо розглядати як задачу Коші (1),(3), а граничні умови включимо у вимогу належності при кожному t з проміжку $(0;T)$ шуканої функції $\vec{U}(x,t)$ до області визначення $D_i(L)$ оператора L, $i = 1, 2, 3$. Покажемо тепер, що для крайових задач $(1), (3), (4_i)$ виконуються всі умови теореми 1. Очевидно, що $D_i(L)$, $i = 1, 2, 3$, щільні в $L_2(\Omega)$. Покажемо симетричність оператора L на $D_i(L)$, $i = 1, 2, 3$. Нехай $\vec{U}$, $\vec{V} \in D_i(L)$,

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \vec{u}^1 \\ \vec{u}^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{v}^1 \\ \vec{v}^2 \end{pmatrix},$$

$\vec{u}^j = (u_1^j,\, u_2^j,\, u_3^j)^T, \vec{v}^j = (v_1^j,\, v_2^j,\, v_3^j)^T$, $j = 1, 2$. Тоді

$$\begin{aligned}(L\vec{U}, \vec{V}) = -\int_\Omega \Big[\beta(\vec{\nabla}^2\vec{u}^1)\cdot\vec{v}^1 + \nu\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)\big)\cdot\vec{v}^1 + \gamma\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)\big)\cdot\vec{v}^1 + \\ +\gamma\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)\big)\cdot\vec{v}^2 + \alpha\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)\big)\cdot\vec{v}^2\Big]\, dx + \varkappa(\vec{U},\vec{V}) = \\ = I(\vec{U},\vec{V}) + \varkappa(\vec{U},\vec{V}) - \int_\Gamma \Big[\beta\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j^1}{\partial\vec{n}}v_j^1 + \nu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{v}^1\cdot\vec{n}) + \\ +\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{v}_1\cdot\vec{n}) + \gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{v}^2\cdot\vec{n}) + \alpha(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{v}^2\cdot\vec{n})\Big]\, d\Gamma,\end{aligned} \tag{30}$$

де

$$\begin{aligned}I(\vec{U},\vec{V}) = \int_\Omega \Big[\beta\sum_{j=1}^{3}(\vec{\nabla}u_j^1)\cdot(\vec{\nabla}v_j^1) + \nu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^1) + \\ +\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^1) + \gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^2) + \alpha(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^2)\Big]\, dx.\end{aligned} \tag{31}$$

Таким чином,
$$(L\vec{U},\vec{V}) = I(\vec{U},\vec{V}) + \varkappa(\vec{U},\vec{V}) - \int_\Gamma (G\vec{U})\cdot\vec{V}\,d\Gamma,$$
звідки отримуємо при $i = 1,2$
$$(L\vec{U},\vec{V}) = I(\vec{U},\vec{V}) + \varkappa(\vec{U},\vec{V}), \tag{32}$$
а при $i = 3$ –
$$(L\vec{U},\vec{V}) = I(\vec{U},\vec{V}) + \varkappa(\vec{U},\vec{V}) + \sigma\int_\Gamma \vec{U}\cdot\vec{V}\,d\Gamma. \tag{33}$$
З рівностей (32),(33) випливає симетричність оператора L на $D_i(L)$, $i = 1,2,3$. Доведемо, що L додатно визначений. Для цього перепишемо $I(\vec{U},\vec{U})$ у вигляді
$$I(\vec{U},\vec{U}) = \int_\Omega \Big[\beta\sum_{j=1}^{3}|\vec{\nabla}u_j^1|^2 + (\nu-\gamma/\varepsilon)(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)^2 +$$
$$+(\alpha-\gamma\varepsilon)(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)^2 + (\sqrt{\gamma/\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1 + \sqrt{\gamma\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)^2\Big]\,dx,$$
де ε – довільне додатне число. Очевидно, що $I(\vec{U},\vec{U}) \geqslant 0$, коли $\gamma/\nu \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha/\gamma$. А множина таких ε непорожня, бо $\gamma^2 \leqslant \alpha\nu$. Отже,
$$(L\vec{U},\vec{U}) \geqslant \varkappa\|\vec{U}\|^2, \tag{34}$$
що означає додатну визначеність оператора L на $D_i(L)$, $i = 1,2,3$. Тому, для оператора L виконується умова 1) з п.2. За допомогою оператора L на $D_i(L)$ введемо скалярний добуток
$$(\vec{U},\vec{V})_{Li} = (L\vec{U},\vec{V}) \tag{35_i}$$
і норму
$$\|\vec{U}\|_{Li} = (\vec{U},\vec{U})_{Li}^{1/2}, \tag{36_i}$$
$i = 1,2,3$. Зауважимо, що $\|\cdot\|_{L1} \equiv \|\cdot\|_{L2}$. Енергетичний простір оператора L, що відповідає області визначення $D_i(L)$, скалярному добутку $(\cdot,\cdot)_{Li}$, нормі $\|\cdot\|_{Li}$, позначимо H_{Li}, $i = 1,2,3$. На оператор B будемо накладати таку умову.

2_i) Область визначення $D_i(B)$ оператора B містить H_{Li}; для всіх $\vec{U}$ з простору H_{Li} $\|B\vec{U}\|^2 \leqslant c_4\|\vec{U}\|_{Li}^2$, $c_4 \geqslant 2$, $i = 1,2,3$.

За множини M і M^* в умові 3) з п.2 візьмемо $M_i = \{\vec{\eta} \in L_2(Q) : \forall t \in [0;T]\ \vec{\eta} \in H_{Li},\ \vec{\eta}_t \in L_2(\Omega);\ \vec{\eta}$ і $\vec{\eta}_t$ неперервні за t в нормах $\|\cdot\|_{Li}$ та $\|\cdot\|$ відповідно $\}$; $M_i^* = M_i \cap \{\vec{\eta} \in M_i : \vec{\eta}(x,0) = \vec{\eta}(x,T) = 0\}$, $i = 1,2,3$, де $\vec{\eta}_t$ – узагальнена похідна. Без сумніву, M_i^* щільна в $L_2(Q)$.

Означення 3. *Узагальненим розв'язком задачі* (1), (3), (4_i) *будемо називати функцію* $\vec{U}$ *з* M_i, *яка справджує умови (3) та інтегральну тотожність*
$$\int_0^T \left[(\vec{U}_t,\vec{\eta}_t) - (\vec{U},\vec{\eta})_{Li} - (B\vec{U},\vec{\eta}) + (\vec{F},\eta)\right]dt = 0$$
для довільного $\vec{\eta} \in M_i^*$; $i = 1,2,3$.

З вище наведеного випливає, що для задач (1), (3), (4_i), $i = 1,2,3$, виконуються всі умови теореми 1. Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 2. *При виконанні вказаних в п.1 умов на коефіцієнти системи рівнянь (1) та умови* 2_i) *на оператор* B, *при довільних* $\vec{F} \in L_2(Q)$, $\vec{\Phi} \in H_{Li}$, $\vec{\Psi} \in L_2(\Omega)$ *мішана задача* $(1), (3), (4_i)$ *має єдиний узагальнений розв'язок* $\vec{U}$ *і для нього справедлива оцінка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\|\vec{U}\|_{Li}^2 + \|\vec{U}_t\|^2 \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{c_4} e^{c_4 T/2} \left(\|\vec{\Phi}\|_{Li}^2 + \|\vec{\Psi}\|^2 + \|\vec{F}\|_1^2 \right)^{1/2}, \ i = 1, 2, 3.$$

Залишаємо відкритим питання конкретизації просторів H_{Li}, $i = 1, 2, 3$.

1. Ладыженская О.А. *О решении нестационарных операторных уравнений* // Мат.сб. – 1956. – Т. 39, N 4. – С.491-524.

2. Бурак Я.Й., Говда Ю.І., Нагірний Т.С. *Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень* // Доп.НАН України. – 1996. – N 2.– С.39-43.

3. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш.шк., 1977. – 432 с.

4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.97