УДК 518:517.948

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ ЕЛЕКТРОННО-ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

М. В. Дорошенко, С. М. Кічура

Doroshenko M.V., Kichura S.M. The uniqueness of a solution of the axis-symmetry probiem of the synthesis of electronic-optical systems. The inverse Dirichlet problem for Laplace equations with known geometry of boundary surfases is considered. Problem of finding of an optimal potential distribution on electrodes which realizes the given potential distribution of electrostatic field on a symmetry axis is reduced to such mathematical model.

Граничні задачі математичної фізики поділяються на два великі класи: прямі та обернені. В прямих задачах потрібно знайти характеристики поля, коли відомі крайові умови та граничні поверхні. В обернених задачах потрібно знайти крайові умови та геометрію граничних поверхонь, які реалізують задані характеристики поля.

У праці розглянуто обернену задачу Діріхле для рівняння Лапласа при відомій геометрії граничних поверхонь. До такої задачі зводиться задача знаходження оптимального розподілу потенціалів на електродах, які реалізують заданий розподіл потенціалу електростатичного поля на осі симетрії.

Нехай на відрізку $[a,b]$ осі OZ циліндричної системи координат (r,z,ϕ) задана деяка достатньо гладка функція $U_0(z)$. Необхідно знайти розподіл потенціалів $\left\{V_0^{(i)}\right\}_{i=1}^{m}$ на системі розімкнутих електродів $(S=\cup_{i=1}^{m}S_i)$, які створюють осесиметричне поле $U(r,z)$ при умові, що $U(0,z)=U_0(z)$, $z\in[a,b]$. Функція $U(r,z)$ є розв'язком такої задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

$$U^{\pm}(r,z)=V_0^{(i)},\ (r,z)\in S_i, \tag{2}$$

$$\lim_{(r,z)\to\infty} U(r,z)=0, \tag{3}$$

де $U(r,z)$ повинна також задовольняти умову на ребрі [2]. Поверхні S_i будемо розглядати як двосторонні: S_i^+ і S_i^-. Нехай $U^{\pm}(r,z)$ – граничні значення потенціалу відповідно на S_i^+ і S_i^-. Невідомі потенціали визначаються з умови $U(0,z)=U_0(z)$, $z\in[a,b]$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35Q60.

Отже, задача синтезу електронно-оптичних систем при відомій геометрії зводиться до оберненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Невідомими є константи $V_0^{(i)}$, які задають розподіл потенціалу на електродах. Розв'язок задачі (1)–(3) подамо у такому вигляді

$$U(r,z) = \sum_{i=1}^{m} V_0^{(i)} \phi_i(r,z), \tag{4}$$

де $\phi_i(r,z)$ – розв'язки таких характеристичних задач

$$\Delta_{rz}\phi_i(r,z) = 0, \tag{5}$$

$$\phi_i^{\pm}(r,z) = \begin{cases} 0, & (r,z) \in S_i, \\ 1, & (r,z) \in S_i. \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язки задачі (5),(6) не залежать від заданих на поверхнях потенціалів і визначаються геометрією системи.

Невідомі потенціали (2) знаходимо шляхом мінімізації функціоналу

$$F(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, ..., V_0^{(m)}) = \left\| U_0(z) - \sum_{i=1}^{m} V_0^{(i)} \phi_i(z) \right\|, \tag{7}$$

де

$$||g(z)||^2 = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b |g(z)|^2 dz, \quad \phi_i(z) = \phi_i(0,z).$$

Суттєвим для знаходження мінімуму функціоналу (7) є вивчення питання лінійної незалежності системи функцій $\{\phi_i(z)\}_{i=1}^m$. Це пов'язано з дослідженням єдиності розв'язку поставленої задачі.

Теорема. *Якщо* $U_0(z) \equiv 0$ *на* $[a,b]$, *то обернена задача має тривіальний розв'язок, тобто* $V_0^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1,m}$.

Доведення. Нехай існує функція $W(r,z)$, яка є розв'язком задачі (1)–(3). Константи $V_0^{(i)}$ не дорівнюють нулю і виконується умова $W(0,z) = U_0(z) \equiv 0$, $z \in [a,b]$.

Покажемо, що $W(0,z) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$. Нехай z_0 є серединою відрізка $[a,b]$. Опишемо сферу $\Sigma(z_0)$ з центром в точці z_0 радіуса ε. Число ε виберемо так, щоб сфера $\Sigma(z_0)$ не дотикалась до граничної поверхні S і точки $z = a$ і $z = b$ лежали поза сферою. Функція $W(r,z)$ є гармонічною в $\overline{\Sigma(z_0)}$. Позначимо літерою C коло, утворене перетином площини $\phi = 0$ і сфери $\Sigma(z_0)$.

Оскільки $W(0, z_0 - \varepsilon) = W(0, z_0 + \varepsilon) = 0$, то з принципу максимуму випливає, що існує точка $(r^*, z^*) \in C$, така, що $W(r^*, z^*) = 0$. У протилежному випадку $W(r,z) \geqslant 0$ або $W(r,z) \leqslant 0$, $(r,z) \in \Sigma(z_0)$. На підставі теореми про середнє [1] для гармонічних функцій маємо

$$W(0,z_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int\limits_{\Sigma(z_0)} W(z,r) dS_\Sigma = 0. \tag{8}$$

З формули (8) отримаємо, що $W(r,z) \equiv 0$ на $\Sigma(z_0)$. З принципу максимуму випливає, що $W(r,z) \equiv 0$ в кулі $K(z_0)$ радіуса ε. Аналогічно отримаємо такий же результат для випадку $W(r,z) \leqslant 0$, $(r,z) \in \Sigma(z_0)$.

Нехай на дузі кола C, обмеженої точками $(0, z_0 - \varepsilon)$ і (r^*, z^*), функція $W(r,z) \geqslant 0$. Розглянемо $\Sigma_{\varepsilon_1}(z_0)$, де $\varepsilon_1 < \varepsilon$. На підставі неперервності функції $W(r,z)$ і наведених вище міркувань матимемо, що існує точка $(r_1^*, z_1^*) \in C$, де $W(r_1^*, z_1^*) = 0$. Виберемо $\varepsilon_2 < \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$, так, що $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Отже, на площині $\phi = 0$ існує деяка крива Γ з кінцями (r^*, z^*) і $(0, z_0)$, на якій $W(r,z) = 0$. Також в області Ω, яка утворена обертанням навколо осі z кривої Γ і кола C, функція $W(r,s) \geqslant 0$. Виберемо точку $z_1 \in [z_0 - \varepsilon, z_0]$ і побудуємо сферу $\Sigma(z_1)$ радіуса γ так, щоб вона лежала в області Ω. На підставі теореми про середнє отримаємо, що

$$W(0, z_1) = \frac{1}{4\pi\gamma^2} \int\limits_{\Sigma(z_1)} W(z,r) dS_\Sigma = 0. \tag{9}$$

Оскільки $W(r,z) \geqslant 0$ на $\Sigma(z_1)$, то $W(r,z) \equiv 0$ на $\Sigma(z_1)$. З принципу максимуму маємо, що $W(r,z) \equiv 0$, якщо (r,z) лежить в кулі $K(z_1)$ радіуса γ. Таким чином, ми показали, що існує деяка куля K, в якій функція $W(r,z) \equiv 0$.

Розглянемо тепер таку область $B \in \mathbb{R}^3$, яка містить дану кулю K і гранична поверхня S лежить поза B. Оскільки за умовою функція $W(r,z)$ є гармонічною в B, то отримаємо, що $W(r,z) \equiv 0$, якщо $(r,z) \in B$. Враховуючи довільність вибору B, $W(r,z) = 0$ для довільної точки (r,z) поза S. Оскільки $W(r,z)$ неперервна на S, то $W(r,z) \equiv 0$, $(r,z) \in S$, тобто $V_0^{(i)}$, для $i = 1, 2, ..., m$. Теорему доведено.

Таким чином, для довільної достатньо гладкої функції $U_0(z)$, яка визначена на відрізку $[a,b]$, існує єдиний набір граничних потенціалів, який реалізує заданий розподіл електростатичного поля на осі OZ.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972. – 736 с.
2. Hayashi J. *The expansion theory of Dirichlet problem for the Helmholz equation for an open boundary* // J.Math. Anal. and Appl. – 1977. – Vol. 61, N 2. – P. 331-340.

Стаття надійшла до редколегії 08.10.96