УДК 517.95

# ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯМ

Березницька І.Б., Дребот А.Й., Іванчов М.І., Макар Ю.М.

**Bereznitska I.B., Drebot A.J., Ivanchov M.I., Makar Ju.M. Inverse problem for a heat equation with an integral overdetermination.** The inverse problem for finding an unknown time–dependent major coefficient in the heat equation is considered. The overdetermination conditions are linear combinations of boundary data and integral of the solution.

Формулювання обернених задач відрізняється від формулювання прямих задач наявністю додаткової інформації про досліджуваний процес – так званих умов перевизначення. Їх вигляд визначається як технічними можливостями, так і метою дослідження, яка, зокрема, може полягати у виборі таких параметрів, які забезпечували б певний режим проходження процесу. При цьому умови перевизначення можуть мати вигляд як додаткових крайових умов, так і інтегральних, фінальних, нелокальних умов [1]–[6]. У даній праці розглядаються умови перевизначення, що складаються з лінійної комбінації крайової та інтегральної умов. Пряма задача з подібною умовою розглянута в праці [7].

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)$, початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,h] \tag{2}$$

та крайові умови

$$u(0.t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Задача полягає в знаходженні функцій $(a(t), u(x,t)) \in C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0,\ t \in [0,T]$, які задовольняли б (1)–(3) та умову перевизначення

$$u_x(0,t) + \nu(t)\int_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{4}$$

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови:*

1) $\varphi(x) \in C^2[0,h]$; $\mu_i(t) \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,3;\nu(t) \in C^1[0,T]$; $f(x,t) \in C^{1.0}(\overline{Q}_T)$;

2) $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h]$; $\varphi'(h-x) - \varphi'(x) \geqslant 0$, $x \in [0,h/2]$;
$\mu_1(t) + \mu_2(t) \geqslant 0$, $\mu_1'(t) - f(0,t) > 0$, $\mu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0$, $\mu_3'(t) \leqslant 0$,
$\nu(t) \geqslant 0, \nu'(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$; $f(x,t) \geqslant 0$, $f_x(x,t) \geqslant 0$, $x \in \overline{Q}_T$,
$f_x(h-x,t) - f_x(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in [0,h/2] \times [0,T]$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$, $\varphi'(0) + \nu(0) \int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0)$.

*Тоді розв'язок задачі (1)-(4) існує і единий.*

*Доведення.* Вважаючи відомою функцію $a(t) > 0$, за допомогою функції Гріна

$$G_1(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha(t)-\alpha(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right), \quad \alpha(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau,$$

знайдемо розв'язок задачі (1)-(3):

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$
$$- \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{5}$$

Обчислимо похідну $u_x(x,t)$, використовуючи при цьому інтегрування частинами та умови узгодження:

$$u_x(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - f(0,\tau))d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau) - f(h,\tau))d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{6}$$

де

$$G_2(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha(t)-\alpha(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right) \qquad -$$

функція Гріна другої крайової задачі для рівняння (1). Підставляючи (5) та (6) в умову перевизначення (4), отримаємо рівняння щодо $a(t)$ такого вигляду

$$\begin{gathered}\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int_0^t G_2(0,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - f(0,\tau))d\tau + \\ + \int_0^t G_2(0,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau) - f(h,\tau))d\tau + \int_0^t \int_0^h G_2(0,t,\xi,\tau) f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau + \\ + \nu(\tau)\Bigg(\int_0^h \varphi(\xi)d\xi \int_0^h G_1(x,t,\xi,0)dx + \int_0^t d\tau \int_0^h f(\xi,\tau)d\xi \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)dx + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau)(\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau))}{\sqrt{\alpha(t) - \alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t) - \alpha(\tau))}\right) d\tau\Bigg) = \mu_3(t).\end{gathered} \tag{7}$$

Для зведення рівняння (7) до вигляду, розв'язаного стосовно $a(t)$, виконаємо такі перетворення: покладемо в (7) $t = \sigma$, домножимо на вираз

$$\frac{a(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t) - \alpha(\tau)}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t) - \alpha(\sigma)}\right)$$

і проінтегруємо за $\sigma$ від 0 до $t$. Використовуючи формули з довільними функціями $\mu(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(x) \in C^1[0,h]$ [6]

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t) - \alpha(\sigma))(\alpha(\sigma) - \alpha(\tau))}} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp\Bigg(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t) - \alpha(\sigma)} - \\ - \frac{n^2h^2}{\alpha(\sigma) - \alpha(\tau)}\Bigg) d\sigma = \pi,$$

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t) - \alpha(\sigma))(\alpha(\sigma) - \alpha(\tau))}} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp\Bigg(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t) - \alpha(\sigma)} - \\ - \frac{(2n-1)^2h^2}{4(\alpha(\sigma) - \alpha(\tau))}\Bigg) d\sigma = \frac{h\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\alpha(t)-\alpha(\tau)} \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \times \\ \times \exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4z}\right) dz,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{a(\tau)\mu(\tau)}{\sqrt{\alpha(t) - \alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t) - \alpha(\tau)}\right) d\tau\right) = a(t)\Bigg(\frac{\mu(0)}{\sqrt{\alpha(t)}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)}\right) + \int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right) d\tau\right),$$

$$\int_0^h \varphi'(\xi)d\xi \int_0^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\sigma))\alpha(\sigma)}} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp\Bigg(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}-$$

$$-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\Bigg)d\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha(t)}} \int_0^h \varphi(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right) d\xi-$$

$$-\pi\varphi(0) + \varphi(h)\frac{h\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\alpha(t)} \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n(2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4z}\right) dz,$$

продиференціюємо співвідношення, отримане з (7). Враховуючи умови теореми, приходимо до такого рівняння стосовно $a(t)$

$$a(t) = \sqrt{\pi}(\mu_1'(t) - f(0,t))\Bigg(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\tau}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}}\times$$

$$\times \int_0^h f_\xi(\xi,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n(\xi+2nh) \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\xi+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \int_0^h \varphi''(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right) d\xi+$$

$$+\frac{h}{2}\int_0^t \frac{\mu_2'(\tau) - f(h,\tau)}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n(2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\tau+$$

$$+\int_0^t \frac{\nu'(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)\Bigg(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(\sigma)}} \int_0^h \varphi(\xi)\times$$

$$\times d\xi \int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\right)\right) dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma \frac{a(\tau)(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right) d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}} \int_0^h f(\xi,\tau)d\xi \int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right) -\right.$$

$$-\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)dx\Bigg)d\sigma+\int\limits_0^t\frac{\nu(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)d\sigma\int\limits_0^h f(x,\sigma)dx+\int\limits_0^t\frac{a(\sigma)\nu(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(\sigma)}}\int\limits_0^{h/2}(\varphi'(h-\xi)-\varphi'(\xi))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\right)d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\sigma\frac{\mu_1'(\tau)+\mu_2'(\tau)-f(0,\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\sigma\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}\times$$

$$\times\int\limits_0^{h/2}(f_\xi(h-\xi,\tau)-f_\xi(\xi,\tau))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)d\xi\Bigg)d\sigma-$$

$$-\int\limits_0^t\frac{\mu_3'(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)d\sigma\Bigg)^{-1},\ t\in[0,T]. \tag{8}$$

Легко бачити, що всі розв'язки рівняння (8) є додатними на [0,T]. Щоб встановити існування розв'язку рівняння (8), застосуємо до нього теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку оцінимо розв'язки рівняння (8) зверху:

$$a(t)\leqslant\sqrt{\pi}\max_{[0,T]}(\mu_1'(t)-f(0,t))\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\int\limits_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi\right)^{-1}. \tag{9}$$

Помноживши цю нерівність на знаменник та проінтегрувавши від 0 до $t$, зведемо її до вигляду

$$r(\alpha(t))\leqslant C_1t, \tag{10}$$

де

$$r(s)=\int\limits_0^s\frac{dz}{\sqrt{z}}\int\limits_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\right)d\xi,$$

а $C_1>0$ – стала, що залежить від $\max\limits_{[0,T]}(\mu_1'(t)-f(0,t))$. Функція $r(s)$ визначена і додатна при $s\geqslant 0$. Крім того, вона монотонно зростає і $\lim\limits_{s\to\infty}r(s)=+\infty$, що легко встановити, застосовуючи граничні теореми для перетворення Лапласа. Це означає, що на множині $[0,\infty)$ існує обернена функція $r^{-1}(\sigma)$, і з нерівності (10) отримуємо

$$\alpha(t) \leqslant r^{-1}(C_1 t) \leqslant C_2 < \infty,\ t \in [0,T]. \tag{11}$$

Це дозволяє оцінити $a(t)$ зверху:

$$a(t) \leqslant C_1 \left( \min_{z\in[0,C_2]} \frac{1}{\sqrt{z}} \int\limits_0^h \varphi''(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\right) d\xi \right)^{-1}$$

або

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty,\ t \in [0,T], \tag{12}$$

де число $A_1$ визначається тільки вихідними даними задачі. Маючи оцінки (11), (12), з рівняння (8) легко встановити оцінку $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{C_3}{C_4 + C_5(\min\limits_{[0,T]} a(t))^{-1/2}}, \tag{13}$$

де $C_3, C_4, C_5$ – додатні сталі. Для цього достатньо скористатись нерівностями

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2 z^2\right) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2z},\ z > 0,$$

$$\frac{1}{z^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 h^2}{4z}\right) \leqslant C_6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = C_7,$$

$$\left| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}} \int\limits_0^h f(\xi,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{\overline{Q}_T} |f(x,t)| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}},$$

які порівняно легко перевіряються. Тоді з (13) отримуємо оцінку

$$a(T) \geqslant A_0 > 0,\ t \in [0,T], \tag{14}$$

де число $A_0$ визначається тільки вихідними даними задачі. Як в роботі [6], наявність оцінок (12) і (14) дає можливість застосувати до рівняння (8) теорему Шаудера і встановити існування розв'язку задачі (1)–(4).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(4). Припускаючи, що $(a_i(t),\ u_i(x,t)), i = 1,2$ – два її розв'язки, для їх різниці $b(t) = a_1(t) - a_2(t),\ v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримаємо

$$v_t = a_1(t) v_{xx} + b(t) u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$v(x,0)=0, \quad x\in[0,h], \tag{16}$$
$$v(0,t)=v(h,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{17}$$
$$v_x(0,t)+\nu(t)\int\limits_0^h v(x,t)dx=0, \quad t\in[0,T]. \tag{18}$$

Знайшовши розв'язок задачі (15)–(17) за допомогою функції Гріна і підставивши його в умову перевизначення (18), прийдемо до рівняння

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)b(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\ +\nu(t)\int\limits_0^h dx\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)b(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau=0.\end{aligned} \tag{19}$$

Перетворимо рівність (19) так, як вираз (7). Використовуючи формулу

$$\begin{aligned}\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\sigma))(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^3}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(\xi+2nh)\times\\ \times\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)d\sigma=\\ =\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right),\end{aligned}$$

яку можна вивести за допомогою перетворення Лапласа, отримаємо інтегральне рівняння Вольтерра першого роду стосовно $b(t)$:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t\frac{b(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}\int\limits_0^h u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)d\xi+\\ +\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t b(\tau)d\tau\int\limits_0^h u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi\int\limits_\tau^t\frac{a_1(\sigma)\nu(\sigma)}{\sqrt{(\alpha_1(t)-\alpha_1(\sigma))(\alpha_1(\sigma)-\alpha_1(\tau))}}\times\\ \times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha_1(t)-\alpha_1(\sigma)}\right)d\sigma\int\limits_0^h\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha_1(\sigma)-\alpha_1(\tau))}\right)-\right.\\ \left.-\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha_1(\sigma)-\alpha_1(\tau))}\right)\right)dx=0,\ t\in[0,T],\end{aligned} \tag{20}$$

де $\alpha_1(t) = \int\limits_0^t a_1(\tau)d\tau$. Диференціюючи рівняння (20) за $t$ [8], зводимо його до однорідного рівняння Вольтерра другого роду

$$b(t)u_{2xx}(0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)b(\tau)d\tau = 0$$

з інтегровним ядром $K(t,\tau)$, в якому $u_{2xx}(0,t) = \dfrac{\mu_1'(t) - f(0,t)}{a_2(t)} > 0$. Звідси випливає, що $b(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$ і тоді $v(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in Q_T$ як розв'язок однорідної задачі, що відповідає (15)–(17). Теорему доведено.

За подібною схемою досліджуються обернені задачі для рівняння (1) з крайовими умовами інших типів.

Розглянемо обернену задачу у випадку крайових умов вигляду

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3'}$$

і умовами перевизначення

$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{4'}$$

**Теорема 2.** *Нехай, крім умови 1) теореми 1, в якій під функцією $\nu(t)$ розуміється $\dfrac{\nu_2(t)}{\nu_1(t)}$, виконуються умови:*

1) $\varphi(x) \geqslant 0,\ \varphi''(x) \geqslant 0,\ x \in [0,h];\ \mu_3'(t) - \nu(t)f(0,t) - \int\limits_0^h f(x,t)dx \geqslant 0,$
$\mu_1(t) \leqslant 0,\ \mu_2(t) \geqslant 0,\ \mu_1'(t) \leqslant 0,\ \mu_2'(t) \geqslant 0,\ \nu_1(t) \neq 0,\ \nu(t) \geqslant 0,$
$\nu'(t) \leqslant 0,\ t \in [0,T];\ f(x,t) \geqslant 0,\ f_x(x,t) \geqslant 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_T;$

2) $\varphi'(0) = \mu_1(0),\ \varphi'(h) = \mu_2(0),\ \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0).$

*Тоді розв'язок задачі (1), (2), (3'), (4') існує і єдиний.*

Нехай задані крайові умови

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3''}$$

та умова перевизначення

$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{4''}$$

Умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (1), (2), (3"), (4") встановлюються такою теоремою.

**Теорема 3.** *Нехай, крім умови 1) теореми 1 з* $\nu(t) = \dfrac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)}$, *виконуються умови:*

1) $\varphi(x) \geqslant 0,\ \varphi'(x) \geqslant 0,\ \varphi''(x) \geqslant 0,\ x \in [0, h];\ \mu_1(t) \leqslant 0,\ \mu_2(t) \geqslant 0,$

$\mu_1'(t) \leqslant 0,\ \mu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0,\ \mu_3'(t) - \nu(t)f(0,t) - \int\limits_0^h f(x,t)dx \geqslant 0,$

$\nu_2(t) \neq 0,\ \nu(t) \geqslant 0,\ \nu'(t) \leqslant 0,\ t \in [0,T]; f(x,t) \geqslant 0,\ f_x(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in \overline{Q}_T;$

2) $\varphi'(0) = \mu_1(0),\ \varphi(h) = \mu_2(0),\ \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0).$

*Тоді розв'язок задачі (1), (2), (3"), (4") існує і єдиний.*

Теорема 3 доводиться так, як теорема 1.


1. Jones B.F. *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I* // J. Math. Mech. – 1962.– Vol. 11, N 6. – P. 907–918.
2. Jones B.F. *Various method for finding unknown coefficients in parabolic differential equations* // Comm. on Pure and Applied Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33–44.
3. Прилепко А.И., Костин А.Б. *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I*// Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33, N 3. – С. 146–155.
4. Cannon J.R., Lin Yanping, Wang Shingmin. *Determination of a control parameter in a parabolic differential equation*// J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – Vol. 33. – P. 149–163.
5. Иванчов Н.И. *Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями*// Укр. мат. журнал. – 1993. – Т. 45, N 8 – С. 1066–1071.
6. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – Препринт. – Київ, 1995. – 84 с.
7. Муравей Л.А., Филиновский А.В. *Об одной параболической краевой задаче*// ДАН СССР. – 1991. – Т. 317, N 1. – С. 39–43.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.


*Стаття надійшла до редколегії 19.11.96*