УДК 517.95

ПРО ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С. М. Ковальчук

Koval'chuk S.M. On inverse problems for a parabolic system of differential equations The inverse problems for a parabolic system of differential equations are considered. The unknown coefficients before the highest derivatives in the system depend on the time variable. Existence and uniqueness conditions for solutions of these problems are established.

В області $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < x < l, \; 0 < t < T\}$ розглянемо задачу визначення функцій $(a_1(t), \dots, a_n(t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)) \in C[0,T] \times C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$[1], $a_i(t) > 0, t \in [0,T], i = \overline{1,n}$, які задовольняють систему рівнянь

$$u_{it} = a_i(t) u_{ixx} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,t) u_j, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

початкові умови

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

крайові умови

$$u_i(0,t) = \mu_i(t), \;\; u_i(l,t) = \nu_i(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3}$$

і умови перевизначення

$$a_i(t) u_{ix}(0,t) = \varkappa_i(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Подібні задачі для одного рівняння, яке не містить молодших членів, досліджено в [2],[3]. У праці [4] встановлено умови стійкості та єдиності розв'язку оберненої задачі для системи (1) з невідомими коефіцієнтами, залежними тільки від просторової змінної. У даній статті встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі (1) – (4).

Зведемо задачу (1) – (4) до еквівалентної системи операторних рівнянь.

Припустимо, що виконуються умови.

Умова (A) $\varphi_i(0) = \mu_i(0), \; \varphi_i(l) = \nu_i(0), \; i = \overline{1,n}$.

Умова (B) $\varphi_i(x) \in C^1[0,l], \; \mu_i(t), \nu_i(t) \in C^1[0,T], \; \varkappa_i(t) \in C[0,T], \; c_{ij}(x,t) \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$, $i,j = \overline{1,n}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

За допомогою функції Гріна зведемо пряму задачу (1)-(3) до системи рівнянь щодо функцій $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$:

$$u_i(x,t) = g_i(x,t) + \int_0^t d\tau \int_0^l G_1(a_i;x,t,\xi,\tau) \sum_{j=1}^n c_{ij}(\xi,\tau) u_j(\xi,\tau) d\xi, \ i=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де

$$g_i(x,t) = \int_0^l \varphi_i(\xi) G_1(a_i;x,t,\xi,0) d\xi + \int_0^t a_i(\tau)\mu_i(\tau) G_{1\xi}(a_i;x,t,0,\tau) d\tau -$$
$$- \int_0^t a_i(\tau)\nu_i(\tau) G_{1\xi}(a_i;x,t,l,\tau) d\tau, \ G_m(a_i;x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\Theta_i(t)-\Theta_i(\tau))}} \times$$
$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4(\Theta_i(t)-\Theta_i(\tau))} \right) + (-1)^m \exp\left(-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4(\Theta_i(t)-\Theta_i(\tau))} \right) \right),$$

$m=1,2$, $\Theta_i(t) = \int_0^t a_i(\tau)d\tau$, $i=\overline{1,n}$. Диференціюючи (5) за x, покладаючи $x=0$ та використовуючи умову перевизначення (4), отримаємо рівняння

$$a_i(t) = \varkappa_i(t) \Big(g_{ix}(0,t) + \int_0^t d\tau \int_0^l G_{1x}(a_i;0,t,\xi,\tau) \sum_{j=1}^n c_{ij}(\xi,\tau) u_j(\xi,\tau) d\xi \Big)^{-1}, \tag{6}$$

$i=\overline{1,n}$, де функції $g_{ix}(0,t)$ визначаються за формулами

$$g_{ix}(0,t) = \int_0^l \varphi_i'(\xi) G_2(a_i;0,t,\xi,0) d\xi - \int_0^t \mu_i'(\tau) G_2(a_i;0,t,0,\tau) d\tau +$$
$$+ \int_0^t \nu_i'(\tau) G_2(a_i;0,t,l,\tau) d\tau, \qquad i=\overline{1,n}.$$

Запишемо систему (5),(6) у вигляді

$$u_i(x,t) = P_{1i}(u_1,\dots,u_n,a_i)(x,t), \ \ a_i(t) = P_{2i}(u_1,\dots,u_n,a_i)(t). \tag{7}$$

Тепер сформулюємо лему, яка встановлює еквівалентність задачі (1) – (4) і системи операторних рівнянь (7).

Лема. *Розв'язок* $(a_1(t),\dots,a_n(t),u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))$ *задачі (1) – (4) існує тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок* $a_i(t) \in C[0,T]$, $u_i(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $a_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i=\overline{1,n}$ *системи рівнянь (7).*

Доведення. Необхідна умова існування розв'язку задачі (1) – (4) випливає із методу зведення даної задачі до системи рівнянь (7).

Для того, щоб встановити, що функції $a_i(t) \in C[0,T]$, $u_i(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $a_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i=\overline{1,n}$, які задовольняють систему рівнянь (7), є розв'язком задачі (1) – (4), достатньо показати, що при умовах (A), (B) розв'язок системи (7) матиме гладкість розв'язку вихідної задачі. З умов **(A), (B)** і $a_i(t) \in C[0,T],\ i=\overline{1,n}$ випливає, що $g_i(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$. При умові, що функції $a_i(t)$, $c_{ij}(x,t)$, $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$ є неперервними в замиканнях областей визначення, інтеграли

$$\int_0^t d\tau \int_0^l G_1(a_i; x,t,\xi,\tau) \sum_{j=1}^n c_{ij}(\xi,\tau) u_j(\xi,\tau) d\xi, \quad i=\overline{1,n}$$

будуть належати класові $C^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тоді з (5) отримуємо, що $u_i(x,t) \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$. Оскільки $c_{ij}(x,t),\ u_i(x,t) \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$, то праві частини рівнянь системи (5) належать класові $C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$, і, отже, $u_i \in C^{2,1}(\Omega) \cup C^{1,0}(\overline{\Omega})$, $i=\overline{1,n}$. Лему доведено.

Для того, щоб встановити умови існування розв'язку системи (7), використаємо теорему Шаудера про нерухому точку [5]. Спочатку оцінимо функції $u_i(x,t),\ a_i(t),\ i=\overline{1,n}$.

Нехай виконуються такі умови:

Умова (C) $\varphi_i(x) \geqslant 0,\ x \in [0,l],\ \mu_i(t) \geqslant 0,\ \nu_i(t) \geqslant 0,\ t \in [0,T],\ c_{ij}(x,t) \geqslant 0,\ (x,t) \in \overline{\Omega},\ i,j=\overline{1,n}$.

Умова (D) $\varphi_i'(x) > 0,\ x \in [0,l],\ \mu_i'(t) \leqslant 0,\ \nu_i'(t) \geqslant 0,\ \varkappa_i(t) > 0,\ t \in [0,T],\ i=\overline{1,n}$.

На підставі умови **(C)** з (5) випливає, що

$$u_i(x,t) \geqslant 0, \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Розглянемо систему (6). При $0 \leqslant \xi \leqslant l,\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ справедливі нерівності

$$G_{1x}(a_i; 0,t,\xi,\tau) \geqslant 0, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

оскільки $G_1(a_i;x,t,\xi,\tau) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ і $G_1(a_i;0,t,\xi,\tau)=0$ при $0 \leqslant \xi \leqslant l,\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,\ i=\overline{1,n}$. Використовуючи (8),(9) і умови **(C), (D),** з (6) отримуємо

$$a_i(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \varkappa_i(t)}{\min\limits_{[0,l]} \varphi_i'(x)} \equiv A_{1i} < \infty, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

За допомогою (10) оцінимо зверху функції $u_i(x,t),\ i=\overline{1,n}$. Позначивши $m_i(t) = \max\limits_{[0,l]} u_i(x,t),\ i=\overline{1,n}$ та врахувавши нерівності

$$g_i(x,t) \leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i(x) + \max_{[0,T]} \nu_i(t) \times$$
$$\times \max_{[0,l]} \int_0^{A_{1i}T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|x+(2k+1)l|}{2\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+(2k+1)l)^2}{4\sigma}\right) d\sigma +$$
$$+ \max_{[0,T]} \mu_i(t) \max_{[0,l]} \int_0^{A_{1i}T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|x+2kl|}{2\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+2kl)^2}{4\sigma}\right) d\sigma, \quad i=\overline{1,n},$$

з (5) отримаємо

$$m_i(t) \leqslant L + L_1 \int_0^t \sum_{j=1}^n m_j(\tau) d\tau, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

де сталі L, L_1 не залежать від невідомих функцій. Підсумувавши по i ліві і праві частини в (11), отримаємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t) \leqslant n(L + L_1 \int_0^t \sum_{j=1}^{n} m_j(\tau) d\tau),$$

звідки, згідно з лемою Гронуолла, випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t) \leqslant nL \exp(nL_1T) \equiv M. \tag{12}$$

Встановимо деякі нерівності для того, щоб оцінити $a_i(t)$ знизу. Безпосередньо з вигляду функцій $g_{ix}(0,t),\ i = \overline{1,n}$ маємо

$$g_{ix}(0,t) \leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i'(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi \min\limits_{[0,T]} a_i(t)}} \max_{[0,T]} \left(\int_0^t \frac{\nu_i'(t)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 l^2}{4A_{1i}(t-\tau)}\right) d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_0^t \frac{\mu_i'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 l^2}{A_{1i}(t-\tau)}\right) d\tau \right). \tag{13}$$

За допомогою нерівності

$$\int_0^l G_{1x}(a_i; 0, t, \xi, \tau) d\xi \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi(\Theta_i(t) - \Theta_i(\tau))}}$$

отримуємо оцінку

$$\int_0^t d\tau \int_0^l G_{1x}(a_i; 0, t, \xi, \tau) \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\xi, \tau) u_j(\xi, \tau) d\xi \leqslant L_2 \left(\min_{[0,T]} a_i(t) \right)^{-1/2}, \tag{14}$$

$i = \overline{1,n}$, з незалежною від $a_i(t), u_i(x,t)$ сталою L_2. На підставі (13),(14), з рівнянь (6) випливає нерівність

$$\min_{[0,T]} a_i(t) \geqslant \frac{C_{0i}}{C_{1i} + C_{2i} \left(\min\limits_{[0,T]} a_i(t) \right)^{-1/2}}, \quad i = \overline{1,n},$$

звідки одержуємо

$$\min_{[0,T]} a_i(t) \geqslant \frac{1}{4C_{1i}^2} \left(\sqrt{C_{2i}^2 + 4C_{0i}C_{1i}} - C_{2i} \right)^2 \equiv A_{0i} > 0,\ \ i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Зауважимо, що сталі $C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}$ залежать тільки від вихідних даних задачі (1) – (4).

З оцінок (8), (10), (12), (15) та умов **(A), (B)** випливає, що оператор $P = (P_{21}, \dots, P_{2n}, P_{11}, \dots, P_{1n})$ переводить опуклу замкнену множину $\mathcal{N} = \{(a_1(t), \dots, a_n(t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)) : a_i(t) \in C[0,T], u_i(x,t) \in C(\overline{\Omega}), 0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} u_j(x,t) \leqslant M, A_{0i} \leqslant a_i(t) \leqslant A_{1i}, i = \overline{1,n}\}$ в себе. Для того, щоб застосувати теорему Шаудера, необхідно встановити, що множина $P\mathcal{N}$ є одностайно неперервною. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує $\delta > 0$ таке, що

$$|P_{1i}(u_1, \dots, u_n, a_i)(x_2, t_2) - P_{1i}(u_1, \dots, u_n, a_i)(x_1, t_1)| < \varepsilon, \tag{16}$$

$$|P_{2i}(u_1, \dots, u_n, a_i)(t_2) - P_{2i}(u_1, \dots, u_n, a_i)(t_1)| < \varepsilon \tag{17}$$

для всіх $(a_1(t), \dots, a_n(t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)) \in \mathcal{N}$, якщо $|x_2 - x_1| < \delta$, $|t_2 - t_1| < \delta$, $(x_j, t_j) \in \overline{\Omega}$, $j = 1, 2$.

Оскільки

$$\lim_{t\to 0} P_{1i}(u_1, ..., u_n, a_i)(x,t) = \varphi_i(x), \ x \in [0,l], \ \lim_{t\to 0} P_{2i}(u_1, ..., u_n, a_i)(t) = \frac{\varkappa_i(0)}{\varphi_i'(0)} > 0,$$

$i = \overline{1,n}$, для всіх $(a_1(t), \dots, a_n(t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)) \in \mathcal{N}$, то існує $t_0 > 0$ таке, що для довільних вектор-функцій $(a_1(t), \dots, a_n(t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)) \in \mathcal{N}$ справджуються нерівності (16), (17) якщо $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_0$.

Нехай тепер $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. Встановимо оцінки деяких виразів, які входять в (16),(17). Розглянемо різницю

$$R = \int_0^l \varphi_i(\xi)(G_1(a_i; x_2, t_2, \xi, 0) - G_1(a_i; x_1, t_1, \xi, 0))d\xi,$$

яку запишемо в такому вигляді

$$R = \int_0^l \varphi_i(\xi)(G_1(a_i; x_2, t_2, \xi, 0) - G_1(a_i; x_1, t_2, \xi, 0))d\xi +$$
$$+ \int_0^l \varphi_i(\xi)(G_1(a_i; x_1, t_2, \xi, 0) - G_1(a_i; x_1, t_1, \xi, 0))d\xi \equiv R_1 + R_2.$$

Подаючи інтеграл R_1 рівністю

$$R_1 = \int_0^l \varphi_i(\xi)d\xi \int_{x_1}^{x_2} G_{1z}(a_i; z, t_2, \xi, 0)dz,$$

отримаємо при $x_1 < x_2$

$$|R_1| \leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i(x) \int_{x_1}^{x_2} dz \int_0^l |G_{1z}(a_i; z, t, \xi, 0)|d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i(x) \frac{1}{4\sqrt{\pi}(\Theta_i(t))^{3/2}} \int_{x_1}^{x_2} dz \int_0^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(|z - \xi + 2kl| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(z-\xi+2kl)^2}{4\Theta_i(t)}\right) + |z+\xi+2kl| \exp\left(-\frac{(z+\xi+2kl)^2}{4\Theta_i(t)}\right)\Big) d\xi.$$

Оскільки справджується нерівність

$$\frac{1}{4\Theta_i(t)} \int_0^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} |z-\xi+2kl| \exp\left(-\frac{(z-\xi+2kl)^2}{4\Theta_i(t)}\right) d\xi < 1, \quad z \in [0,l],$$

то існує $\delta_1 > 0$ таке, що

$$|R_1| \leqslant \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{\pi A_{0i} t_0}} \max_{[0,l]} \varphi_i(x) < \varepsilon/2, \quad \text{при } |x_2-x_1| < \delta_1.$$

Записуючи R_2 у вигляді

$$R_2 = \int_0^l \varphi_i(\xi) d\xi \int_{\Theta_i(t_1)}^{\Theta_i(t_2)} G_{1\sigma}(1; x_1, \sigma, \xi, 0) d\sigma,$$

отримаємо оцінку $|R_2| \leqslant C_3 |t_2 - t_1|$, де стала $C_3 > 0$ залежить тільки від t_0, T, A_{0i}, A_{1i}, $\max\limits_{[0,l]} \varphi_i(x)$. Візьмемо $\delta_2 = \varepsilon/2C_3$, тоді $|R_2| < \varepsilon/2$ при $|t_2 - t_1| < \delta_2$. Отже, взявши $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, отримаємо $|R| < \varepsilon$, якщо $|x_2 - x_1| < \delta$, $|t_2 - t_1| < \delta$.

Розглянемо вираз

$$J = \int_0^{t_2} a_i(\tau)\mu_i(\tau) G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) d\tau - \int_0^{t_1} a_i(\tau)\mu_i(\tau) \times$$
$$\times G_{1\xi}(a_i; x_1, t_1, 0, \tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} a_i(\tau)\mu_i(\tau) G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) d\tau + \int_0^{t_1} a_i(\tau) \times$$
$$\times \mu_i(\tau) \left(G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) - G_{1\xi}(a_i; x_1, t_1, 0, \tau) \right) d\tau \equiv J_1 + J_2.$$

Провівши заміну $\sigma = \Theta_i(t_2) - \Theta_i(\tau)$ в інтегралі J_1, одержимо

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} \mu_i(t) \max_{[0,l]} \int\limits_0^{A_{1i}|t_2-t_1|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|x_2+2kl|}{\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x_2+2kl)^2}{4\sigma}\right) d\sigma.$$

Виберемо $\delta_3 > 0$ таке, що $|J_1| < \varepsilon/3$ при $|t_2 - t_1| < \delta_3$. Перепишемо J_2 у вигляді $J_2 = J_{21} + J_{22}$, де

$$J_{21} = \int_0^{t_3} a_i(\tau)\mu_i(\tau) \left(G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) - G_{1\xi}(a_i; x_1, t_1, 0, \tau) \right) d\tau,$$

$$J_{22} = \int_{t_3}^{t_1} a_i(\tau)\mu_i(\tau) \left(\int_{x_1}^{x_2} G_{1\xi z}(a_i; z, t_2, 0, \tau) dz + \int_{\Theta_i(t_1)-\Theta_i(\tau)}^{\Theta_i(t_2)-\Theta_i(\tau)} G_{1\xi\sigma}(1; x_1, \sigma, 0, \tau) d\sigma \right) d\tau$$

і $t_3 > 0$ таке, що $|J_{21}| < \varepsilon/3$ для будь-яких $(x_i, t_i) \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$. Використовуючи оцінку

$$|J_{22}| \leqslant C_4|x_2 - x_1| + C_5|t_2 - t_1|,$$

візьмемо $\delta_4 > 0$ таке, що $J_2 < \varepsilon$ при $|x_2 - x_1| < \delta_4$, $|t_2 - t_1| < \delta_4$. Тоді отримаємо $|J| < \varepsilon$, якщо $|x_2 - x_1| < \delta_0$, $|t_2 - t_1| < \delta_0$, $\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_4\}$. Зауважимо, що сталі C_4, C_5 не залежать від $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Оцінюючи аналогічно інші вирази в (16), (17), приходимо до висновку, що множина $P\mathcal{N}$ є одностайно неперервною. Згідно з теоремою Шаудера, розв'язок системи (6), (7) існує.

Покажемо тепер єдиність розв'язку задачі (1) – (4). Припустимо, що існує два різних розв'язки $(b_1, \dots, b_n, v_1, \dots, v_n)$, $(d_1, \dots, d_n, w_1, \dots, w_n)$ задачі (1) – (4). Тоді вектор-функція $(b_1 - d_1, \dots, b_n - d_n, v_1 - w_1, \dots, v_n - w_n,)$ задовольняє такі умови:

$$u_{it} = b_i(t)u_{ixx} + a_i(t)w_{ixx} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,t)u_j, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{19}$$

$$u_i(x, 0) = 0, \qquad x \in [0, l], \tag{20}$$

$$u_i(0, t) = u_i(l, t) = 0, \qquad t \in [0, T], \tag{21}$$

$$b_i(t)u_{ix}(0, t) + a_i(t)w_{ix}(0, t) = 0, \qquad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \tag{22}$$

де $u_i(x, t) = v_i(x, t) - w_i(x, t)$, $a_i(t) = b_i(t) - d_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Звівши пряму задачу (19) – (21) до системи інтегральних рівнянь

$$u_i(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G_1(b_i; x, t, \xi, \tau)(a_i(\tau)w_{i\xi\xi}(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\xi, \tau)u_j(\xi, \tau))d\xi, \quad i = \overline{1, n}, \tag{23}$$

та підставивши (23) в (22), отримаємо

$$a_i(t) = -\frac{b_i(t)d_i(t)}{\varkappa_i(t)} \int_0^t d\tau \int_0^l G_{1x}(b_i; 0, t, \xi, \tau)(a_i(\tau)w_{i\xi\xi}(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\xi, \tau)u_j(\xi, \tau))d\xi, \tag{24}$$

$i = \overline{1, n}$. З (23), (24) випливають нерівності

$$m_i(t) \leqslant K \int_0^t (|a_i(\tau)| + \sum_{j=1}^{n} m_j(\tau))d\tau, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{25}$$

$$|a_i(t)| \leqslant K \int_0^t (|a_i(\tau)| + \sum_{j=1}^{n} m_j(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{26}$$

де $m_i(t) = \max\limits_{[0,l]} |u_i(x, t)|$ і стала $K > 0$ не залежить від $u_i(x, t)$, $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Позначивши $p(t) = \sum_{j=1}^{n}(|a_j(\tau)| + m_j(\tau))$, з (25), (26) отримаємо

$$p(t) \leqslant nK \int_0^t \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{t - \tau}}\Big)p(\tau)d\tau,$$

звідки

$$p(t) \leqslant (nK + 2\sqrt{T}n^2K^2 + \pi n^2K^2) \int_0^t p(\tau)d\tau.$$

На підставі леми Гронуолла $p(t) \equiv 0$. Використовуючи означення функції $p(t)$, знаходимо $a_i(t) \equiv 0, u_i(x,t) \equiv 0, i = \overline{1,n}$.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(A), (B), (C), (D).** *Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) – (4).*

Аналогічно досліджуються задача (1) – (3) з умовами перевизначення

$$u_{ix}(0,t) = \varkappa_i(t), \qquad t \in [0,T], \qquad i = \overline{1,n},$$

та задача для системи (1) з початковими умовами (2), крайовими умовами

$$u_{ix}(0,t) = \mu_i(t), \quad u_{ix}(l,t) = \nu_i(t), \qquad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n},$$

і умовами перевизначення

$$u_i(0,t) = \varkappa_i(t), \qquad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n}.$$

Існування розв'язків вказаних задач встановлене на малому проміжку часу $[0,T_0]$, де $0 < T_0 \leqslant T$.

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.: Наука, 1967.– 736 с.
2. Jones B.F. *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part 1* // J. Math. Mech.– 1962.– Vol. 11, N 6.– P.907-918.
3. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. Препринт.– Київ, 1995.– 84 с.
4. Ахундов А.Я. *Обратная задача для системы параболических уравнений* // Дифференц. уравн.– 1988.– Т. 24, N 3.– С.520-521.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969.– 448 с.

Стаття надійшла до редколегії 07.03.97