УДК 517.927.25+512.928.5

ПРО АСИМПТОТИКУ ГЛОБАЛЬНИХ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СИЛЬНО НЕОДНОРІДНОЇ СТРУНИ

Ю. Д. Головатий, І. А. Головач

Holovatyj Yu.D., Holovach I.A. On asymptotics of global proper vibrations of a singular perturbed string. Spectral properties of a composite string with singular perturbed density are studied. It has been shown by O.A.Oleinik, such vibrating system is possessed of local proper oscillations, which are concentrated near to area of perturbation and corresponded to infinitely small proper frequencies. We enter a concept of the global forms of oscillations, which are simulated by discrete sequences of eigenfunctions of the perturbed problem. The full asymptotic expansions on a small discrete parameter $\varepsilon_k \to 0$ for such oscillations are constructed and justified.

1. Формулювання задачі. У працях [1-3] вивчено асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень та власних функцій найпростішої математичної моделі, яка виникає при дослідженні композитних середовищ

$$\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2}(x) + \lambda(\varepsilon)\rho_\varepsilon(m,x)u_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{1.1}$$

$$u_\varepsilon(a) = 0, \quad u_\varepsilon(b) = 0, \tag{1.2}$$

де $\lambda(\varepsilon)$ – спектральний параметр, а розподіл маси струни має вигляд

$$\rho_\varepsilon(m,x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{коли } x \in (a,-\varepsilon) \cup (\varepsilon,b); \\ \varepsilon^{-m} q(\frac{x}{\varepsilon}), & \text{коли } x \in (-\varepsilon,\varepsilon). \end{cases}$$

Тут ε – малий додатній параметр, m – дійсне число, функції ρ та q додатні на множинах (a,b) та $(-1,1)$ відповідно. Це модель двокомпонентного середовища, складові якого мають подібні пружні властивості, але суттєво відрізняються густиною. В точках розриву функції $\rho_\varepsilon(m,x)$ власна функція u_ε задовольняє умови спряження

$$[u_\varepsilon(x)]_{x=\pm\varepsilon} = [u'_\varepsilon(x)]_{x=\pm\varepsilon} = 0.$$

Доведено, що існує 5 випадків (щодо значень параметра m) поведінки власних елементів цієї задачі при $\varepsilon \to 0$ та побудовані повні асимптотичні розвинення власних значень та власних функцій. У такому формулюванні при певних значеннях m можна отримати усі класичні результати щодо спектральних властивостей неоднорідних одновимірних

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 35B25.

континуумів [4,5]. З іншого боку, ця модель описує і явища, характерні лише для композитних коливних систем. Так, у випадку $m > 2$ асимптотичні розвинення власних функцій підтверджують існування ефекту *локальних* коливань системи в околі області збурення, який відомий з експериментів. А саме, всі власні значення $\lambda(\varepsilon)$, які є неперервними функціями параметра ε, прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$ (див. рис.1), а головним членом асимптотики нормованих в просторі Соболєва $H_0^1(a,b)$ власних функцій $u_\varepsilon(x)$ є функції вигляду $\sqrt{\varepsilon}v(x/\varepsilon)$, які мають нескінченно малу норму в $L_2(a,b)$.

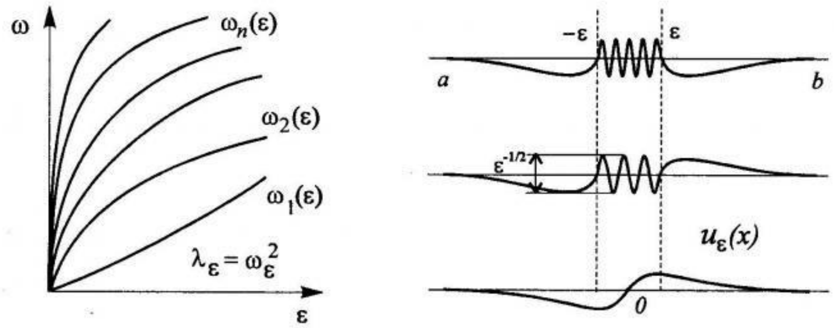

Рис.1

У цій праці ми покажемо, що крім локальних форм коливань, композитній струні властиві в певному сенсі глобальні власні коливання. Будемо говорити, що *дискретна послідовность власних значень $\{\lambda(\varepsilon_n)\}$ задачі (1.1),(1.2) та послідовність нормованих в $H_0^1(a,b)$ власних функцій $\{u(\varepsilon_n,x)\}$ моделюють глобальну форму коливань $v(x)$ з частотою $\omega_* \neq 0$, коли*

$$\lambda(\varepsilon_n) \to \omega_*^2, \quad u(\varepsilon_n,\cdot) \to v \text{ в } H_0^1(a,b) \qquad \text{при } \varepsilon_n \to 0,$$

де функція v відмінна від нуля.

Зауважимо, що цей феномен насправді має дискретну природу – таким формам коливань не відповідає жодне неперервне за параметром ε власне значення чи неперервний власний вектор.

2. Найпростіша модель: побудова явних розв'язків. Щоб зрозуміти природу глобальних коливань, розглянемо частковий випадок задачі (1.1),(1.2), коли $b = |a| = 1$, $\rho(x) \equiv 1$, $q = 1$, $m = 4$. Оскільки тепер задача (1.1),(1.2) володіє симетрією $x \mapsto -x$, то її власні функції є парними або непарними. Обмежимося аналізом парних власних функцій, які мають вигляд

$$u_\varepsilon(\omega_\varepsilon, x) = \begin{cases} \sin\omega_\varepsilon(1-|x|), & \text{коли } \varepsilon \leqslant |x| < 1; \\ \dfrac{\sin\omega_\varepsilon(1-\varepsilon)}{\cos\omega_\varepsilon\varepsilon^{-1}}\cos\dfrac{\omega_\varepsilon x}{\varepsilon^2}, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases} \tag{2.1}$$

а числа ω_ε є коренями рівняння

$$\varepsilon^2 \mathrm{ctg}\,\frac{\omega}{\varepsilon} = \mathrm{tg}\,\omega(1-\varepsilon), \quad \omega \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Лема 2.1. *Для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ рівняння (2.2) має зліченну послідовність коренів $0 < \omega_1^\varepsilon < \omega_2^\varepsilon < \cdots < \omega_k^\varepsilon < \cdots \to \infty$, $k \to \infty$. Крім того,*

(i) величини ω_k^ε є неперервними функціями параметра ε і прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$;

(ii) корені рівняння (2.2) утворюють $\pi\varepsilon$-сітку на додатній півосі, тобто кожна точка півосі є точкою скупчення цих коренів при $\varepsilon \to 0$.

Твердження леми легко отримати, проаналізувавши рівняння (2.2) графічно. Числа ω_k^ε є абсцисами точок перетину графіка тангенса, період якого близький до π, і густої сітки котангенсів з періодом $\pi\varepsilon$.

Нескінченно малі неперервні власні значення відповідають ситуації локальних коливань системи, і їх дослідження було проведене у працях, згаданих вище. Щоб знайти інші форми коливань, які, на противагу *локальним*, ми назвали *глобальними*, треба забути про впорядкованості та неперервності коренів рівняння (2.2).

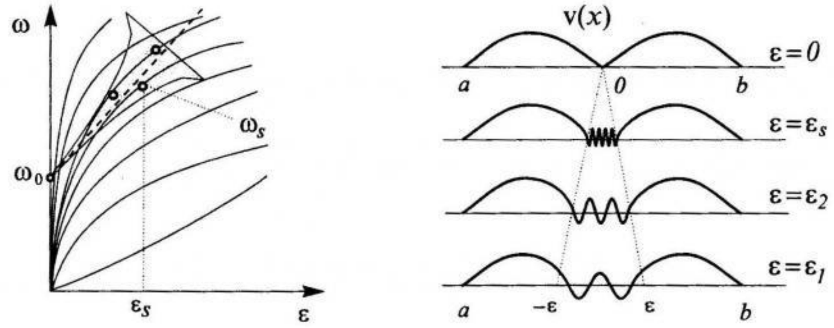

Рис.2

Нехай $H_0^1(-1,1)$ — простір Соболєва, отриманий поповненням класу функцій $C_0^\infty(-1,1)$ за нормою $\|v\| = (v',v')_{L_2(-1,1)}^{1/2}$. Покажемо, що існують такі дискретні послідовності частот $\omega(\varepsilon_s) \to \omega_* > 0$ при $\varepsilon_s \to 0$, для яких послідовності власних функцій $u_{\varepsilon_s}(\omega(\varepsilon_s), x)$ мають ненульову границю (а саме, $\sin\omega_*(1-|x|)$) в просторі $H_0^1(-1,1)$.

Існування такої границі еквівалентне збіжності до нуля інтеграла

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{du_\varepsilon}{dx}\right)^2 dx = \frac{\omega_\varepsilon^2 \sin^2 \omega_\varepsilon(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 \cos^2(\omega_\varepsilon \varepsilon^{-1})}\Big(1 + O(\varepsilon)\Big), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.3}$$

на послідовності ε_s. Очевидно, що необхідною умовою цього є рівність $\omega_* = \pi k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Згідно з лемою 2.1 для числа ω_* можна побудувати дискретну апроксимацію довільного характеру, зокрема, існує послідовність $\varepsilon_s \to 0$, якій відповідає послідовність частот $\omega_s = \pi k + \alpha\varepsilon_s + O(\varepsilon_s^2)$. Тоді

$$\sin^2 \omega_s(1-\varepsilon_s) = \sin^2(\pi k + (\alpha - \pi k)\varepsilon_s + O(\varepsilon_s^2)) = O(\varepsilon_s^4), \quad \varepsilon_s \to 0,$$

якщо покласти $\alpha = \pi k$. З іншого боку, з умови, що числа ω_s є коренями рівняння (2.2) при $\varepsilon = \varepsilon_s$, маємо

$$\lim_{s\to\infty} \cos^2(\omega_s \varepsilon_s{}^{-1}) = \frac{\pi^2 k^2}{\pi^2 k^2 + 1}.$$

Отже, *в описаному частковому випадку система (1.1),(1.2) має глобальні форми власних коливань* $u_\varepsilon(x)$, *які близькі при* $\varepsilon \to 0$ *до функцій* $\sin \pi k(1-|x|)$, $k \in \mathbb{N}$. *Таким коливанням відповідають частоти* ω_ε, *розташовані в "параболічному" конусі в* $\mathbb{R}^2_{\varepsilon,\omega}$ *з вершиною в точці* $(0, \pi k)$ *та віссю* $\pi k(1+\varepsilon)$ *(рис.2).*

3. Побудова асимптотичних розвинень у загальному випадку. Алгоритм знаходження асимптотики глобальних власних коливань однаковий для всіх $m > 2$. Ми проведемо побудову для $m = 4$ і $q(\xi) = q^2 = \text{const}$.

Введемо позначення $\lambda_\varepsilon = \omega_\varepsilon^2$, $\xi = \varepsilon^{-1}x$, $\eta = \varepsilon^{-2}x$. Асимптотичні розвинення будемо шукати у вигляді

$$\omega_\varepsilon \sim \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \tag{3.1}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots, \text{ коли } x \in (a, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, b), \tag{3.2}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon^2 z_0(\sigma; \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) + \varepsilon^3 z_1(\sigma; \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) + \dots, \text{ коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \tag{3.3}$$

де $\sigma = \varepsilon^{-1}$ – великий параметр. Ряди (3.1),(3.2) повинні справджувати незбурене рівняння (1.1) на інтервалах $(a, 0)$ та $(0, b)$

$$\begin{gathered}\Big[\frac{d^2}{dx^2} + (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2 \rho(x)\Big](v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots) \sim \\ \sim (v_0'' + \omega_0^2 \rho v_0) + \varepsilon(v_1'' + \omega_0^2 \rho v_1 + 2\omega_0\omega_1\rho v_0) + \\ + \varepsilon^2(v_2'' + \omega_0^2\rho v_2 + 2\omega_0\omega_1\rho v_1 + (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)\rho v_0) + \dots \sim 0,\end{gathered}$$

а також крайові умови (1.2)

$$v_0(a) + \varepsilon v_1(a) + \varepsilon^2 v_2(a) + \dots \sim 0, \quad v_0(b) + \varepsilon v_1(b) + \varepsilon^2 v_2(b) + \dots \sim 0.$$

Щоб сформувати задачі для знаходження функцій v_k, потрібно також використати умови спряження рядів (3.2) та (3.3) в точках $x = \pm\varepsilon$ (або $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm\sigma$)

$$v_0(\pm\varepsilon) + \varepsilon v_1(\pm\varepsilon) + \varepsilon^2 v_2(\pm\varepsilon) + \dots \sim \varepsilon^2 z_0(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \varepsilon^3 z_1(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \dots.$$

Розвинувши величини $v_k(\pm\varepsilon)$ в ряд, остаточно отримаємо

$$\begin{gathered}v_0(\pm 0) + \varepsilon(v_1(\pm 0) \pm v_0'(\pm 0)) + \varepsilon^2(v_2(\pm 0) \pm v_1'(\pm 0) + \\ + \frac{1}{2}v_0''(\pm 0) - z_0(\sigma; \pm 1, \pm\sigma)) + \dots \sim 0.\end{gathered}$$

Аналогічні перетворення дають умову рівності формальних похідних рядів (3.2) та (3.3) в точках $x = -\varepsilon$ і $x = \varepsilon$:

$$\begin{gathered}v_0'(\pm 0) + \varepsilon(v_1'(\pm 0) \pm v_0''(\pm 0)) + \varepsilon^2(v_2'(\pm 0) \pm v_1''(\pm 0) + \frac{1}{2}v_0'''(\pm 0)) + \dots \sim \\ \sim \frac{\partial z_0}{\partial \eta}(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \varepsilon(\frac{\partial z_1}{\partial \eta}(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \frac{\partial z_0}{\partial \xi}(\sigma; \pm 1, \pm\sigma)) + \dots.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Тут ми скористалися співвідношенням $\frac{d}{dx} = \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}$.

Будемо вимагати, щоб перші члени розвинення (3.2) справджували задачі

$$v_0''(x) + \omega_0^2\rho(x)v_0(x) = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad v_0(a) = v_0(0) = v_0(b) = 0, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} v_1''(x) + \omega_0^2\rho(x)v_1(x) = -2\omega_0\omega_1\rho(x)v_0(x), \quad x \in \Omega_0, \\ v_1(a) = 0, v_1(b) = 0, \quad v_1(-0) = v_0'(-0), v_1(+0) = -v_0'(+0), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} v_2'' + \omega_0^2\rho(x)v_2 = -2\omega_0\omega_1\rho(x)v_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)\rho(x)v_0, \quad x \in \Omega_0, \\ v_2(a) = 0, \quad v_2(b) = 0, \\ v_2(\pm 0) = z_0(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) \mp v_1'(\pm 0) - \frac{1}{2}v_0''(\pm 0), \end{cases} \tag{3.7}$$

де $\Omega_0 = (a, 0) \cup (0, b)$.

Нехай ω_0^2 – просте власне значення задачі (3.5), а v_0 – відповідна власна функція. Спектр триточкової задачі (3.5) є теоретико-множинним об'єднанням спектрів двоточкових задач на інтервалах $(a, 0)$ та $(0, b)$ відповідно. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що ω_0^2 – власне значення, пов'язане з відрізком $[0, b]$, а тоді

$$v_0(x) \equiv 0, \qquad x \in (a, 0). \tag{3.8}$$

Зауваження. *Очевидно, що є випадки, коли всі власні значення задачі (3.5) двократні (наприклад, коли $b = |a|$), а функція ρ – парна. Ми обмежемося побудовою асимптотичних розвинень глобальних коливань, які відповідають простим власним значенням задачі (3.5), вважаючи, що такі власні значення є.*

Задача (3.6) є "задачею на спектрі", а тому її розв'язок v_1 існує лише при виконанні умови

$$v_0'(+0)^2 + v_0'(-0)^2 = 2\omega_0\omega_1 \int_a^b \rho v_0^2\,dx,$$

яку ми отримали в результаті інтегрування по множині Ω_0 рівняння (3.6), домноженого на власну функцію v_0. Припустимо, що v_0 нормована умовою $(\rho v_0, v_0)_{L_2(a,b)} = 1$. Тоді наступний член ряду (3.1) задається формулою

$$\omega_1 = \frac{1}{2\omega_0}(v_0'(+0)^2 + v_0'(-0)^2) = \frac{1}{2\omega_0}v_0'(+0)^2.$$

Тут ми використали рівність (3.8), з якої випливає також і те, що функція v_1 тотожно дорівнює нулю на відрізку $[a, 0]$. Задача (3.6) має одновимірний многовид розв'язків, тому підпорядкуємо розв'язок v_1 умові ортогональності $(\rho v_1, v_0)_{L_2(a,b)} = 0$.

Крайові умови задачі (3.7) містять функцію z_0, а тому перейдемо до побудови внутрішнього розвинення (3.3). Підставимо цей ряд у рівняння (1.1) на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$, вважаючи, що його коефіцієнти $z_k(\sigma; \xi, \eta)$ є функціями двох незалежних змінних ξ та η. Тоді в прямокутнику $\Pi_\sigma = \{(\xi,\eta) : |\xi| < 1, |\eta| < \sigma\}$ матимемо

$$\Big[(\varepsilon^{-4}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2\varepsilon^{-3}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}) + (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2\varepsilon^{-4}q^2\Big]\times$$
$$\times(\varepsilon^2 z_0(\sigma;\xi,\eta) + \varepsilon^3 z_1(\sigma;\xi,\eta) + \varepsilon^4 z_2(\sigma;\xi,\eta) + \dots) \sim$$
$$\sim \varepsilon^{-2}\Big(\frac{\partial^2 z_0}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_0\Big) + \varepsilon^{-1}\Big(2\frac{\partial^2 z_0}{\partial\xi\partial\eta} + 2\omega_0\omega_1 q^2 z_0 + \frac{\partial^2 z_1}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_1\Big) +$$
$$+(\frac{\partial^2 z_2}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_2 + 2\frac{\partial^2 z_1}{\partial\xi\partial\eta} + 2\omega_0\omega_1 q^2 z_1 + \frac{\partial^2 z_0}{\partial\eta^2} + (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1)q^2 z_0) + \dots \sim 0.$$

Врахувавши умови спряження (3.4), а також те, що v_0 і v_1 дорівнюють нулю для від'ємних значень аргумента, отримаємо задачі для функцій z_0 і z_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_0 = 0, & \\ & (\xi,\eta)\in\Pi_\sigma, \\ \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial\xi\partial\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 z_0 = 0, & \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial\eta}(\sigma;-1,-\sigma) = 0, \quad \frac{\partial z_0}{\partial\eta}(\sigma;1,\sigma) = v_0'(+0); \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_1 = 0, \qquad (\xi,\eta)\in\Pi_\sigma, \\ \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial\xi\partial\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 z_1 = -\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial\xi^2} + (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1)q^2 z_0), \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial\eta}(\sigma;-1,-\sigma) = -\frac{\partial z_0}{\partial\xi}(\sigma;-1,-\sigma), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial\eta}(\sigma;1,\sigma) = -\frac{\partial z_0}{\partial\xi}(\sigma;1,\sigma) + v_1'(+0) + v_0''(+0). \tag{3.13}$$

Ці системи рівнянь з частинними похідними, крайові умови для яких задаються лише в двох вершинах прямокутника Π_σ, вимагають додаткового дослідження. Хоча такі задачі не є коректними, ми сформулюємо певні умови їх розв'язності, які будуть достатніми для побудови ряду (3.3).

Лема 3.1. *Нехай виконуються умови: (i)* $\sigma \neq \dfrac{\pi k - 2q\omega_1}{2q\omega_0}$, $k\in\mathbb{N}$;
(ii) функція F *допускає зображення*

$$F(\sigma;\xi,\eta) = f_1(\sigma,\xi)\sin q(\omega_0\eta + \omega_1\xi) + f_2(\sigma,\xi)\cos q(\omega_0\eta + \omega_1\xi) \tag{3.14}$$

та неперервно диференційовна в Π_σ. *Тоді існує єдиний розв'язок* $Z(\sigma;\xi,\eta)$ *задачі*

$$Z_{\eta\eta} + \omega_0^2 q^2 Z = 0, \qquad Z_{\xi\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 Z = F(\sigma;\xi,\eta), \tag{3.15}$$

$$Z_\eta(\sigma;-1,-\sigma) = h_1(\sigma), \quad Z_\eta(\sigma;1,\sigma) = h_2(\sigma), \tag{3.16}$$

який двічі неперервно диференційовний на прямокутнику Π_σ.

Доведення. Загальний розв'язок першого рівняння подамо у вигляді

$$Z(\sigma;\xi,\eta)=a_1(\sigma,\xi)\cos q(\omega_0\eta+\omega_1\xi)+a_2(\sigma,\xi)\sin q(\omega_0\eta+\omega_1\xi).$$

Підставляючи це зображення в друге рівняння (3.15) та крайові умови (3.16), отримаємо крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь з невідомим вектором $a_\sigma=(a_1(\sigma,\xi),a_2(\sigma,\xi))$:

$$\dot a_1=-(\omega_0q)^{-1}f_1(\sigma,\xi),\quad \dot a_2=(\omega_0q)^{-1}f_2(\sigma,\xi),; \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} a_1(\sigma,-1)\sin q\gamma(\sigma)+a_2(\sigma,-1)\cos q\gamma(\sigma)=(\omega_0q)^{-1}h_1(\sigma),\\ a_1(\sigma,1)\sin q\gamma(\sigma)-a_2(\sigma,1)\cos q\gamma(\sigma)=-(\omega_0q)^{-1}h_2(\sigma),\end{cases} \tag{3.18}$$

де $\xi\in(-1,1)$, $\gamma(\sigma)=(\omega_0\sigma+\omega_1)$, а крапкою позначена похідна за змінною ξ.

Оскільки значення вектора a_σ на кінцях відрізка пов'язані рівністю

$$a_\sigma(1)=a_\sigma(-1)+(\omega_0q)^{-1}\int_{-1}^1 f(\sigma,s)\,ds,$$

де $f=(-f_1,f_2)$, то умови (3.18) можна переписати так

$$B(\sigma)a_\sigma(-1)=g(\sigma), \tag{3.19}$$

де матриця $B(\sigma)$ та вектор $g(\sigma)$ мають вигляд

$$B(\sigma)=\begin{pmatrix}\sin q\gamma(\sigma) & \cos q\gamma(\sigma)\\ \sin q\gamma(\sigma) & -\cos q\gamma(\sigma)\end{pmatrix},$$

$$g(\sigma)=\frac{1}{\omega_0q}\Big(h_1(\sigma),\sin q\gamma(\sigma)\int_{-1}^1 f_1\,ds+\cos q\gamma(\sigma)\int_{-1}^1 f_2\,ds-h_2(\sigma)\Big).$$

Якщо матриця $B(\sigma)$ невироджена, то задача (3.17),(3.19) є задачею Коші, а, отже, має єдиний розв'язок потрібної гладкості. Оскільки $\det B(\sigma)=-\sin 2q\gamma(\sigma)$, то, згідно з першою умовою леми, цей визначник не дорівнює нулю. Лему доведено.

Лема 3.2. *Нехай величини F, h_1 та h_2 не залежать від σ. Тоді можна вибрати таку послідовність $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, яка задовольняє першу умову леми 3.1, що розв'язок $Z(\sigma_n;\xi,\eta)$ задачі (3.15),(3.16) разом з числами $Z(\sigma_n;\pm1,\pm\sigma_n)$ не залежать від σ (тобто від n). Крім того, для всіх $n\in\mathbb{N}$ існує стала C, що*

$$|Z(\sigma_n;\xi,\eta)|\leqslant C,\qquad (\xi,\eta)\in\Pi_{\sigma_n}.$$

Доведення. Згідно з умовою леми в задачі (3.17),(3.19) лише матриця B залежить від σ. Нехай α та β – два відмінні від нуля числа і $\alpha^2+\beta^2=1$. Визначимо числа σ_n з рівнянь

$$\sin q\gamma(\sigma_n)=\alpha\quad \cos q\gamma(\sigma_n)=\beta.$$

Тоді матриця $B(\sigma_n)$ є сталою та невиродженою, $\det B(\sigma_n)=-2\alpha\beta$. Отже, розв'язок задачі (3.15),(3.16) набуває вигляду

$$Z(\sigma_n;\xi,\eta)=a_1(\xi)\cos q(\omega_0\eta+\omega_1\xi)+a_2(\xi)\sin q(\omega_0\eta+\omega_1\xi)$$

і є обмеженою функцією в прямокутнику Π_{σ_n}. Зокрема,

$$Z(\sigma_n;-1,-\sigma_n)=a_1(-1)\alpha-a_2(-1)\beta\quad Z(\sigma_n;1,\sigma_n)=a_1(1)\alpha+a_2(1)\beta.$$

Лему доведено.

Повернемося до побудови асимптотичних розвинень. Надалі вважаємо, що числа α та β, які визначають послідовність $\sigma_n\to+\infty$, зафіксовані. Позначимо цю послідовність $\Sigma_{\alpha\beta}$.

Зауваження. *Хоча вибір такої послідовності неоднозначний, це позначиться лише на членах асимптотичних рядів порядку ε^2 та вищого. Така неоднозначність спричинена природою явища, яке ми описуємо: для кожної пари $(\omega_0, v_0(x))$ існує континуальна кількість дискретних послідовностей власних функцій вихідної задачі, які апроксимують таку глобальну форму коливань; всі вони відповідають частотам, які лежать в тонкому конусі з віссю $\omega_0 + \omega_1\varepsilon$ (рис.2).*

Для $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$ задача (3.9),(3.10) задовольняє усі умови лем 3.1 та 3.2, а, отже, існує її єдиний розв'язок

$$z_0(\sigma;\xi,\eta) = -\frac{v_0'(+0)}{2q\omega_0}\Big(\frac{1}{\alpha}\cos q(\omega_0\eta+\omega_1\xi) - \frac{1}{\beta}\sin q(\omega_0\eta+\omega_1\xi)\Big),$$

який є нескінченно диференційовний.

З умови розв'язності задачі (3.7) визначимо наступний член ряду (3.1)

$$\omega_2 = (2\omega_0)^{-1}v_0'(+0)\big(v_1'(+0) + 1/2v_0''(+0) - z_0(\sigma;1,\sigma)\big) - (2\omega_0)^{-1}\omega_1^2.$$

Зауважимо, що права частина не залежить від σ, коли $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$.

Далі ми знаходимо функцію v_2, підпорядковану умові $(\rho v_2, v_0)_{L_2(a,b)} = 0$. Оскільки права частина другого рівняння (3.11) має структуру (3.14) і величина $(z_0)'_\xi(\sigma;\pm1;\pm\sigma)$ не залежить від σ, $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$, то задача (3.11)-(3.13) має єдиний гладкий розв'язок z_1, обмежений в Π_σ. Функція z_1 також матиме вигляд (3.14), а функція v_2 є першим членом розвинення (3.2), який вже не дорівнює тотожному нулю на $(a, 0)$.

Тепер можна описати алгоритм побудови асимптотичних рядів (3.1)-(3.3) в цілому. Нехай вже знайдені коефіцієнти рядів $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{k+1}, v_0, v_1, \dots v_{k+1}$ та $z_0, z_1, \dots z_{k-1}$, причому функції v_i, $i = 1, \dots, k$, підпорядковані умовам $(\rho v_i, v_0)_{L_2(a,b)} = 0$, а z_j – гладкі, обмежені в Π_σ функції, які допускають зображення (3.14).

Крок 1. Для $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$ будується обмежений в Π_σ розв'язок z_k задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_k}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_k = 0, & (\xi,\eta) \in \Pi_\sigma, \\ \dfrac{\partial^2 z_k}{\partial\xi\partial\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 z_k = F_{k-1}, & \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial\eta}(\sigma;\pm1,\pm\sigma) = g_k^\pm - \frac{\partial z_{k-1}}{\partial\xi}(\sigma;\pm1,\pm\sigma), \tag{3.21}$$

де, як легко бачити, права частина рівняння та "кутові" умови

$$F_{k-1}(\sigma;\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 z_{k-1}}{\partial\xi^2} - q^2\sum_{s=2}^{k+1}\Big(\sum_{i=0}^{s}\omega_i\omega_{s-i}\Big)z_{k+s-1}\Big),$$

$$g_k^\pm = \sum_{j=0}^{k}\frac{(\pm1)^{k-j}}{(k-j)!}\,v_j^{(k-j+1)}(\pm0)$$

задовольняють вимоги лем 3.1, 3.2.

Крок 2. Знаходимо величину ω_{k+2} з рівності

$$\omega_{k+2} = \frac{v_0'(+0)}{2\omega_0}\Big(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{v_j^{(k-j+2)}(+0)}{(k-j+2)!} - z_k(\sigma;1,\sigma)\Big) - \frac{1}{2\omega_0}\sum_{j=1}^{k+1}\omega_j\omega_{k-j+2}, \tag{3.22}$$

яка є умовою розв'язності задачі

$$\frac{d^2v_{k+2}}{dx^2} + \omega_0^2\rho(x)v_{k+2} = -\sum_{s=1}^{k+2}\Big(\sum_{i=0}^{s}\omega_i\omega_{s-i}\Big)\rho(x)v_{k-s+2},\ x\in\Omega_0, \tag{3.23}$$

$$v_{k+2}(a) = 0, \quad v_{k+2}(b) = 0, \tag{3.24}$$

$$v_{k+2}(\pm 0) = z_k(\sigma;\pm 1,\pm\sigma) - \sum_{s=0}^{k+1}\frac{(\pm 1)^{k-s+2}}{(k-s+2)!}v_s^{(k-s+2)}(\pm 0). \tag{3.25}$$

Формула (3.22) отримана з урахуванням умов ортогональності, накладених на розв'язки v_s. Величина $z_k(\sigma;1,\sigma)$ не залежить від σ, якщо значення цього параметра беруться з множини $\Sigma_{\alpha\beta}$.

Крок 3. Розв'язуємо задачу (3.23)–(3.25), з міркувань єдиності підпорядкувавши її розв'язок v_{k+2} умові ортогональності

$$(\rho v_{k+2}, v_0)_{L_2(a,b)} = 0.$$

Побудову формальних асимтотичних рядів (3.1)–(3.3) завершено.

4. Обгрунтування асимптотичних розвинень. Проведемо обгрунтування побудованих розвинень звичним для самоспряжених задач методом. Введемо позначення

$$\omega_S(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \cdots + \varepsilon^S\omega_S, \tag{4.1}$$

$$U_S(\varepsilon,x) = \begin{cases} v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \cdots + \varepsilon^S v_S(x), & x\in(a,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,b); \\ \varepsilon^2 z_0(\sigma;\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}) + \cdots + \varepsilon^S z_{S-2}(\sigma;\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}), & x\in(-\varepsilon,\varepsilon). \end{cases} \tag{4.2}$$

Підставивши ці суми у вихідну задачу, отримаємо

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} + \omega_S^2(\varepsilon)\rho_\varepsilon(x)\Big)U_S(\varepsilon,x) = F_{S+1}(\varepsilon,x), \quad x\in(a,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,b)$$

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} + \omega_S^2(\varepsilon)\rho_\varepsilon(x)\Big)U_S(\varepsilon,x) = G_{S-3}(\varepsilon,x) \quad x\in(-\varepsilon,\varepsilon),$$

$$U_S(\varepsilon,a) = U_S(\varepsilon,b) = 0,$$

$$[U_S(\varepsilon,x)]_{x=\pm\varepsilon} = h_{S+1}^{\pm}(\varepsilon), \quad \Big[\frac{dU_S}{dx}(\varepsilon,x)\Big]_{x=\pm\varepsilon} = r_{S-1}^{\pm}(\varepsilon),$$

де індекси величин у правих частинах вказують на порядок їх малості при $\varepsilon\to 0$, наприклад,

$$|F_{S+1}(\varepsilon,x)| \leqslant C_{S+1}\varepsilon^{S+1}, \qquad x\in\Omega_0, \quad \varepsilon^{-1}\in\Sigma_{\alpha\beta}.$$

Введемо сім'ю компактних самоспряжених операторів $A_\varepsilon : H_0^1(a,b) \to H_0^1(a,b)$, які породжені формами $a_\varepsilon(u,v) = (\rho_\varepsilon u, v)_{L_2(a,b)}$, тобто $(A_\varepsilon u, v)_{H_0^1} = a_\varepsilon(u,v)$. Тоді задача (1.1),(1.2) еквівалентна спектральному рівнянню

$$A_\varepsilon u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon^{-1} u_\varepsilon = 0.$$

За побудовою функція U_S є гладкою на інтервалі (a,b), за винятком точок $x = \pm\varepsilon$, в яких вона має розрив першого роду. Очевидно, що існує визначена на (a,b) функція $\varphi_S(\varepsilon, x)$ з властивостями:

(i) $\varphi_S(\varepsilon,x) \equiv 0, \quad x \in (-\varepsilon,\varepsilon) \quad \varphi_S(\varepsilon,a) = \varphi_S(\varepsilon,b) = 0$;

(ii) функція $V_S(\varepsilon,x) = U_S(\varepsilon,x) + \varphi_S(\varepsilon,x)$ належить класу $C^1(a,b)$;

(iii) $\max(|\varphi_S| + |\varphi_S'| + |\varphi_S''|) \leqslant C_S \varepsilon^{S-1}$ (тут похідні беруться в точках, де вони існують.)

Легко переконатися, що функція V_S справджує інтегральну тотожність для $\psi \in H_0^1(a,b)$

$$\int_a^b V_S' \psi' \, dx - \omega_S^2(\varepsilon) \int_a^b \rho_\varepsilon V_S \psi \, dx = -\int_a^b F_{S+1} \psi \, dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G_{S-3} \psi \, dx,$$

де функція F_{S+1} продовжена нулем на інтервал $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Звідси отримуємо

$$|(A_\varepsilon V_S - \omega_S^{-2}(\varepsilon) V_S, \psi)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_S}{\omega_S^2(\varepsilon)} \Big(\max_{x \in (a,b)} |F_{S+1}(\varepsilon,x)| + \varepsilon \max_{x \in (-\varepsilon,\varepsilon)} |G_{S-3}(\varepsilon,x)| \Big) \|\psi\|$$

тобто

$$\|(A_\varepsilon - \omega_S^{-2}(\varepsilon) E) V_S(\varepsilon,\cdot)\| \leqslant B_S \varepsilon^{S-2}.$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — скалярний добуток та норма в H_0^1. Зауважимо, що норма $\|V_S(\varepsilon,\cdot)\|$ обмежена і відокремлена від нуля при $\varepsilon \to 0$ і $\varepsilon^{-1} \in \Sigma_{\alpha\beta}$. Тоді, як відомо [6], існує таке власне значення $(\lambda(\varepsilon))^{-1}$ оператора A_ε, що

$$\left| \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} - \frac{1}{\omega_S^2(\varepsilon)} \right| \leqslant B_S \varepsilon^{S-2}. \tag{4.3}$$

Зафіксуємо додатне число d і розглянемо на спектральній осі інтервал $I_{\varepsilon,d} = [\omega_S^{-2}(\varepsilon) - d, \omega_S^{-2}(\varepsilon) + d]$. Тоді також можна побудувати таку лінійну комбінацію V_ε^* власних функцій цього оператора, які відповідають власним значенням $(\lambda(\varepsilon))^{-1}$ з інтервала $I_{\varepsilon,d}$, що

$$\|V_\varepsilon^* - V_S\| \leqslant \frac{2B_S}{d} \varepsilon^{S-2}, \qquad \|V_\varepsilon^*\| = \|V_S\| \tag{4.4}$$

для $\varepsilon^{-1} \in \Sigma_{\alpha\beta}$.

Введемо позначення

$$\Lambda_S(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots + \varepsilon^S \lambda_S, \quad \text{де} \ \ \lambda_k = \sum_{i=0}^{k} \omega_i \omega_{k-i}, \tag{4.5}$$

зокрема, $\lambda_0 = \omega_0^2$.

Теорема. *(i) Нехай при $\varepsilon_n \to 0$ послідовності власних значень $\{\lambda(\varepsilon_n)\}$ та власних функцій $\{u(\varepsilon_n, x)\}$ задачі (1.1),(1.2) моделюють глобальну форму коливань $v(x)$ з частотою ω_0. Тоді для всіх $m > 2$ число ω_0^2 є власним значенням задачі (3.5), а $v(x)$ – відповідною власною функцією.*

(ii) У випадку, коли $m = 4$, $q(\xi) = q^2$, ω_0^2 — просте власне значення задачі (3.5), а $\varepsilon_n^{-1} \in \Sigma_{\alpha\beta}$, існують послідовності $\{\lambda(\varepsilon_n)\}$ і $\{u(\varepsilon_n, x)\}$, що для всіх натуральних S справедливі оцінки

$$|\lambda(\varepsilon_n) - \Lambda_S(\varepsilon_n)| \leqslant c(S)\varepsilon_n^S, \tag{4.6}$$

$$\|u(\varepsilon_n, x) - V_S(\varepsilon_n, x))\| \leqslant C(S)\varepsilon_n^{S-2}. \tag{4.7}$$

Хоча вибір множини $\Sigma_{\alpha\beta}$ неоднозначний, всі послідовності частот $(\lambda(\varepsilon_n))^{1/2}$, які моделюють глобальні коливання, належать тонкому конусу в $\mathbb{R}_{\varepsilon,\omega}$ з вершиною в точці $(0, \omega_0)$ та віссю

$$\omega = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2\omega_0}(v'(-0)^2 + v'(+0)^2).$$

Тут v — власна функція задачі (3.5), нормована умовою $(\rho v, v)_{L_2(a,b)} = 1$.

Доведення. (i) Задачі (1.1),(1.2) відповідає інтегральна тотожність

$$\int_a^b u_\varepsilon'\varphi'\,dx - \lambda(\varepsilon)\Big(\int_a^{-\varepsilon} \rho u_\varepsilon\varphi\,dx + \int_\varepsilon^b \rho u_\varepsilon\varphi\,dx + \varepsilon^{-m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(\frac{x}{\varepsilon})u_\varepsilon\varphi\,dx\Big) = 0$$

для $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$. Підставимо в неї послідовності $\lambda(\varepsilon_n)$ та $u(\varepsilon_n, x)$, і перейдемо до границі при $\varepsilon_n \to 0$ на множині пробних функцій φ, які дорівнюють нулю в деякому околі початку координат. Оскільки для достатньо малих ε інтеграл з вагою $\varepsilon^{-m}q(x/\varepsilon)$ дорівнює нулю, то ми отримаємо

$$\int_a^b v'\varphi'\,dx - \omega_0^2\int_a^b \rho v\varphi\,dx = 0 \tag{4.8}$$

на множині функцій φ, яка щільна в просторі $H_0^1(\Omega_0)$. Крім того, при $m > 1$ для власних функцій вихідної задачі є апріорна оцінка [3]

$$|u_\varepsilon(0)| \leqslant \frac{c}{\lambda(\varepsilon)}\varepsilon^\delta, \qquad \delta = \min\{m-1, 1/2\},$$

де $\|u_\varepsilon\| = 1$. Отже, тоді $v(0) = 0$ і згідно з (4.8) функція v є власною функцією триточкової задачі (3.5), яка відповідає власному значенню ω_0^2.

Зауважимо, що проведені міркування справедливі і для $m \in (1, 2]$, однак в цьому випадку відсутні локальні форми коливань, а ω_0^2 та v є границями неперервних за ε власних елементів задачі (1.1),(1.2).

(ii) Згідно з (4.3) та (4.5) для $\varepsilon = \varepsilon_n$ маємо

$$|\lambda(\varepsilon) - \Lambda_S(\varepsilon)| \leqslant B_S\lambda(\varepsilon)\omega_S^2(\varepsilon)\varepsilon^{S-2} + |\omega_S^2(\varepsilon) - \Lambda_S(\varepsilon)| \leqslant C_S(\varepsilon^{S-2} + \varepsilon^{S+1}),$$

звідки

$$|\lambda(\varepsilon) - \Lambda_{S-2}(\varepsilon)| \leqslant C_S(\varepsilon^{S-2} + \varepsilon^{S+1}) + |\lambda_{S-1}|\varepsilon^{S-1} + |\lambda_S|\varepsilon^S \leqslant c(S-2)\varepsilon^{S-2}.$$

Нерівність (4.6) отримується заміною $S-2$ на S.

Для доведення оцінки (4.7) достатньо зауважити, що при малих ε інтервал $I_{\varepsilon,d}$ містить не більше однієї точки спектра оператора A_ε, оскільки сусідні точки розташовані на відстані порядку ε^{-2}. Це випливає із асимптотики $\lambda_k(\varepsilon) \sim \mu_k\varepsilon^{m-2}$, коли $\varepsilon \to 0$ і $m > 2$, неперервних за параметром ε власних значень вихідної задачі [3]. Тоді функція V_ε^* із нерівності (4.4) буде власною функцією задачі (1.1),(1.2). Теорему доведено.

1. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularily perturbed operators.* // Non-classical continuum mechanics. Lecture Notes series. Cambridge University Press. – 1987. – Vol. 122. – P.188-205.

2. Олейник О.А. *О собственных колебаниях тел с концентрированными массами* // Современные проблемы прикладной математики и математической физики.— М.: Наука, 1988.— С.101-128.

3. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сиб. мат. журн. 1988. Т.29, N5. С.71-91.

4. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Л.: Изд. АН СССР, 1932.

5. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. М.-Л.: Гос.изд.техн.-теорет.лит., 1950.

6. Вишик М.И., Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // УМН. – 1957. – Т.12, N5. – С.3–122.

7. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Труды Математ. ин–та им. В.А.Стеклова. – 1990. – Т.192. – С.42–60.

8. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний* // Труды Московского мат. о–ва. – 1992. – Т.54. – С.29–72.

9. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses* // Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag. – 1984. – P.346-368.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.97