УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРРОНОВОГО КОРЕНЯ СІМ'Ї ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ

Я. І. Єлейко

Elejko Ja.I. Asymptotic properties of Perron root for the family of the branchy processes. The asymptotic expansion of Perron root for branchy process with demmerable set of tapes is found.

Будемо розглядати сім'ю гіллястих процесів із зліченною множиною типів T, дискретним часом та перетвореннями, залежними від віку. У нашому випадку параметр сім'ї ε є мале додатне число.

Для гіллястого процесу з параметром ε позначимо через $\xi_n^\varepsilon(i,j)$ число частинок типу j в момент часу n при умові, що в початковий момент часу була одна частинка типу i нульового віку, де $i, j \in T$. Тоді

$$\xi_n^\varepsilon(i,s) = \sum_{j \in S} \xi_n^\varepsilon(i,j) \qquad -$$

число частинок в момент часу n, типи яких належать множині $S \subset T$, при умові, що в початковий момент часу була одна частинка типу i нульового віку. Слід пам'ятати, що $\xi_n^\varepsilon(i,j), \xi_n^\varepsilon(i,s)$ – випадкові міри. Нехай τ – випадкова величина, яка є часом життя частинки.

Введемо число $\xi_\tau^\varepsilon(i,j)$ частинок-нащадків типу j за умови, що в початковий момент часу була частинка типу i нульового віку. Нехай

$$\xi_\tau^\varepsilon(i,s) = \sum_{j \in S} \xi_\tau^\varepsilon(i,j) \qquad -$$

число частинок-нащадків, типи яких належать $S \subset T$, за умови, що в початковий момент була одна частинка типу i нульового віку, $\xi_\tau^\varepsilon(i,j), \xi_\tau^\varepsilon(i,s)$ – випадкові міри.

Розглянемо сім'ю ядер

$$N_i^\varepsilon(s) = M\xi_\tau^\varepsilon(i,s) = \sum_{j \in S} M\xi_\tau^\varepsilon(i,j),$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60J105.

які є середнім числом нащадків, типи яких належать S для процесу з параметром ε, за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу i нульового віку, де M – знак математичного сподівання.

Із зображення $N_i^\varepsilon(s)$ видно, що дана сім'я ядер однозначно задається за допомогою зліченної матриці вимірності $T \times T$ вигляду

$$N^\varepsilon = (N_i^\varepsilon(j))_{i,j \in T} \,.$$

Згідно з нашими припущеннями всі елементи матриці N^ε є невід'ємними. Через m позначимо дійсний векторний нормований простір (банахів простір), який складається з векторів $g = g_i$, $i \in T$ з нормою $||g|| = \sup\limits_{i \in T} |g_i|$; E – дійсний простір векторів $l = l_i$, $i \in T$ з нормою $||l|| = \sup\limits_{i \in T} |l_i|$.

Для довільного вектора $g \in m$ і $l \in E$ є визначений скалярний добуток

$$(l, g) = \sum_{i \in T} g_i l_i,$$

який при фіксованих l можна вважати значенням функціоналу l на векторах g, тобто $l(g) = (l, g)$.

Введемо символи тензорного множення векторів

$$[g \times l] = (g_i l_j)_{i,j \in T} \,.$$

Матриця $[g \times l]$ володіє проекційними властивостями

$$[g \times l]_k = (l, k) g$$

для довільного вектора $k \in m$. Нехай існує границя

$$N_i(j) = \lim_{\varepsilon \to 0} N_i^\varepsilon(j)\,, \qquad \forall i, j \in T\,.$$

Крім того, вважатимемо, що

$$\sup_{i \in T} \sum_{j \in T} N_i(j) < \infty. \tag{1}$$

Основну роль надалі буде відігравати інтерпретація матриць як лінійних операторів в m.

Нехай задано матрицю $N = \{N_i(j)\}_{i,j \in T}$. Визначимо лінійний оператор N в m співвідношенням

$$Ng = u, \quad u_i = \sum_{j \in T} N_i(j) g_j, \quad i \in T\,.$$

Умова (1) задає норму лінійного оператора N і вказує на те, що $||N|| < \infty$. Звідси випливає, що оператор N переводить вектори з простору m у вектори з m.

Визначимо також оператор, який заданий на векторах простору E правилом

$$lN = \psi, \quad \psi_j = \sum_{i \in T} N_i(j) l_i .$$

Не важко помітити, що даний оператор є спряженим до оператора N; крім того, умова (1) забезпечує його обмеженість в просторі E.

Нехай число 1 є максимальним власним числом оператора N з правим додатним власним вектором $f = \{f_i,\ f_i \geqslant 0, i \in T\} \in m$ і лівим додатним власним вектором $\nu = \{\nu_j,\ \nu_j \geqslant 0,\ j \in T\} \in E$, такими, що $Nf = f$; $\nu N = \nu$. Крім того, власне число 1 є ізольованою точкою спектра. Не зменшуючи загальності, правий і лівий власні вектори виберемо такими, що $(\nu, f) = 1$.

Введемо оператор N^ε, який діє в просторі m:

$$N^\varepsilon g = \psi; \quad \psi_i = \sum_{j \in T} N_i^\varepsilon(j) g_j .$$

Нехай $N^\varepsilon \to N$ при $\varepsilon \to 0$ за нормою лінійних операторів в просторі m.

За теоремою про неперервність для ізольованих точок спектра [1] оператор N^ε має максимальне власне значення ρ_ε для достатньо малих значень ε і правий власний вектор $f_\varepsilon \in m$, для яких $N^\varepsilon f_\varepsilon = \rho_\varepsilon f_\varepsilon$.

Із згаданої теореми випливає також, що сім'я власних векторів f_ε рівномірно збігається до власного вектора f, і послідовність власних значень ρ_ε збігається до 1 при $\varepsilon \to 0$. Власні вектори f_ε можемо вибрати так, щоб виконувалась умова $(\nu, f_\varepsilon) = 1$. Умова $\rho_\varepsilon \to 1$ вказує на те, що сім'я гіллястих процесів є близькою у певному розумінні до критичних гіллястих процесів.

У праці [2] досліджено перехідні явища для математичного сподівання сім'ї гіллястих процесів $M\xi_n^\varepsilon(i, s)$ з довільним числом типів T при $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ та $n(\rho_\varepsilon - 1) \to c$, звідки бачимо, наскільки важливою є поведінка нескінченно малої $\rho_\varepsilon - 1$. Наша мета – дослідити асимптотику $\rho_\varepsilon - 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Вважатимемо оператор $N - I$ простим фредгольмовим, де I – одиничний оператор. Як відомо, для $N - I$ існує такий узагальнений обернений оператор V, який володіє властивостями:

$$(N - I)V = V(N - I) = \Pi - I,$$

причому проектор Π має вигляд $\Pi = [f \times \nu]$ і $\Pi g = (\nu, g) f, \quad g \in m$.

Для $\mu \in E$, $g \in m$ та нескінченновимірної матриці B введемо операції формулою

$$\langle \mu * B * g \rangle = (\mu; Bg) = (\mu B, g), \quad \langle \mu * g \rangle = (\mu, g).$$

Теорема 1. *Для довільного натурального n справедливе зображення*

$$\rho_\varepsilon - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^k * f \right\rangle +$$

$$+ \langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^n * f_\varepsilon \rangle + o(\rho_\varepsilon - 1),$$

де оператори N^ε і N володіють всіма описаними вище властивостями, V – узагальнений обернений оператор для оператора $N-I$, f та n – правий та лівий власні вектори оператора N, що відповідають максимальному власному значенню 1. Крім того, $(\nu, f) = 1$, $(\nu, f_\varepsilon) = 1$.

Доведення. Маємо такі рівності

$$\rho_\varepsilon f_\varepsilon = N^\varepsilon f_\varepsilon = N f_\varepsilon + (N^\varepsilon - N) f_\varepsilon . \tag{2}$$

Знайдемо скалярний добуток вектора (2) та правого власного вектора ν. Отримаємо рівність вигляду

$$\rho_\varepsilon \langle \nu * f_\varepsilon \rangle = \langle \nu * N * f_\varepsilon \rangle + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle . \tag{3}$$

Використовуючи властивості оператора N, з (3) отримаємо таку рівність

$$\rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle . \tag{4}$$

Перепишемо (4) у вигляді

$$\rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f \rangle + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * (f_\varepsilon - f) \rangle . \tag{5}$$

Знайдемо зображення для різниці векторів $f_\varepsilon - f$. З цією метою формулу (2) перепишемо так

$$(\rho_\varepsilon - 1) f_\varepsilon = (N - I) f_\varepsilon + (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon . \tag{6}$$

Подіємо на вектор (6) узагальненим оберненим оператором V і скористаємося його властивостями. Отримаємо таку рівність

$$(\rho_\varepsilon - 1) V f_\varepsilon = V(N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon + V(N - I) f_\varepsilon = (\Pi - I)(f_\varepsilon - f) + V(N^\varepsilon - N) f_\varepsilon . \tag{7}$$

З формули (7) безпосередньо випливає рівність для різниці векторів

$$-(f_\varepsilon - f) = -(\rho_\varepsilon - 1) V f_\varepsilon + V(N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon . \tag{8}$$

Зробимо підстановку (8) у формулу (5). Це дає змогу виписати таку рівність для $\rho_\varepsilon - 1$:

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f \rangle - (\rho_\varepsilon - 1) \langle \nu * (N^\varepsilon - N) V * f_\varepsilon \rangle +\\ + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) V (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle .\end{aligned} \tag{9}$$

З формули (9) легко бачити, що при $\varepsilon \to 0$

$$\rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f \rangle + o(\rho_\varepsilon - 1) + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) V (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle . \tag{10}$$

Останній доданок формули (10) запишемо у вигляді суми

$$\langle \nu * (N^\varepsilon - N) V (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle =$$

$$= \langle \nu * (N^{\varepsilon} - N)V(N^{\varepsilon} - N) * f \rangle + \langle \nu * (N^{\varepsilon} - N)V(N^{\varepsilon} - N) * (f_{\varepsilon} - f) \rangle \,. \quad (11)$$

Підставимо рівність (11) у формулу (10) і скористаємося (7). В результаті отримаємо

$$\rho_{\varepsilon} - 1 + o(\rho_{\varepsilon} - 1) = \langle \nu * (N^{\varepsilon} - N) * f \rangle + \langle \nu * (N^{\varepsilon} - N)V(N^{\varepsilon} - N) * f \rangle + \\ + \left\langle \nu * (N^{\varepsilon} - N)(V(N^{\varepsilon} - N))^2 f \right\rangle + \left\langle \nu * (N^{\varepsilon} - N)(V(N^{\varepsilon} - N))^2 * f_{\varepsilon} \right\rangle \,. \quad (12)$$

Скориставшись методом математичної індукції, неважко узагальнити формулу (12) для довільного натурального числа n. Отже,

$$\rho_{\varepsilon} - 1 + o(\rho_{\varepsilon} - 1) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \nu * (N^{\varepsilon} - N)(V(N^{\varepsilon} - N))^k * f \right\rangle + \langle \nu * (N^{\varepsilon} - N)(V(N^{\varepsilon} - N))^n * f_{\varepsilon} \rangle \,.$$

Теорему доведено.

Тепер будемо вважати, що оператор N^{ε} має зображення

$$N^{\varepsilon} = N + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon) B_i \,, \quad (13)$$

де B_i – обмежені лінійні оператори, $\delta_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2 \ldots, n$ – шкала нескінченно малих величин, для яких $\delta_i(\varepsilon) = o(\delta_{i-1}(\varepsilon))$, тобто

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_i(\varepsilon)}{\delta_{i-1}(\varepsilon)} = 0, \quad i = 2, 3 \ldots n, \quad \delta_1(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Дві нескінченно малі $\alpha(\varepsilon)$ і $\beta(\varepsilon)$ називаються еквівалентними ($\alpha(\varepsilon) \approx \beta(\varepsilon)$), якщо $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)} = 1$. Позначимо

$$b_i = \langle \nu * B_i * f \rangle \quad i = 1, 2, \ldots n; \quad b_i^{\varepsilon} = \langle \nu * B_i * f_{\varepsilon} \rangle \quad i = 1, 2, \ldots n; \quad c_1 = \langle \nu * B_1 V B_1 * f \rangle \,.$$

Справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай* $b_j = 0$, $j = 1, \ldots r - 1$; $b_r \neq 0$; $r \leqslant n$; $c_1 \neq 0$. *Тоді*

$$\text{а)}\ \rho_{\varepsilon} - 1 \approx b_r \delta_r(\varepsilon), \quad \text{якщо}\ \delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_r(\varepsilon)),$$
$$\text{б)}\ \rho_{\varepsilon} - 1 \approx (\alpha c_1 + b_r)\delta_r(\varepsilon), \quad \text{якщо}\ \delta_1^2(\varepsilon) \approx \alpha \delta_r(\varepsilon),$$
$$\text{в)}\ \rho_{\varepsilon} - 1 \approx \delta_1^2(\varepsilon) c_1, \quad \text{якщо}\ \delta_r(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon)).$$

Доведення. Використавши формулу (4) та зображення (13), отримаємо

$$\rho_{\varepsilon} - 1 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon) \langle \nu * B_i * f_{\varepsilon} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon) b_i^{\varepsilon}. \quad (14)$$

У випадку $b_1 \neq 0$ з рівності (14) випливає, що $\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_1(\varepsilon)b_1$. Нехай тепер $b_1 = 0$. В даній ситуації очевидно, що $\rho_\varepsilon - 1 = o(\delta_1(\varepsilon))$. Перший доданок формули (14) можемо зобразити у вигляді

$$\delta_1(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1 * (f_\varepsilon - f)\rangle\,,$$

внаслідок чого маємо рівність

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1 * (f_\varepsilon - f)\rangle + \delta_2(\varepsilon)b_2^\varepsilon + \cdots + \delta_n(\varepsilon)b_n^\varepsilon\,. \tag{15}$$

Тепер зробимо підстановку (8) у (15) та скористаємося (13). Тоді отримаємо рівність вигляду

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1VB_1 * f_\varepsilon\rangle + \sum_{i=2}^{r}\delta_1(\varepsilon)\delta_i(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1VB_i * f_\varepsilon\rangle +$$
$$+o(\delta_r(\varepsilon)\delta_1(\varepsilon)) - (\rho_\varepsilon - 1)\delta_1(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1VB_1 * f_\varepsilon\rangle + \delta_2(\varepsilon)b_2^\varepsilon + \cdots + \delta_n(\varepsilon)b_n^\varepsilon\,. \tag{16}$$

Вираз (16) можемо переписати так

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1VB_1 * f\rangle + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + \sum_{i=2}^{n}\delta_i(\varepsilon)b_i^\varepsilon\,. \tag{17}$$

Нехай r – перший номер i в сумі (17), для якого $b_i \neq 0$. У даному випадку (17) набуде вигляду

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1VB_1 * f\rangle + o(\delta_1^2(\varepsilon)) +$$
$$+\sum_{i=2}^{r-1}\delta_1(\varepsilon)\,\langle \nu * B_i * (f_\varepsilon - f)\rangle + o(\delta_r(\varepsilon)) + \delta_r(\varepsilon)\,\langle \nu * B_r * f\rangle\,.$$

З цієї рівності, використовуючи (8), (15) та властивості узагальненого оберненого оператора, отримаємо

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon)\,\langle \nu * B_1VB_1 * f\rangle + o(\delta_1^2(\varepsilon)) +$$
$$+\sum_{i=2}^{r-1}\delta_1(\varepsilon)\delta_i(\varepsilon)\,\langle \nu * B_iVB_1 * f\rangle + \delta_r(\varepsilon)\,\langle \nu * B_r * f\rangle + o(\delta_r(\varepsilon))\,. \tag{18}$$

Отже, якщо стала $c_1 = \langle \nu * B_1VB_1 * f\rangle \neq 0$, то вираз (18) запишеться у вигляді

$$\rho_\varepsilon - 1 = c_1\delta_1^2(\varepsilon) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + b_r\delta_r(\varepsilon) + o(\delta_r(\varepsilon))\,. \tag{19}$$

Тепер можливі такі випадки.

а) Нехай $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_r(\varepsilon))$. Тоді (19) запишеться у вигляді $\rho_\varepsilon - 1 = \delta_r(\varepsilon)b_r + o(\delta_r(\varepsilon))$. Остання рівність означає, що $\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_r(\varepsilon)b_r$.

б) Нехай $\delta_1^2(\varepsilon) \approx \alpha\delta_r(\varepsilon)$. Тоді з (19) випливає рівність $\rho_\varepsilon - 1 = \alpha\delta_r(\varepsilon)c_1 + \delta_r(\varepsilon)b_r + o(\delta_r(\varepsilon))$. Отримана рівність вказує на те, що маємо еквівалентність $\rho_\varepsilon - 1 \approx (\alpha c_1 + b_r)\delta_r(\varepsilon))$.

в) Нехай $\delta_r(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$. У даному випадку із (19) випливає, що $\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_1^2(\varepsilon)c_1$. Теорему доведено.

У випадку $c_1 = 0$ можна уточнити асимптотичне зображення $\rho_\varepsilon - 1$. Справедлива теорема.

Теорема 3. *Нехай*

$$\langle \nu * B_j * f \rangle = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, r-1; \quad \langle \nu * B_r * f \rangle \neq 0; \ \langle \nu * (B_1 V B_1) * f \rangle = 0;$$
$$\langle \nu * B_1 (V B_1)^2 * f \rangle \neq 0; \quad \langle \nu * (B_1 V B_2) * f \rangle + \langle \nu * (B_2 V B_1) * f \rangle = 0.$$

Тоді

$$\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_r(\varepsilon) \left[m_1 \langle \nu * (B_1 (V B_1)^2) * f \rangle + \right.$$
$$\left. + m_2 \langle \nu * (B_1 V B_2) * f \rangle + m_2 \langle \nu * (B_2 V B_1) * f \rangle + \langle \nu * B_r * f \rangle \right]$$

за умов $\delta_1^3(\varepsilon) \approx m_1 \delta_r(\varepsilon); \ m_2 \delta_r(\varepsilon) \approx \delta_1(\varepsilon) \delta_2(\varepsilon)$.

Доведення теореми в деякому сенсі є подібним до доведення теореми 2, тому ми його наводити не будемо.

1. Като Т. Теория линейных операторов. – М.:Мир, 1972. – 740 с.
2. Елейко Я.И. *Переходные явления для ветвящихся процессов с произвольным числом типов и дискретным временем*// Укр. мат. журн. – 1982. – Т.4, N2. – С.198-203.
3. Королюк В.С,Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 183 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.04.1997