УДК 539.3

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ЦИЛІНДРА ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ МЕТОДОМ РОЗКЛАДУ ЗА ТЕНЗОРНИМИ ФУНКЦІЯМИ

І. Я. Банах

Banakh I.Ya. Solving the problem of stress-strain state of a cylinder under a complex charge using the method of decomposition by tensor functions. It is considered the stationary problem of linear elasticity theory for a cylinder under action of lateral and axial contractions and bending and torsional charges. The transition vector is given by its decomposition with respect to the base of tensor functions of increasing rank. The tensor decomposition coefficients satisfy a system of linear algebraic equations. The tensors of strain and stress are obtained as square functions of space coordinates. As partial cases, our results imply known solutions of certain boundary value problems.

При побудові моделей для дослідження і оптимізації стійкості руху (рівноваги) пружних систем, які перебувають під дією комбінованого навантаження, важливою проблемою залишається відшукання базових (незбурених) розв'язків відповідних рівнянь та дослідження їх стійкості. У праці [1] за лагранжевого підходу енергетичним методом побудовано математичну модель для розв'язування просторових задач нелінійної динамічної теорії пружності ізотропних тіл. При побудові моделі вектор переміщення подавався розкладом за базою тензорних функцій зростаючого рангу, шукані коефіцієнти якого були тензорними функціями відповідного рангу і залежними від часу. Для коефіцієнтів розкладу було отримано систему тензорних звичайних диференціальних рівнянь руху з відповідними початковими умовами. У даній праці на підставі запропонованої моделі розглянуто стаціонарну крайову задачу лінійної теорії пружності для прямого кругового циліндра, навантаженого по бічній поверхні при спільній дії стискуючих осьових зусиль, згину та кручення на крайових поперечних перерізах.

Нехай однорідний лінійно пружний прямий круговий циліндр K у відліковій γ_0-конфігурації займає область

$$X_0 = \left\{ (\xi^1, \xi^2, \xi^3) : \ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leqslant a^2, -\frac{h}{2} \leqslant \xi^3 \leqslant \frac{h}{2} \right\}.$$

Поверхню, яка обмежує цю область, подамо у вигляді $\partial X_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, де $\Sigma_1 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) : \ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leqslant a^2, \xi^3 = h/2\}$, $\Sigma_2 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) : (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leqslant a^2, \xi^3 = -h/2\}$ – верхня та нижня основи, а $\Sigma_3 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) : \ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = a^2,$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C35.

$-h/2 \leqslant \xi^3 \leqslant h/2\}$ – бічна поверхня циліндра. При переході з відлікової до актуальної конфігурації зміною площ елементів граничної поверхні нехтуємо.

Припустимо, що на циліндр K діють стаціонарні поверхневі сили, які характеризуються вектором поверхневих зусиль

$$\vec{P}_{n_0} = \begin{cases} -(N_0 - \mu N_1 \xi^1 + \delta(\xi^1, \xi^2 - \frac{a}{2}) N_3) \vec{\ni}_3^0 - \mu N_2 (\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0), & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_1, \\ (N_0 - \mu N_1 \xi^1 + \delta(\xi^1, \xi^2 - \frac{a}{2}) N_3) \vec{\ni}_3^0 + \mu N_2 (\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0), & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_2, \\ F(\xi^3)(\xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0), & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Тут N_0 – густина зусиль, рівномірно розподілених по граничних поперечних перерізах Σ_1, Σ_2; N_3 – інтенсивність сили, зосередженої в точці з координатами $\xi^1 = 0, \xi^2 = a/2$ на перерізах Σ_1, Σ_2; N_1, N_2 – кути згину та закручування, віднесені до одиниці довжини; $F(\xi^3) = f(\xi^3)/h$, де $f(\xi^3)$ – функція, що має зміст густини зусилля, прикладеного до бічної поверхні циліндра; $\delta(\xi^1, \xi^2 - a/2)$ – функція Дірака; μ – стала Ляме.

Розглянемо задачу про знаходження тензора напружень і тензора деформації у тілі K, яке перебуває під дією зовнішніх поверхневих зусиль (1). Для розв'язання сформульованої задачі скористаємося математичною моделлю, запропонованою в праці [1]. Вектор переміщення $\vec{u}$ з відлікової конфігурації в актуальну подамо у вигляді

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{N} \vec{R}_0^{n-1} \overset{n-1}{\cdot} \widehat{u}^{(n)}. \qquad (2)$$

Тут $\vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^0$ – радіус-вектор точки (ξ^1, ξ^2, ξ^3) у відліковій конфігурації, $\widehat{u}^{(n)}$ $(n = \overline{1, N})$ – шукані сталі тензори рангу n, „$\overset{n-1}{\cdot}$" означає $(n-1)$-кратний внутрішній добуток тензорів, $\vec{R}_0^{n-1}$ – $(n-1)$-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе. Система рівнянь рівноваги для лінійно пружного тіла запишеться у вигляді [1]

$$\sum_{n=1}^{N} \widehat{u}^{(n)^T} \overset{n}{\cdot} \widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)} = \widehat{F}_1^{(i)} \qquad (i = \overline{1, N}), \qquad (3)$$

де

$$\widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)} = \int_{X_0} \frac{\partial \vec{R}_0^{n-1}}{\partial \xi^m} \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes \frac{\partial \vec{R}_0^{i-1}}{\partial \xi^k} dV_0, \ \widehat{A}^{mk} = \lambda \vec{\ni}_0^m \otimes \vec{\ni}_0^k + \mu(\delta^{km} \widehat{I} + \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^m), \quad (4)$$

$$\widehat{F}_1^{(i)} = \int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0} \otimes \vec{R}_0^{i-1} d\Sigma_0. \qquad (5)$$

У розвиненні вектора переміщення (2) обмежимося збереженням членів до четвертого порядку включно, тобто у формулі (2) покладемо $N = 4$. Оскільки $\partial \vec{R}_0^0 / \partial \xi^i = 0, \vec{R}_0^0 \equiv 1$, а початок координат перебуває в центрі мас циліндра, то з (4) отримаємо

$$\widehat{\mathcal{J}}^{(1+i)} = 0 \quad (i = \overline{1,4}), \ \widehat{\mathcal{J}}^{(2+3)} = \widehat{\mathcal{J}}^{(3+2)} = 0, \ \widehat{\mathcal{J}}^{(n+1)} = 0 \quad (n = \overline{1,4}), \ \widehat{\mathcal{J}}^{(3+4)} = \widehat{\mathcal{J}}^{(4+3)} = 0.$$

Тому система рівнянь рівноваги (3) розпадеться на векторну тотожність $\widehat{F}_1^{(1)} \equiv 0$ $(i=1)$, яка означає рівність нулеві головного вектора зовнішніх сил, що діють на циліндр, систему двох тензорних рівнянь (i=2,4)

$$\widehat{u}^{(2)^T} \cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(2+2)} + \widehat{u}^{(4)^T} \cdot\cdot\cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(4+2)} = \widehat{F}_1^{(2)},\ \widehat{u}^{(2)^T} \cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(2+4)} + \widehat{u}^{(4)^T} \cdot\cdot\cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(4+4)} = \widehat{F}_1^{(4)} \quad (6)$$

стосовно тензора другого рангу $\widehat{u}^{(2)}$ і тензора четвертого рангу $\widehat{u}^{(4)}$ та тензорне рівняння

$$\widehat{u}^{(3)^T} \cdot\cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(3+3)} = \widehat{F}_1^{(3)} \quad (7)$$

стосовно тензора третього рангу $\widehat{u}^{(3)}$. Запишемо тензори $\widehat{u}^{(n)}$, $F_1^{(n)}$ $(n=\overline{1,4})$ у вигляді розкладу за поліадами векторів бази $\{\vec{\ni}_0^{\alpha}\}$

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}^{(1)} = u_\alpha \vec{\ni}_0^{\alpha},\ \ \widehat{u}^{(4)} = u_{\alpha\beta\gamma s} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma} \otimes \vec{\ni}_0^{s},\\
&\widehat{u}^{(2)} = u_{\alpha\beta} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta},\ \ \widehat{u}^{(3)} = u_{\alpha\beta\gamma} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma}, \qquad (8)
\end{aligned}$$

$$\widehat{F}_1^{(2)} = F_{\alpha\beta} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta},\ \ \widehat{F}_1^{(3)} = F_{\alpha\beta\gamma} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma},\ \ F_1^{(4)} = F_{\alpha\beta\gamma s} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma} \otimes \vec{\ni}_0^{s}. \quad (9)$$

Із формули (4) знаходимо :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{J}}^{(2+2)} =& V_0 \vec{\ni}_m^0 \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes \vec{\ni}_k^0,\\
\widehat{\mathcal{J}}^{(4+2)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta} (\vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_m^0) \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes \vec{\ni}_k^0,\\
\widehat{\mathcal{J}}^{(2+4)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta} \vec{\ni}_m^0 \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes (\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_k^0),\\
\widehat{\mathcal{J}}^{(4+4)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma s} (\vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_m^0) \otimes \qquad (10)\\
& \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes (\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\gamma^0 \otimes \vec{\ni}_s^0 + \vec{\ni}_\gamma^0 \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_s^0 + \vec{\ni}_\gamma^0 \otimes \vec{\ni}_s^0 \otimes \vec{\ni}_k^0),\\
\widehat{\mathcal{J}}^{(3+3)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta} (\vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_m^0) \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes (\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_k^0),
\end{aligned}$$

де $\mathcal{J}^{\alpha\beta} = \frac{V_0}{4}\left[a^2(\delta_1^\alpha \delta_1^\beta + \delta_2^\alpha \delta_2^\beta) + \frac{h^2}{3}\delta_3^\alpha \delta_3^\beta\right]$,

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma s} = \frac{V_0}{8} \begin{cases} a^4, & \text{якщо всі індекси дорівнюють 1, або всі дорівнюють 2,}\\ \frac{a^4}{3}, & \text{якщо два індекси дорівнюють 1, а два інші – 2,}\\ \frac{a^2h^2}{6}, & \text{якщо два індекси дорівнюють 3, а два інші – 1 або 2,}\\ \frac{h^4}{10}, & \text{якщо всі індекси дорівнюють 3,}\\ 0, & \text{у всіх інших випадках,} \end{cases}$$

$V_0 = \pi a^2 h$ – об'єм циліндра у відліковій конфігурації. Якщо підставити (8), (9) і (10) в

(6) і (7) та виконати внутрішнє множення, то рівняння системи (6) запишуться так

$$
\begin{gathered}
T_{nk}^{mj}\big[4u_{mj} + a^2(u_{m11j} + u_{1m1j} + u_{11mj} + u_{m22j} + u_{2m2j} + u_{22mj}) + \\
+\frac{h^2}{3}(u_{m33j} + u_{3m3j} + u_{33mj})\big]\vec{\exists}_0^n \otimes \vec{\exists}_0^k = \frac{4}{V_0}F_{nk}\vec{\exists}_0^n \otimes \vec{\exists}_0^k, \\
T_{nk}^{mj}\big\{a^2\big[2u_{mj} + a^2(u_{m11j} + u_{1m1j} + u_{11mj}) + \frac{a^2}{3}(u_{m22j} + u_{2m2j} + u_{22mj}) + \\
+\frac{h^2}{6}(u_{m33j} + u_{3m3j} + u_{33mj})\big](\delta_p^k\delta_q^1\delta_r^1 + \delta_p^1\delta_q^k\delta_r^1 + \delta_p^1\delta_q^1\delta_r^k) + \\
+a^2[2u_{mj} + a^2(u_{m22j} + u_{2m2j} + u_{22mj}) + \frac{a^2}{3}(u_{m11j} + u_{1m1j} + u_{11mj}) + \\
+\frac{h^2}{6}(u_{m33j} + u_{3m3j} + u_{33mj})](\delta_p^k\delta_q^2\delta_r^2 + \delta_p^2\delta_q^k\delta_r^2 + \delta_p^2\delta_q^2\delta_r^k) + \\
+h^2\big[\frac{2}{3}u_{mj} + \frac{a^2}{6}(u_{m11j} + u_{1m1j} + u_{11mj} + u_{m22j} + u_{2m2j} + u_{22mj}) + \\
+\frac{h^2}{10}(u_{m33j} + u_{3m3j} + u_{33mj})\big](\delta_p^k\delta_q^3\delta_r^3 + \delta_p^3\delta_q^k\delta_r^3 + \delta_p^3\delta_q^3\delta_r^k) + \\
+\frac{a^4}{3}(u_{m12j} + u_{1m2j} + u_{12mj} + u_{m21j} + u_{2m1j} + u_{21mj}) \times \\
\times(\delta_p^k\delta_q^1\delta_r^2 + \delta_p^1\delta_q^k\delta_r^2 + \delta_p^1\delta_q^2\delta_r^k + \delta_p^k\delta_q^2\delta_r^1 + \delta_p^2\delta_q^k\delta_r^1 + \delta_p^2\delta_q^1\delta_r^k) + \\
+\frac{a^2h^2}{6}(u_{m13j} + u_{1m3j} + u_{13mj} + u_{m31j} + u_{3m1j} + u_{31mj}) \times \\
\times(\delta_p^k\delta_q^1\delta_r^3 + \delta_p^1\delta_q^k\delta_r^3 + \delta_p^1\delta_q^3\delta_r^k + \delta_p^k\delta_q^3\delta_r^1 + \delta_p^3\delta_q^k\delta_r^1 + \delta_p^3\delta_q^1\delta_r^k) + \\
+\frac{a^2h^2}{6}(u_{m23j} + u_{2m3j} + u_{23mj} + u_{m32j} + u_{3m2j} + u_{32mj}) \times \\
\times(\delta_p^k\delta_q^2\delta_r^3 + \delta_p^2\delta_q^k\delta_r^3 + \delta_p^2\delta_q^3\delta_r^k + \delta_p^k\delta_q^3\delta_r^2 + \delta_p^3\delta_q^k\delta_r^2 + \delta_p^3\delta_q^2\delta_r^k)\big\} \times \\
\times\vec{\exists}_0^n \otimes \vec{\exists}_0^p \otimes \vec{\exists}_0^q \otimes \vec{\exists}_0^r = \frac{8}{V_0}F_{npqr}\vec{\exists}_0^n \otimes \vec{\exists}_0^p \otimes \vec{\exists}_0^q \otimes \vec{\exists}_0^r,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

а рівняння (7) набуде вигляду

$$
\begin{gathered}
T_{nk}^{mj}\big[\frac{h^2}{3}(u_{m3j} + u_{3mj})(\delta_p^k\delta_s^3 + \delta_p^3\delta_s^k) + a^2(u_{m1j} + u_{1mj})(\delta_p^k\delta_s^1 + \delta_p^1\delta_s^k) + \\
+ a^2(u_{m2j} + u_{2mj})(\delta_p^k\delta_s^2 + \delta_p^2\delta_s^k)\big] = \frac{4}{V_0}F_{nps}\vec{\exists}_0^n \otimes \vec{\exists}_0^p \otimes \vec{\exists}_0^s.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

У формулах (11), (12) введені позначення $T_{nk}^{mj} = \lambda\delta^{mj}\delta_{nk} + \mu(\delta_k^m\delta_n^j + \delta_k^j\delta_n^m)$.

Враховуючи позначення (8), вектор переміщення (2) можна записати

$$
\vec{u} = (u_s + \xi^\alpha u_{\alpha s} + \xi^\alpha\xi^\beta u_{\alpha\beta s} + \xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma u_{\alpha\beta\gamma s})\vec{\exists}_0^s. \tag{13}
$$

Зауважимо, що в (13) для кожного s коефіцієнтом при одночлені $\xi^\alpha\xi^\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ є сума $u_{\alpha\beta s} + u_{\beta\alpha s}$ двох компонент тензора $\widehat{u}^{(3)}$, а коефіцієтном при одночлені $\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma$ є сума

$u_{\alpha\beta\gamma s}+u_{\alpha\gamma\beta s}+u_{\gamma\alpha\beta s}$ трьох компонент тензора $\widehat{u}^{(4)}$ при $\alpha=\beta\neq\gamma$ і сума $u_{123s}+u_{132s}+u_{213s}+u_{231s}+u_{312s}+u_{321s}$ шести компонент тензора $\widehat{u}^{(4)}$, якщо індекси α,β,γ є різними. Врахувавши вигляд коефіцієнтів розвинення (13), структуру рівнянь (11), (12) і симетрію компонент $F_{\alpha\beta\gamma}$ тензора $\widehat{F}^{(3)}$ стосовно індексів β,γ та компонент $F_{\alpha\beta\gamma s}$ тензора $\widehat{F}^{(4)}$ стосовно індексів β,γ,s при будь-якому допустимому навантаженні, можна зробити висновок, що в загальному випадку система рівнянь (11) складається з 9+30 скалярних рівнянь, а рівняння (12) – з 18 скалярних рівнянь.

Знайдемо праві частини рівнянь (11), (12), які відповідають векторові поверхневих напружень (1). Із (5) отримаємо

$$
\begin{aligned}
\widehat{F}_1^{(2)} &= \pi a^3 D_2(\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2)-(N_0\pi a^2+N_3)h\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3,\\
\widehat{F}_1^{(3)} &= \pi a^3 D_3(\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2)+\\
&+\frac{\mu V_0 a^2}{4}\big[N_1(\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1)+N_2(-\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3-\\
&-\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1)\big]-\\
&-\frac{N_3 a h}{2}(\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2),\\
\widehat{F}_1^{(4)} &= \frac{\pi a^3}{4}\big[a^2 D_2(3(\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2)+\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2+\\
&+\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^2+\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^1+\\
&+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^2)+4D_4(\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3+\\
&+\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3+\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2)\big]-\\
&-\frac{N_0 h a^2}{4}(\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1+\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^1\otimes\vec{\ni}_0^3)-\\
&-\frac{a^2 h}{4}(N_0+N_3)\big[\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2+\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2+\\
&+\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^2\otimes\vec{\ni}_0^3+\frac{h^2}{a^2}\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^3\big].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Тут

$$
D_2=\int_{-h/2}^{h/2}F(\xi^3)d\xi^3,\ \ D_3=\int_{-h/2}^{h/2}F(\xi^3)\xi^3d\xi^3,\ \ D_4=\int_{-h/2}^{h/2}F(\xi^3)(\xi^3)^2d\xi^3. \tag{15}
$$

Введемо наступні позначення:

$$
x_{i1}=u_{ii11}+u_{i1i1}+u_{1ii1},\ \ y_{i2}=u_{ii22}+u_{i2i2}+u_{2ii2},\ \ z_{i3}=u_{ii33}+u_{i3i3}+u_{3ii3}, \tag{16}
$$

$$
a_{ij}=u_{ij1}+u_{ji1},\ \ b_{ij}=u_{ij2}+u_{ji2},\ \ c_{ij}=u_{ij3}+u_{ji3}\ \ (i\leqslant j). \tag{17}
$$

Якщо врахувати (14), (16) і (17), то систему рівнянь (11) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно ненульових змінних (16) і ненульових компонент тензора $\widehat{u}^{(2)}$:

$$\begin{gathered}
\lambda[4(u_{11}+u_{22}+u_{33})+a^2(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{3}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[4u_{11}+a^2(x_{11}+x_{21})+\frac{h^2}{3}x_{31}]=\frac{4aD_2}{h};\\
\lambda[4(u_{11}+u_{22}+u_{33})+a^2(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{3}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[4u_{22}+a^2(y_{12}+y_{22})+\frac{h^2}{3}y_{32}]=\frac{4aD_2}{h};\\
\lambda[4(u_{11}+u_{22}+u_{33})+a^2(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{3}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[4u_{33}+a^2(z_{13}+z_{23})+\frac{h^2}{3}z_{33}]=-4(N_0+\frac{N_3}{\pi a^2});\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+3y_{12}+3z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{11}+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+x_{21})+\frac{h^2}{6}x_{31}]=\frac{2D_2a}{h};\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{11}+\frac{a^2}{3}(x_{11}+2y_{12}+5x_{21})+\frac{h^2}{6}x_{31}]=\frac{2D_2a}{h};\\
\lambda[\frac{2}{3}(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{6}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\frac{h^2}{10}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[\frac{2}{3}u_{11}+\frac{a^2}{6}(x_{11}+2z_{13}+x_{21}+2x_{31})+\frac{h^2}{10}x_{31}]=\frac{8aD_4}{h^3};\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+3y_{12}+3z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{22}+\frac{a^2}{3}(5y_{12}+2x_{21}+y_{22})+\frac{h^2}{6}y_{32}]=\frac{2D_2a}{h};\qquad(18)\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{22}+\frac{a^2}{3}(y_{12}+3y_{22})+\frac{h^2}{6}y_{32}]=\frac{2D_2a}{h};\\
\lambda[\frac{2}{3}(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{6}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\frac{h^2}{10}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[\frac{2}{3}u_{22}+\frac{a^2}{6}(y_{12}+y_{22}+2z_{23}+2y_{32})+\frac{h^2}{10}y_{32}]=\frac{8aD_4}{h^3};\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+3y_{12}+3z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[2u_{33}+\frac{a^2}{3}(3z_{13}+z_{23})+\frac{h^2}{6}(2z_{13}+2x_{31}+z_{33})]=-\frac{2}{\pi a^2}(N_0+N_3);\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[2u_{33}+\frac{a^2}{3}(z_{13}+3z_{23})+\frac{h^2}{6}(2z_{13}+2y_{32}+z_{33})]=-\frac{2}{\pi a^2}(N_0+N_3);
\end{gathered}$$

$$\lambda[\frac{2}{3}(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{6}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\frac{h^2}{10}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+$$
$$+2\mu[\frac{2}{3}u_{33}+\frac{a^2}{6}(z_{13}+z_{23})+\frac{h^2}{10}z_{33}]=-\frac{2}{3\pi a^2}(N_0+N_3),$$

а систему (12) — у вигляді лінійної системи скалярних рівнянь стосовно змінних (17)

$$(\lambda+2\mu)a_{11}+\lambda b_{12}+\lambda c_{13}=0,\ \lambda a_{11}+(\lambda+2\mu)b_{12}+\lambda c_{13}=0,\ \lambda a_{11}+\lambda b_{12}+$$
$$+(\lambda+2\mu)c_{13}=\mu N_1,\ a_{22}+b_{12}=0,\ a_{33}+c_{13}=0,\ (\lambda+2\mu)a_{12}+\lambda b_{22}+\lambda c_{23}=0,$$
$$\lambda a_{12}+(\lambda+2\mu)b_{22}+\lambda c_{23}=0,\ \lambda a_{12}+\lambda b_{22}+(\lambda+2\mu)c_{23}=-\frac{N_3}{a},\ a_{12}+b_{11}=0,$$
$$c_{23}+b_{33}=0,\ (\lambda+2\mu)a_{13}+\lambda b_{23}+\lambda c_{33}=\frac{12aD_3}{h^3}\ \lambda a_{13}+(\lambda+2\mu)b_{23}+\lambda c_{33}=\frac{12aD_3}{h^3},$$
$$\lambda a_{13}+\lambda b_{23}+(\lambda+2\mu)c_{33}=0,\ a_{13}+c_{11}=0,\ b_{23}+c_{22}=0,\ a^2(a_{23}+c_{12})+ \tag{19}$$
$$+\frac{h^2}{3}(a_{23}+b_{13})=-N_2a^2,\ a^2(b_{13}+c_{12})+\frac{h^2}{3}(a_{23}+b_{13})=N_2a^2,\ 2c_{12}+a_{23}+b_{13}=0.$$

Розв'язком систем лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь (18) і (19) будуть величини

$$u_{11}=s+t,\quad u_{22}=s-t,\quad u_{33}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\Big(N_0+\frac{N_3}{\pi a^2}\Big)-\frac{3N_3(\lambda+2\mu)}{4\pi B}(\beta+5h^2\lambda)-$$
$$-\frac{5ah}{2B}\Big[a^2(5\lambda^2+14\lambda\mu+12\mu^2)+h^2\lambda(\lambda+2\mu)\Big]D-\frac{a\lambda}{h\mu(3\lambda+2\mu)}D_2,$$
$$x_{11}=-\frac{N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}+\frac{3\beta}{B}\Big]-3q,\quad y_{22}=\frac{N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}-\frac{3\beta}{B}\Big]-3q,$$
$$x_{21}=\frac{3N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}-\frac{\beta}{B}\Big]-q,\quad y_{12}=-\frac{3N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\Big]-q,$$
$$x_{31}=-\frac{45N_3}{2\pi}\Big[\frac{\lambda+\mu}{A}+\frac{(\lambda+2\mu)^2}{B}\Big]-p,\quad y_{32}=\frac{45N_3}{2\pi}\Big[\frac{\lambda+\mu}{A}-\frac{(\lambda+2\mu)^2}{B}\Big]-p,$$
$$z_{13}=\frac{3N_3}{2\pi a^2}\Big[\frac{\alpha(\lambda+\mu)}{A}+\frac{\beta(\lambda+2\mu)}{B}\Big]+\frac{15ah(\lambda+2\mu)^2}{B}D, \tag{20}$$
$$z_{23}=\frac{3N_3}{2\pi a^2}\Big[\frac{\alpha(\lambda+\mu)}{A}-\frac{\beta(\lambda+2\mu)}{B}\Big]+\frac{15ah(\lambda+2\mu)^2}{B}D,$$
$$z_{33}=\frac{15N_3\lambda(\lambda+2\mu)}{\pi B}+\frac{30a\lambda}{Bh}\Big[2(\lambda+\mu)a^2+(\lambda+2\mu)h^2\Big]D,$$
$$a_{11}=-a_{22}=b_{12}=-\frac{\lambda N_1}{2(3\lambda+2\mu)},\quad a_{33}=-c_{13}=-\frac{N_1(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu},$$
$$a_{12}=-b_{11}=b_{22}=\frac{\lambda N_3}{a\mu(3\lambda+2\mu)},\quad a_{23}=-b_{13}=-N_2,$$
$$a_{13}=b_{23}=-c_{11}=-c_{22}=\frac{6D_3a(\lambda+2\mu)}{h^3\mu(3\lambda+2\mu)},\quad c_{12}=0,$$
$$b_{33}=-c_{23}=\frac{2N_3(\lambda+\mu)}{a\mu(3\lambda+2\mu)},\quad c_{33}=-\frac{12D_3a\lambda}{h^3\mu(3\lambda+2\mu)},$$

де

$$
\begin{aligned}
s =&\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Big(N_0+\frac{N_3}{\pi a^2}\Big)+\frac{3N_3}{8\pi B}\Big[\lambda\beta+5h^2(\lambda+2\mu)^2\Big]+\\
&+\frac{5ah(\lambda+2\mu)}{4B}\times\Big[(5\lambda+2\mu)a^2+(\lambda+2\mu)h^2\Big]D+\frac{a(\lambda+2\mu)}{2\mu h(3\lambda+2\mu)}D_2,\\
t =&\frac{15h^2N_3(\lambda+\mu)}{8\pi A},\qquad q=\frac{15ah\lambda(\lambda+2\mu)}{4B}D,\\
p =&\frac{15a(\lambda+2\mu)}{Bh}\Big[2(\lambda+\mu)a^2+(\lambda+2\mu)h^2\Big]D,\ D=D_2-\frac{12}{h^2}D_4.\\
\alpha =&15a^2+2h^2,\qquad \beta=15a^2(\lambda+2\mu)+2h^2(3\lambda+2\mu),\\
A =&\mu\big[15a^4(3\lambda+2\mu)+2a^2h^2(3\lambda+2\mu)+2h^4(\lambda+\mu)\big],\\
B =&2\mu\big[15a^4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)+2a^2h^2(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)+h^4(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)\big].
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Якщо врахувати позначення (16), (17), то, з точністю до доданків, які визначають переміщення циліндра як абсолютно твердого тіла, формула (13) для сформульованої задачі набуде вигляду

$$
\begin{aligned}
\vec{u} =& \Big[u_{11}\xi^1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}a_{ii}\xi^{i^2}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}a_{ij}\xi^i\xi^j+x_{11}\xi^{1^3}+x_{21}\xi^1\xi^{2^2}+x_{31}\xi^1\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_1^0+\\
&+\Big[u_{22}\xi^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}b_{ii}\xi^{i^2}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}b_{ij}\xi^i\xi^j+y_{12}\xi^{1^2}\xi^2+y_{22}\xi^{2^3}+y_{32}\xi^2\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_2^0+\\
&+\Big[u_{33}\xi^3+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}c_{ii}\xi^{i^2}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}c_{ij}\xi^i\xi^j+z_{13}\xi^{1^2}\xi^3+z_{23}\xi^{2^2}\xi^3+z_{33}\xi^{3^3}\Big]\vec{\ni}_3^0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Тепер можна знайти тензор деформації у всіх точках тіла K

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_0 =& \frac{1}{2}(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}+\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^T)=\\
=&\Big[u_{11}+2a_{11}\xi^1+a_{12}\xi^2+a_{13}\xi^3+3x_{11}\xi^{1^2}+x_{21}\xi^{2^2}+x_{31}\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_1^0\otimes\vec{\ni}_1^0+\\
&+\Big[u_{22}+2a_{11}\xi^1+a_{12}\xi^2+a_{13}\xi^3+y_{12}\xi^{1^2}+3y_{22}\xi^{2^2}+y_{32}\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_2^0\otimes\vec{\ni}_2^0+\\
&+\Big[u_{33}+c_{13}\xi^1+c_{23}\xi^2+2c_{33}\xi^3+z_{13}\xi^{1^2}+z_{23}\xi^{2^2}+3z_{33}\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_3^0\otimes\vec{\ni}_3^0+\\
&+(x_{21}+y_{12})\xi^1\xi^2(\vec{\ni}_1^0\otimes\vec{\ni}_2^0+\vec{\ni}_2^0\otimes\vec{\ni}_1^0)+\\
&+\frac{1}{2}\Big[-N_2\xi^2+2(x_{31}+z_{13})\xi^1\xi^3\Big](\vec{\ni}_1^0\otimes\vec{\ni}_3^0+\vec{\ni}_3^0\otimes\vec{\ni}_1^0)+\\
&+\frac{1}{2}\Big[N_2\xi^1+2(y_{32}+z_{23})\xi^2\xi^3\Big](\vec{\ni}_2^0\otimes\vec{\ni}_3^0+\vec{\ni}_3^0\otimes\vec{\ni}_2^0)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

і відповідний тензор напружень

$$\widehat{P} = \lambda\mathcal{I}_1(\widehat{\varepsilon}_0)\widehat{I} + 2\mu\widehat{\varepsilon}_0 =$$
$$= \Big\{(\lambda+2\mu)u_{11} + \lambda(u_{22}+u_{33}) + \Big[(\lambda+2\mu)2a_{11} + \lambda(2a_{11}+c_{13})\Big]\xi^1 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{12}+$$
$$+ \lambda(a_{12}+c_{23})\Big]\xi^2 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{13} + \lambda(a_{13}+2c_{33})\Big]\xi^3 + \Big[(\lambda+2\mu)3x_{11} + \lambda(y_{12}+z_{13})\Big]\xi^{1^2}+$$
$$+ \Big[(\lambda+2\mu)x_{21} + \lambda(3y_{22}+z_{23})\Big]\xi^{2^2} + \Big[(\lambda+2\mu)x_{31} + \lambda(y_{32}+3z_{33})\Big]\xi^{3^2}\Big\}\vec{\ni}_1^0 \otimes \vec{\ni}_1^0+$$
$$+ \Big\{(\lambda+2\mu)u_{22} + \lambda(u_{11}+u_{33}) + \Big[(\lambda+2\mu)2a_{11} + \lambda(2a_{11}+c_{13})\Big]\xi^1 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{12}+$$
$$+ \lambda(a_{12}+c_{23})\Big]\xi^2 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{13} + \lambda(a_{13}+2c_{33})\Big]\xi^3 + \Big[(\lambda+2\mu)y_{12} + \lambda(3x_{11}+z_{13})\Big]\xi^{1^2}+$$
$$+ \Big[(\lambda+2\mu)3y_{22} + \lambda(x_{21}+z_{23})\Big]\xi^{2^2} + \Big[(\lambda+2\mu)y_{32} + \lambda(x_{31}+3z_{33})\Big]\xi^{3^2}\Big\}\vec{\ni}_2^0 \otimes \vec{\ni}_2^0+$$
$$+ \Big\{(\lambda+2\mu)u_{33} + \lambda(u_{11}+u_{22}) + \Big[(\lambda+2\mu)c_{13} + 4a_{11}\lambda\Big]\xi^1 + \Big[(\lambda+2\mu)c_{23} + 2a_{12}\lambda\Big]\xi^2+$$
$$+ \Big[(\lambda+2\mu)2c_{33} + 2a_{13}\lambda\Big]\xi^3 + \Big[(\lambda+2\mu)z_{13} + \lambda(3x_{11}+y_{12})\Big]\xi^{1^2}+$$
$$+ \Big[(\lambda+2\mu)z_{23} + \lambda(x_{21}+3y_{22})\Big]\xi^{2^2} + \Big[(\lambda+2\mu)3z_{33} + \lambda(x_{31}+y_{32})\Big]\xi^{3^2}\Big\}\vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0+$$
$$+ 2\mu(x_{21}+y_{12})\xi^1\xi^2(\vec{\ni}_1^0 \otimes \vec{\ni}_2^0 + \vec{\ni}_2^0 \otimes \vec{\ni}_1^0) + \mu\Big[-N_2\xi^2 + 2(x_{31}+z_{13})\xi^1\xi^3\Big]\times$$
$$\times (\vec{\ni}_1^0 \otimes \vec{\ni}_3^0 + \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_1^0) + \mu\Big[N_2\xi^1 + 2(y_{32}+z_{23})\xi^2\xi^3\Big](\vec{\ni}_2^0 \otimes \vec{\ni}_3^0 + \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_2^0). \qquad (24)$$

Висновки

Як часткові випадки з формул (23) і (24) можна отримати відомі в літературі [2,3] точні розв'язки класичних задач стиску рівномірно розподіленими силами, згину та кручення вільного від силових навантажень на бічній поверхні прямого кругового циліндра. Як легко зауважити з (20), (21), точний розв'язок задачі про стиск ($N_1 = N_2 = N_3 = 0, F(\xi^3) = 0$) отримаємо, якщо у формулі (2) покладемо $N = 2$ і розв'яжемо тензорне рівняння

$$\widehat{u}^{(2)^T} \cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(2+2)} = \widehat{F}_1^{(2)}.$$

Напружено-деформівний стан тіла K при цьому буде однорідним. Розв'язок задачі про згин або кручення циліндра ($N_0 = N_2 = N_3 = 0, F(\xi^3) = 0$ або $N_0 = N_1 = N_3 = 0, F(\xi^3) = 0$ відповідно) отримаємо, якщо у формулі (2) покладемо $N = 3$ і розв'яжемо тензорне рівняння

$$\widehat{u}^{(3)^T} \cdot\cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(3+3)} = \widehat{F}_1^{(3)}.$$

Напружено-деформівний стан тіла K при цьому буде неоднорідним. Тензори напруження та деформації будуть лінійними функціями просторових координат.

Зосереджене поверхневе навантаження та навантаження, прикладене до бічної поверхні, викликають у тілі складний напружено-деформівний стан. Знайдений нами наближений розв'язок (23), (24) є квадратичною функцією просторових координат. Уточнення цього розв'язку пов'язане з необхідністю розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь вищого порядку.

Формули (23), (24) дають наближені розв'язки цілого класу задач про напружено-деформівний стан стиснутого по бічній поверхні кругового циліндра залежно від конкретизації функції $F(\xi^3)$. Зокрема, якщо $F(\xi^3) = -N_4$, то у формулах (20), (21) $D_2 = -N_4 h$, $D_3 = D_4 = 0$; якщо $F(\xi^3) = -N_4|\xi^3|$, то $D_2 = -N_4 h^2/4$, $D_3 = 0$, $D_4 = -N_4 h^4/32$; якщо $F(\xi^3) = -N_4 \xi^3$, то $D_2 = D_4 = 0$, $D_3 = -N_4 h^3/12$ (розв'язок відповідної задачі збігається з наведеним в [2]); якщо $F(\xi^3) = -N_4\Big[\delta(\xi^3 - h/2) + \delta(\xi^3 + h/2)\Big]$, то $D_2 = -2N_4$, $D_3 = 0$, $D_4 = -N_4 h^2/2$ (у всіх випадках $N_4 = \text{const}$).

Конкретизацію функції $F(\xi^3)$ можна використати для того, щоб будувати наближені розв'язки задач у випадку задання на частині поверхні ∂X_0 компонент вектора переміщення.

Якщо при дослідженні стійкості рівноваги циліндра за базовий вибирати розв'язок (23), (24), то свободу вибору функції $F(\xi^3)$ можна використати для підвищення параметрів стійкості.

1. Вус І.Я., Доманський П.П. Математична модель просторового руху пружних тіл // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.- матем. – Вип. 45 – с. 154-161.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука. – 1980. – 512 с.
3. Тимошенко С.Г., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.1997