УДК 539.3

ПРО ЗГИН БАЛКИ З ЕЛІПТИЧНОЮ ЗАПРЕСОВКОЮ

Р. М. Луцишин

Lutsyshyn R.M. About the curving of a beam with a pressed elliptical disk. The work is devoted to researching of deform-strained station of a beam loaded by curving moments. An elliptical disk of the same material loaded by twisting moments is pressed in circular hole of the beam. The disk is in limit balance station under the twisting moments and frictional forces action. The task came to the determination of the strained functions and convenient engineering calculation formulas for analyzing of strained states along the contact line.

Нехай в круговий отвір радіуса R безмежної ізотропної балки (смуги), що згинається моментом M, запресоване еліптичне ядро з того ж матеріалу. Ексцентриситет еліпса вважатимемо малим, а його параметри такими, щоб в процесі деформації відбувався повний контакт деталей конструкції. У центрі запресовки прикладена зосереджена пара, момент якої m визначається з умови граничної рівноваги ядра під дією сил тертя

$$m = -R^2 \int_0^{2\pi} \tau_{r\phi} d\phi = -kR^2 \int_0^{2\pi} \sigma_r d\phi, \tag{1}$$

де k – коефіцієнт тертя.

Виберемо початок координат в центрі запресовки, вісь OY спрямуємо вздовж осі балки, вісь OX – вздовж лінії поперечного її перерізу, півосі еліпса – a і b, причому велика піввісь еліпса утворює з віссю OX кут δ.

Потрібно визначити функції напружень в даній конструкції, проаналізувати напружений стан вздовж лінії контакту деталей та умови їх повного контакту. Перетворенням $\zeta = Rz$ приведемо межу отвору в балці до кола γ одиничного радіуса в площині z. Півосі еліпса в площині z матимуть розміри $\frac{a}{R}$ і $\frac{b}{R}$.

Сформулюємо контактну умову для радіальних переміщень контурів деталей. Для цього знайдемо віддаль точки еліпса від його центра та скористаємось наближенням квадратного кореня за допомогою біноміального ряду

$$\triangle = \frac{\sqrt{A}}{2R}\sqrt{1+\frac{B}{A}\Big(\Big(\frac{t}{e^{i\delta}}\Big)^2+\Big(\frac{e^{i\delta}}{t}\Big)^2\Big)} \approx \frac{\sqrt{A}}{2R}\Big(1+\frac{B}{2A}\Big(\Big(\frac{t}{e^{i\delta}}\Big)^2+\Big(\frac{e^{i\delta}}{t}\Big)^2\Big)\Big), \tag{2}$$

де $A = (a-b)^2 + (a+b)^2 \cos^2 2\delta$, $B = a^2 - b^2$, $t \in \gamma$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73K05.

Тоді умова контакту деталей набуде вигляду

$$v_r^+ - v_r^- = -\alpha + \beta\Big(\Big(\frac{t}{e^{i\delta}}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{i\delta}}{t}\Big)^2\Big),\ \alpha = \frac{\sqrt{A}-2R}{2R},\ \beta = \frac{B}{4\sqrt{A}}. \tag{3}$$

Тут і надалі знак "+" означає, що величина відноситься до краю ядра, "−" – до краю отвору в балці.

Використовуючи впроваджені в [1] функції напружень, задача про напружено-деформівний стан конструкції зводиться до таких задач лінійного спряження

$$\Big[F(t)+H(t)\Big]^+ + \Big[F(t)+H(t)\Big]^- = 2f(t),\ \Big[F(t)-H(t)\Big]^+ - \Big[F(t)-H(t)\Big]^- = 0, \tag{4}$$

де $f(t) = \frac{1+ik}{t}R\int \sigma_r(t)dt, \sigma_r(t)$ - шукане контактне напруження. Розв'язок (4) з врахуванням навантажень, що діють на конструкцію, має вигляд

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} - A_1 + \frac{im}{2\pi R},\ |z|<1, \\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} + \frac{MR}{8I}(z - \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z}),\ |z|>1; \end{cases} \tag{5}$$

$$H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{MR}{8I}(z - \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z}),\ |z|<1, \\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} + A_1 - \frac{im}{2\pi R},\ |z|>1; \end{cases}$$

Тут I – момент інерції поперечного перерізу балки,

$$A_1 = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t} + \frac{im}{4\pi R}. \tag{6}$$

Різниця переміщень країв деталей зображається через функції напружень так

$$2\mu\Big[(v_r+iv_\phi)^+ - (v_r+iv_\phi)^-\Big] = \kappa\Big(F^+(\sigma) - F^-(\sigma)\Big) - \Big(H^+(\sigma) - H^-(\sigma)\Big),\ \sigma\in\gamma. \tag{7}$$

Задовольняючи умову контакту (4) функціями напружень (5), приходимо до такого сингулярного інтегрального рівняння стосовно шуканої функції $f(t)$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t) - \frac{\sigma}{t}\bar{f}(\bar{t})}{t-\sigma}dt - 2A_1 + \frac{4\mu}{\kappa+1}\Big(\alpha + \beta\Big(\Big(\frac{\sigma}{e^{i\delta}}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{i\delta}}{\sigma}\Big)^2\Big) -$$

$$-\frac{MR}{8I}\left(\sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} - 3\sigma - \frac{3}{\sigma}\right) = 0,\quad \sigma\in\gamma. \tag{8}$$

Формула обертання цього рівняння має вигляд

$$f(\sigma) - \bar{f}(\bar{\sigma}) = 2D + \frac{4\mu\beta}{\kappa+1}\left(\left(\frac{e^{i\delta}}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{e^{i\delta}}\right)^2\right) + -\frac{MR}{8I}\left(\sigma^3 - \frac{1}{\sigma^3} + 3\sigma - \frac{3}{\sigma}\right), \quad (9)$$

$$D = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t}dt - A_1 + \frac{2\mu\alpha}{\kappa+1}.$$

Тоді, врахувавши вираз $f(t) = \frac{1+ik}{t}\int \sigma_r(t)dt$, приходимо до рівняння для знаходження контактного напруження

$$\frac{1+ik}{t}\int \sigma_r(t)dt + (1+ik)t\int \frac{\sigma_r(t)}{t^2}dt =$$
$$= \frac{2D}{R} + \frac{4\mu\beta}{(\kappa+1)R}\left(\left(\frac{e^{i\delta}}{t}\right)^2 - \left(\frac{t}{e^{i\delta}}\right)^2\right) + \frac{MR}{8I}\left(t^3 - \frac{1}{t^3} + 3t - \frac{3}{t}\right). \quad (10)$$

Розв'язок цього рівняння визначає шукане контактне напруження і пов'язану з ним функцію $f(t)$

$$\sigma_r(t) = \frac{D}{ikR} - \frac{6\mu\beta}{(\kappa+1)R}\left(\frac{e^{2i\delta}}{(2+ik)t^2} + \frac{t^2}{e^{2i\delta}(2-ik)}\right) + \frac{MR}{2I}\left(\frac{t^3}{3-ik} + \frac{1}{(3+ik)t^3}\right), \quad (11)$$

$$f(t) = (1+ik)\left[\frac{4\mu}{\kappa+1}\left(\frac{\beta}{2}\left(\frac{3e^{2i\delta}}{(2+ik)t^2} - \frac{t^2}{e^{2i\delta}(2-ik)}\right) - \alpha\right) + \frac{MR}{4I}\left(\frac{t^3}{2(3-ik)} - \frac{1}{(3+ik)t^2}\right)\right].$$

Підставляючи (11) в (5), отримуємо вирази для функцій напружень, що розв'язує, в принципі, поставлену задачу.

На підставі отриманого розв'язку можна проаналізувати напружений стан вздовж лінії контакту

$$\sigma_r(\phi) = \frac{MR}{(9+k^2)I}(3\cos 3\phi - k\sin 3\phi) - \frac{4\mu}{\kappa+1}(\alpha +$$
$$+ \frac{3\beta}{4+k^2}((2\cos 2\delta + k\sin 2\delta)\cos 2\phi + (2\sin 2\delta - k\cos 2\delta)\sin 2\phi)), \quad (12)$$
$$\sigma_\phi(\phi)^+ = \frac{MR}{(9+k^2)I}((3-2k^2)\cos 3\phi - 7k\sin 3\phi) -$$
$$- \frac{4\mu}{\kappa+1}\Big(\alpha + \frac{3\beta}{4+k^2}((2(1-k^2)\cos 2\delta + 5k\sin 2\delta)\cos 2\phi +$$
$$+ (2(1-k^2)\sin 2\delta - 5k\cos 2\delta)\sin 2\phi)\Big),$$
$$\sigma_\phi(\phi)^- = \frac{MR}{(9+k^2)I}((3+2k^2)\cos 3\phi + 5k\sin 3\phi) +$$
$$+ \frac{4\mu}{\kappa+1}\Big(\alpha - \frac{3\beta}{4+k^2}((2(1+k^2)\cos 2\delta - 3k\sin 2\delta)\cos 2\phi +$$
$$+ (2(1+k^2)\sin 2\delta + 3k\cos 2\delta)\sin 2\phi)\Big).$$

Умова повного контакту $\sigma_r(\phi) \leqslant 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$. У випадку $\delta = 0$ (симетричне розміщення ядра) ця умова набуває вигляду

$$\frac{MR}{(9+k^2)I}(3\cos 3\phi - k\sin 3\phi) \leqslant \frac{4\mu}{\kappa+1}\left(\alpha + \frac{3\beta}{4+k^2}(2\cos 2\phi - k\sin 2\phi)\right) \qquad (13)$$

Перевірку треба здійснювати в стаціонарних точках ϕ^*, які є розв'язками рівняння

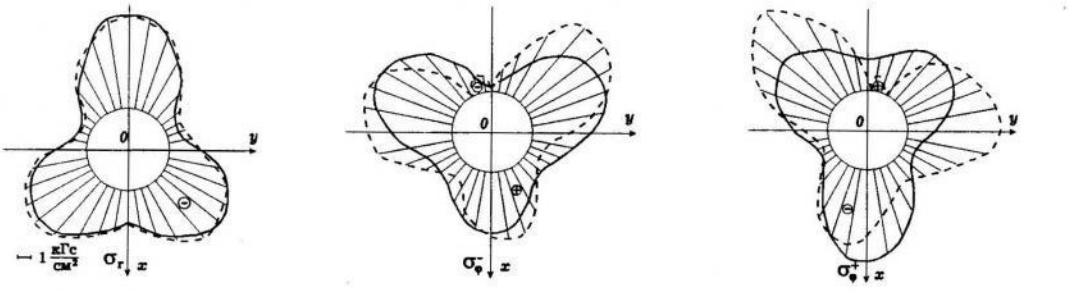
$$\frac{8\mu\beta}{(4+k^2)(\kappa+1)}(2\sin 2\phi + k\cos 2\phi) = \frac{MR}{(9+k^2)I}(3\sin 3\phi + k\cos 3\phi). \qquad (14)$$

У випадку відсутності тертя ($k = 0$) стаціонарні точки шукаються за формулами

$$\phi^*_{\pm} = \arccos\left(\frac{2\mu\beta I}{MR(\kappa+1)}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{M^2R^2(\kappa+1)^2}{4\mu^2\beta^2 I^2}}\right)\right),$$

причому максимальне значення функції $\sigma_r(\phi)$ легко знайти шляхом порівняння значень цієї функції у точках ϕ^*_+ і ϕ^*_-.

Як приклад, розглянемо випадок симетричного розміщення диска відносно осей балки ($\delta = 0$). Пружні властивості матеріалу $\mu = 2 \times 10^6$ *кгс/см*^{2}, $k = 2$. Відношення згинаючого моменту, прикладеного до балки, до моменту інерції її поперечного перерізу $\dfrac{M}{I} = 18 \times 10^4$ *кгс/см*^{4}. Отвір у балці $R = 1$ см, півосі диска $a = 1,05$ см $b = 1,02$ см. При цих даних проведено аналіз напруженого стану вздовж лінії контакту, результати якого подані такими епюрами ($k = 0$ – суцільна лінія, $k = 0,5$ – штрихова лінія).



1. Гриліцький Д. В., Луцишин Р. М. Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов. – К., Вища школа, 1975.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.97