УДК 539.377

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

М. І. Бугрій

Bugriy M.I. The method of solving of axially-symmetric problems of optimization of the thermoelastic state of cylindric shells. Thermoelastic state of the thick-walled cylindric shells at their force loading and heating is considered. The mathematical formulation and the method of a solution of optimization problems are proposed. The energy functional of the shell elastic deformation is taken as the criterion of the optimization. The intensities of force loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. These functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type. The exact solution of optimization problem is built for the partial case of loading.

У даній праці зроблено математичну постановку і розглянуто схему розв'язування статичної задачі оптимізації про визначення осесиметричного температурного поля і поверхневого силового навантаження в скінченній циліндричній оболонці, які при певних умовах викликають оптимально низький рівень термопружного стану оболонки.

Нехай вільна на краях кругова ізотропна циліндрична оболонка сталої товщини $2h$, радіусом R, довжиною $2z_0$, віднесена до змішаної криволінійної системи координат (z, φ, γ) [1], перебуває під дією осесиметричного температурного поля $t(z, \gamma)$ і зовнішнього нормального поверхневого силового навантаження

$$f(z,\gamma) = \begin{cases} f_{3\gamma}^{(+)}(z), & \gamma = h, \quad -z_0 < z < z_0, \\ f_{3\gamma}^{(-)}(z), & \gamma = -h, \quad -z_0 < z < z_0. \end{cases} \tag{1}$$

Тоді у базові співвідношення для визначення відповідного осесиметричного термопружного стану оболонки входитимуть [2]:
співвідношення Коші

$$e_{zz}(z,\gamma) = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \; e_{\varphi\varphi}(z,\gamma) = \frac{u_\gamma}{R+\gamma}, \; e_{\gamma\gamma}(z,\gamma) = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma},$$
$$e_{z\gamma}(z,\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right), \; e_{z\varphi}(z,\gamma) \equiv 0, \; e_{\gamma\varphi}(z,\gamma) \equiv 0; \tag{2}$$

закон Гука в переміщеннях

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 73K40; Secondary 49R99.

$$\sigma_{zz}(z,\gamma) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\gamma z}(z,\gamma) = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right),\ \sigma_{\gamma\varphi}(z,\gamma) \equiv 0,\ \sigma_{z\varphi}(z,\gamma) \equiv 0; \tag{3}$$

рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{u_z}{R+\gamma}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{u_z}{(R+\gamma)^2}\right] = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\partial t}{\partial z}, \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \gamma} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial t}{\partial \gamma}$$

та рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{(R+\gamma)}\frac{\partial t}{\partial \gamma} + \frac{Q}{\lambda} = 0 \tag{5}$$

в області $(\Omega) = \{(z,\gamma) : -z_0 < z < z_0,\ -h < \gamma < h\}$, а також такі механічні

$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma(\pm z_0,\gamma)}{R+\gamma}\right) = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}t(\pm z_0,\gamma),$$
$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u_z(z,\pm h)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma(z,\pm h)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h)}{\partial \gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h)}{\partial z} + \frac{u_\gamma(z,\pm h)}{R\pm h}\right) = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}t(z,\pm h) +$$
$$+ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}f_{3\gamma}^{(\mp)}(z) \tag{6}$$

та теплові

$$\left[\frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm H(t - t_\gamma^{(\pm)})\right]\Bigg|_{\gamma=\pm h} = 0, \quad \left[\frac{\partial t}{\partial z} \pm H(t - t_z^{(\pm)})\right]\Bigg|_{z=\pm z_0} = 0, \tag{7}$$

граничні умови на межі $\gamma = \pm h$, $z = \pm z_0$ області (Ω).

Тут G — модуль зсуву; E — модуль пружності; ν — коефіцієнт Пуассона; α_t — коефіцієнт лінійного теплового розширення; λ — коефіцієнт теплопровідності; H — відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхні оболонки; $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ — відмінні від нуля компоненти вектора переміщень; $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$ — інтенсивність зовнішнього силового навантаження на поверхнях $\gamma = \pm h$ оболонки; $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$ — температура зовнішнього середовища на межі області (Ω); $Q(z,\gamma)$ — питома густина розподілу внутрішніх джерел тепла в області оболонки; $e_{zz}(z,\gamma)$, $e_{\varphi\varphi}(z,\gamma)$, $e_{\gamma\gamma}(z,\gamma)$, $e_{z\gamma}(z,\gamma)$ і $\sigma_{zz}(z,\gamma)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma)$, $\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma)$, $\sigma_{z\gamma}(z,\gamma)$ — відмінні від нуля компоненти тензора деформацій і напружень відповідно.

Наведені вище співвідношення (2) – (7) дозволяють однозначно визначити температурне поле $t(z,\gamma)$ і відповідний термопружний стан оболонки при заданому зовнішньому тепловому і силовому навантаженні, тобто при заданих функціях $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$, $Q(z,\gamma)$, $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$. Якщо ж ці функції прийняти за функції керування термопружним станом оболонки, то ми приходимо до розгляду відповідних задач оптимізації, розв'язування яких, як відомо [1], пов'язане з вибором критерію оптимізації і конкретизацією множини допустимих функцій.

Обмежимося розглядом задачі оптимізації, коли на функції $Q(z,\gamma)$, $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$ не накладаються додаткові умови. У такому формулювання співвідношення (5),(7) можна розглядати, як формули для визначення цих функцій при відомій температурі $t(z,\gamma)$, а функціями керування в задачі оптимізації стають функції розподілу температури $t(z,\gamma)$ і інтенсивності зовнішнього силового навантаження $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$.

За критерій оптимізації приймемо функціонал енергії пружної деформації оболонки [1]

$$W[u_z, u_\gamma] = \frac{\pi}{E} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-z_0}^{z_0} \left[\sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - 2\nu(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{zz}) + \right.$$
$$\left. + 2(1+\nu)\sigma_{\gamma z}^2\right](R+\gamma)\,dz\,d\gamma, \tag{8}$$

записаний через переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ за допомогою співвідношень (3).

Нехай функції керування термопружним станом оболонки задовольняють додаткові обмеження інтегрального типу

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z) P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+h)\,dz = B_m^{(1)},\ (m = \overline{0, m_0}),$$
$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z) P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)(R-h)\,dz = B_n^{(2)},\ (n = \overline{0, n_0}); \tag{9}$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} \int\limits_{-h}^{h} t(z,\gamma) P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right) P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz = T_{kl}, \quad (k = \overline{0, k_0}),\ (l = \overline{0, l_0}), \tag{10}$$

де $B_m^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, T_{kl} — задані параметри; $P_j(\cdot)$ — поліноми Лежандра.

Тепер задачу оптимізації термопружного стану оболонки сформулюємо так: серед функцій $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$, $t(z,\gamma)$, двічі неперервно диференційовних в області (Ω) і неперервно диференційовних на границі цієї області, знайти екстремалі функціоналу (8), які задовольняють умови (4),(6),(9),(10).

Сформульовану задачу на умовний екстремум розв'язуємо методами варіаційного числення з використанням множників Лагранжа [3]. Відшукання оптимальних розв'язків у цьому випадку зводиться до розв'язування двох незалежних задач

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial\gamma}+\frac{u_z^*}{R+\gamma}\right)+\frac{u_z^*}{(R+\gamma)^2}\right]=0,\\
\frac{\partial^2 u_\gamma^*}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z\partial\gamma}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)=0, \qquad (11)\\
\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{R+\gamma}\right)=0,\\
\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_z^*(z,\pm h)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*(z,\pm h)}{\partial z}=0,\\
u_\gamma^*(z,h)+Z_m^{(1)*}P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)=0,\ \ (m=\overline{0,m_0}),\\
u_\gamma^*(z,-h)+Z_n^{(2)*}P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)=0,\ \ (n=\overline{0,n_0}), \qquad (12)\\
G\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u_\gamma^*(z,h)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z^*(z,h)}{\partial z}+\frac{u_\gamma^*(z,h)}{(R+h)}\right)\right]P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)dz=\\
=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R+h)}B_m^{(1)},\ \ (m=\overline{0,m_0}),\\
G\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u_\gamma^*(z,-h)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z^*(z,-h)}{\partial z}+\frac{u_\gamma^*(z,-h)}{(R-h)}\right)\right]P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)dz=\\
=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R-h)}B_n^{(2)},\ \ (n=\overline{0,n_0}); \qquad (13)\\
\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}\right)+\frac{3}{4}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial v_z^*}{\partial\gamma}+\frac{v_z^*}{R+\gamma}\right)+\right.\\
\left.+\frac{v_z^*}{(R+\gamma)^2}\right]=\frac{1+\nu}{2(1-2\nu)}\Phi_{kl}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)\frac{d}{dz}P_l\left(\frac{z}{z_0}\right),\\
\frac{\partial^2 v_\gamma^*}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z\partial\gamma}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}\right)=\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\Phi_{kl}^*P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\frac{d}{d\gamma}P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right), \qquad (14)\\
\frac{\partial v_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial\gamma}+\frac{v_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{R+\gamma}\right)=\frac{(\pm1)^l(1+\nu)}{2(1-2\nu)}\Phi_{kl}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right),\\
\frac{\partial v_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial\gamma}+\frac{\partial v_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial v_z^*(z,\pm h)}{\partial\gamma}+\frac{\partial v_\gamma^*(z,\pm h)}{\partial z}=0,\\
\frac{\partial v_\gamma^*(z,\pm h)}{\partial\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z^*(z,\pm h)}{\partial z}+\frac{v_\gamma^*(z,\pm h)}{R\pm h}\right)=\frac{(\pm1)^k(1+\nu)}{2(1-2\nu)}\Phi_{kl}^*P_l\left(\frac{z}{z_0}\right), \qquad (15)
\end{gathered}
$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial v_z^*}{\partial z}+\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}+\Phi_{rs}^*P_r\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_s\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz=$$
$$=3\alpha_tT_{kl},\quad (k,r=\overline{0,k_0}),\ \ (l,s=\overline{0,l_0}) \tag{16}$$

стосовно множників Лагранжа $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, $Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$, Φ_{kl}^*, $(k=\overline{0,k_0})$, $(l=\overline{0,l_0})$ та допоміжних функцій $v_z^*(z,\gamma)$, $v_\gamma^*(z,\gamma)$, через які виражаються оптимальні переміщення

$$u_z(z,\gamma)=v_z^*(z,\gamma)+u_z^*(z,\gamma),\ \ u_\gamma(z,\gamma)=v_\gamma^*(z,\gamma)+u_\gamma^*(z,\gamma), \tag{17}$$

і температура

$$t(z,\gamma)=\frac{1}{3\alpha_t}\left[\frac{\partial v_z^*}{\partial z}+\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}+\Phi_{kl}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]. \tag{18}$$

Зауважимо, що у співвідношеннях (12),(14),(15) за індексами k, l, m, n, а у співвідношенні (16) — за індексами r, s проводиться підсумовування.

Розв'язавши задачі (11) — (13), (14) — (16), знайдемо функції $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, $v_z^*(z,\gamma)$, $v_\gamma^*(z,\gamma)$. Із співвідношень (17),(18) визначаємо переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ і температуру $t(z,\gamma)$, із співвідношень (2),(3) — оптимальний термопружний стан оболонки, а із співвідношень (6) — відповідне йому оптимальне поверхневе силове навантаження оболонки. Крім того, використавши співвідношення (5), (7), знайдемо функції $Q(z,\gamma)$, $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$, що характеризують умови нагріву оболонки, які відповідають оптимальному температурному полю $t(z,\gamma)$.

Зауважимо, що граничні задачі (11), (12) і (14), (15) за своєю структурою аналогічні осесиметричній граничній задачі термопружності в переміщеннях, розв'язок якої, як відомо, існує і він єдиний в класі гладких функцій. У цьому зв'язку легко показати [4], що існує єдиний розв'язок задачі оптимізації, яку розглядаємо, і цей розв'язок можна побудувати в замкненій формі. З цією метою розв'язок систем рівнянь (11), (14) стосовно функцій $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$ і $v_z^*(z,\gamma)$, $v_\gamma^*(z,\gamma)$ будемо шукати у вигляді

$$u_z^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i!}u_z^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{1,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)!},$$
$$u_\gamma^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i!}u_\gamma^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{3,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)!}; \tag{19}$$

$$v_z^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i!}v_z^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\psi_{1,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)!},$$
$$v_\gamma^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i!}v_\gamma^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\psi_{3,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)!}. \tag{20}$$

Тут $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $\psi_{1,s}(\gamma)$, $\psi_{3,s}(\gamma)$, $(s=\overline{1,i+1})$, – невідомі функції; $i=\max\{m_0,n_0\}-1$, а m_0, n_0 вказують на кількість інтегральних обмежень (9) в задачі оптимізації;

$$u_z^{*(0)}(z,\gamma)=C_3^*-\frac{2\nu z}{1-\nu}C_1^*,\ \ u_\gamma^{*(0)}(z,\gamma)=(R+\gamma)C_1^*+\frac{C_2^*}{(R+\gamma)},\tag{21}$$

$$v_z^{*(0)}(z,\gamma)=\tilde{C}_3^*+z\tilde{C}_1^*,\ \ v_\gamma^{*(0)}(z,\gamma)=(R+\gamma)\tilde{C}_1^*+\frac{\tilde{C}_2^*}{(R+\gamma)},\tag{22}$$

де C_1^*, C_2^*, C_3^*, $\tilde{C}_1^*$, $\tilde{C}_2^*$, $\tilde{C}_3^*$ — довільні сталі.

Підставляючи вирази (19), (20) в рівняння (11), (14) відповідно, отримуємо дві системи звичайних диференціальних рівнянь щодо невідомих функцій $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $\psi_{1,s}(\gamma)$, $\psi_{3,s}(\gamma)$, $(s=\overline{1,i+1})$. Набір довільних сталих, що отримується при розв'язуванні цих систем, а також сукупність множників Лагранжа $Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$, Φ_{kl}^*, $(k=\overline{0,k_0})$, $(l=\overline{0,l_0})$ дозволяють задовольнити граничні умови (12), (15), інтегральні умови (13) на поверхні оболонки, а також інтегральні умови (16) в області (Ω).

Запишемо загальний вигляд розв'язків систем (11), (14), наприклад, при $m_0=n_0=k_0=2$, $l_0=0$. У цьому випадку отримаємо, що

$$\begin{gathered}
u_z^*(z,\gamma)=C_1^*\left[\frac{2\nu}{1-\nu}\left(\frac{(z+z_0)^3}{3}-\frac{z(z+z_0)^2}{2}\right)-\frac{(z+z_0)(R+\gamma)^2}{2}-\right.\\
\left.-\frac{\nu z_0(R+\gamma)^2}{1-2\nu}\right]+C_3^*\left[\frac{(z+z_0)^2}{2}-\frac{(1-\nu)(R+\gamma)^2}{2(1-2\nu)}\right]+\\
+C_4^*(z+z_0)\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+(z+z_0)C_5^*-\frac{(R+\gamma)^2}{2(1-2\nu)}C_6^*+C_8^*\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+C_9^*,\\
u_\gamma^*(z,\gamma)=C_1^*\left[\frac{(R+\gamma)(z+z_0)^2}{2}+\frac{\nu(R+\gamma)^3}{8(1-\nu)}\right]+C_2^*\left[\frac{(z+z_0)^2}{2(R+\gamma)}-\right.\\
\left.-\frac{(1-2\nu)(R+\gamma)}{4(1-\nu)}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)\right]-\frac{(R+\gamma)C_4^*}{4(1-\nu)}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+\\
+(z+z_0)(R+\gamma)C_6^*+\frac{z+z_0}{R+\gamma}C_7^*+(R+\gamma)C_{10}^*+\frac{C_{11}^*}{R+\gamma};\\
v_z^*(z,\gamma)=\tilde{C}_1^*\left[\frac{z(z+z_0)^2}{2}-\frac{(z+z_0)^3}{3}+\frac{z_0(R+\gamma)^2}{3}-\frac{(z+z_0)(R+\gamma)^2}{2}\right]+\\
+\tilde{C}_3^*\left[\frac{(z+z_0)^2}{2}-\frac{(R+\gamma)^2}{3}\right]+\tilde{C}_4^*(z+z_0)\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+(z+z_0)\tilde{C}_5^*-\\
-\frac{(R+\gamma)^2}{6}\tilde{C}_6^*+\tilde{C}_8^*\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+\tilde{C}_9^*+\frac{z(1+\nu)}{2(1-2\nu)}\Phi_{00}^*,\\
v_\gamma^*(z,\gamma)=\tilde{C}_1^*\left[\frac{(R+\gamma)(z+z_0)^2}{2}-\frac{(R+\gamma)^3}{16}\right]+\tilde{C}_2^*\left[\frac{(z+z_0)^2}{2(R+\gamma)}-\right.\\
\left.-\frac{3(R+\gamma)}{8}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)\right]-\tilde{C}_4^*\frac{(R+\gamma)}{8}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+
\end{gathered}\tag{23}$$

$$+(z+z_0)(R+\gamma)\tilde{C}_6^* + \frac{z+z_0}{R+\gamma}\tilde{C}_7^* + (R+\gamma)\tilde{C}_{10}^* +$$
$$+\frac{\tilde{C}_{11}^*}{R+\gamma} + \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)}\left[\left(\frac{(R+\gamma)^2}{3h} - \frac{R(R+\gamma)}{2h}\right)\Phi_{10}^* +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3(R+\gamma)^3}{8h^2} - \frac{R(R+\gamma)^2}{h^2} + \frac{(3R^2-h^2)(R+\gamma)}{4h^2}\right)\Phi_{20}^*\right]. \qquad (24)$$

Використавши тепер (17), (18), знайдемо оптимальні переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ і температуру

$$t(z,\gamma) = \frac{1}{3\alpha_t}\left\{\tilde{C}_1^*\left[\frac{(z+z_0)(3z+z_0)}{2} - \frac{3(R+\gamma)^2}{4}\right] - \tilde{C}_2^*\left[\frac{3}{4}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + \frac{3}{8}\right] +\right.$$
$$+(z+z_0)\tilde{C}_3^* + \tilde{C}_5^* + \tilde{C}_4^*\left[\frac{3}{4}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) - \frac{1}{8}\right] + 2(z+z_0)\tilde{C}_6^* +$$
$$\left.+2\tilde{C}_{10}^* + \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^* + \frac{\gamma}{h}\Phi_{10}^* + \frac{3\gamma^2-h^2}{2h^2}\Phi_{20}^*\right]\right\}, \qquad (25)$$

Оптимальний термопружний стан оболонки описується функціями (2), (3). Відповідне йому поверхневе силове навантаження визначаємо із співвідношення (6), згідно з яким

$$f_{3\gamma}^{(\mp)}(z) = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left[\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h)}{\partial\gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h)}{\partial z} + \frac{u_\gamma(z,\pm h)}{R\pm h}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t(z,\pm h).$$

Крім того, співвідношення (5),(7) дозволяють визначити умови нагріву оболонки, що відповідають оптимальному температурному полю (25), а саме, питому потужність внутрішніх джерел тепла

$$Q(z,\gamma) = -\frac{\lambda(1-\nu)}{2\alpha_t h(1-2\nu)(R+\gamma)}\left[\Phi_{10}^* + \frac{3(R+2\gamma)}{h}\Phi_{20}^*\right],$$

температуру зовнішнього середовища

$$t_\gamma^{(\pm)}(z) = \frac{1}{3\alpha_t}\left\{\tilde{C}_1^*\left[\frac{(z+z_0)(3z+z_0)}{2} - \frac{3(R\pm h)^2}{4} \mp \frac{3(R\pm h)}{2H}\right] -\right.$$
$$-\frac{3\tilde{C}_2^*}{4}\left[\ln\left(1\pm\frac{h}{R}\right) \pm \frac{1}{H(R\pm h)} + \frac{1}{2}\right] + (z+z_0)\tilde{C}_3^* + \tilde{C}_5^* +$$
$$+\frac{3\tilde{C}_4^*}{4}\left[\ln\left(1\pm\frac{h}{R}\right) \pm \frac{1}{H(R\pm h)} - \frac{1}{6}\right] + 2(z+z_0)\tilde{C}_6^* + 2\tilde{C}_{10}^* +$$
$$\left.+\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^* \pm \left(1+\frac{1}{Hh}\right)\Phi_{10}^* + \left(1+\frac{3}{RH}\right)\right]\right\};$$

$$t_z^{(+)}(\gamma) = \frac{1}{3\alpha_t}\left\{\tilde{C}_1^*\left[4z_0^2 + \frac{5z_0}{H} - \frac{3(R+\gamma)^2}{4}\right] - \frac{3\tilde{C}_2^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + \frac{1}{2}\right] +\right.$$

$$+\left(2z_0+\frac{1}{H}\right)\tilde{C}_3^*+\frac{3\tilde{C}_4^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)-\frac{1}{6}\right]+\tilde{C}_5^*+2\left(2z_0+\frac{1}{H}\right)\tilde{C}_6^*+$$

$$+2\tilde{C}_{10}^*+\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^*+\frac{\gamma}{h}\Phi_{10}^*+\frac{3\gamma^2-h^2}{2h^2}\Phi_{02}^*\right]\Bigg\},$$

$$t_z^{(-)}(\gamma)=\frac{1}{3\alpha_t}\Bigg\{\tilde{C}_1^*\left[\frac{z_0}{H}-\frac{3(R+\gamma)^2}{4}\right]-\frac{3\tilde{C}_2^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+\frac{1}{2}\right]-$$

$$-\frac{\tilde{C}_3^*}{H}+\frac{3\tilde{C}_4^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)-\frac{1}{6}\right]+\tilde{C}_5^*-\frac{2}{H}\tilde{C}_6^*+$$

$$+2\tilde{C}_{10}^*+\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^*+\frac{\gamma}{h}\Phi_{10}^*+\frac{3\gamma^2-h^2}{2h^2}\Phi_{02}^*\right]\Bigg\}.$$

на бічних поверхнях оболонки при $\gamma=\pm h$ і на краях оболонки при $z=\pm z_0$. При цьому довільні сталі $\tilde{C}_i^*$ та сталі множники Лагранжа Φ_{kl}^* однозначно визначаються з граничних умов (15) та інтегральних умов (16), якщо параметри T_{00}, T_{10}, T_{20} з (16) пов'язані співвідношеннями

$$T_{10}=\frac{h[(1+\nu)(10z_0^2+30R^2+7h^2)+3(1-\nu)(5R^2-h^2)]}{15R(1+\nu)(2z_0^2+3R^2+2h^2)}T_{00},$$

$$T_{20}=\frac{(1+\nu)(4z_0^2+4R^2+h^2)+6(1-\nu)R^2}{2(1+\nu)(2z_0^2+3R^2+2h^2)}T_{00}-\frac{3R}{h}T_{10},$$

а довільні сталі C_i^* та сталі множники Лагранжа $Z_m^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$ з точністю до крайових ефектів принципу Сен-Венана однозначно визначаються з граничних умов (12) та інтегральних умов (13). Якщо ж у співвідношеннях (13) покласти $m_0=n_0=1$, то запропонована вище методика дозволяє побудувати точний розв'язок задачі (11) – (13).

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К.: Наукова думка, 1979. – 364 с.

2. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наукова думка, 1978. – 320 с.

3. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980. – 285 с.

4. Бугрій М.І. *Оптимізація схем силового навантаження та нагріву товстостінних термопружних оболонок* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. – 1997. – Вип. 47. – С.102-106.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.97