УДК 539.3

ПРО ВРАХУВАННЯ ІНЕРЦІЇ ДЕФОРМАЦІЇ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ТЕРМОМЕХАНІЦІ

Т. С. Нагірний

Nagirny T.S. On the consideration of stress inertia in generalized thermomechanics. With use of methods of nonequilibrium thermodynamics and continuum mechanics the new approach to describe thermomechanic processes in solids is proposed. One takes into account the stress inertia. The energy of motion is defined in space of mechanical and thermal impulses. In the correspondence with it the equations of total energy and motion are modified. As an example the vibration of a layer is studied.

При розрахунку параметрів надійності, міцності та довговічності елементів конструкцій та приладів, що перебувають в умовах інтенсивного зовнішнього навантаження, важливого значення набувають питання адекватності відповідних математичних моделей. Такі моделі мають, зокрема, відображати характер навантаження і в тому випадку, коли воно носить швидкісний характер, повинні враховувати інерційність усіх форм руху, що розглядаються в моделі.

У даній праці, використовуючи методи термодинаміки нерівноважних процесів та механіки суцільного середовища, запропоновано підхід до врахування інерційності деформаційного, механічного поступального та теплового рухів.

Розглянемо деформівне тверде тіло, яке перебуває під дією силового навантаження в умовах теплообміну із зовнішнім середовищем. За визначальні приймаємо процеси деформування та теплопровідності. Означимо питому внутрішню енергію U у просторі базових параметрів стану, за які приймемо ентропію S та тензор деформації $\hat{e}$, а питому енергію руху K у просторі імпульсів механічного поступального $\vec{k}_v$ та деформаційного $\hat{k}_e$ рухів, а також імпульсу потоку ентропії $\vec{k}_s$ [1-5]

$$U = U(S, \hat{e}), \quad K = K(\vec{k}_v, \vec{k}_s, \hat{k}_e; U), \quad K(0,0,0;U) = 0. \tag{1}$$

Тут параметрична залежність K від U відображає положення про те, що рух розглядається на базі рівноважного стану.

За параметри, спряжені до $S, \hat{e}$, приймаємо абсолютну температуру T та тензор напруження Коші $\hat{\sigma}$, а за параметри, спряжені до імпульсів $\vec{k}_v, \vec{k}_s, \hat{k}_e$, - відповідно $\vec{v}$ - вектор швидкості, $\vec{j}_s$ - вектор потоку ентропії та $\hat{\varepsilon}$ - тензор швидкості деформації.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A10.
Робота виконана при частковій фінансовій підтримці ФФД ДКНТП України

Згідно з означенням (1) та вибором базових і спряжених параметрів для лінійної частини приростів dU, dK приймемо [3,5]

$$dU = TdS + \hat{\sigma} : d\hat{e}, \qquad dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v + \vec{j}_s \cdot d\vec{k}_s + \hat{\varepsilon} : d\hat{k}_e. \tag{2}$$

Наслідком (2) є рівняння ситуації у вигляді

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \hat{e}}, \qquad \vec{v} = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_v}, \quad \vec{j}_s = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_s}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\partial K}{\partial \hat{k}_e}. \tag{3}$$

Рівняння (3) при заданих енергіях U, K дають явний вираз залежності спряжених параметрів стану $T, \hat{\sigma}$ від базових $S, \hat{e}$ та потоків $\vec{v}, \vec{j}_s, \hat{\varepsilon}$ від імпульсів $\vec{k}_v, \vec{k}_s, \hat{k}_e$.

Співвідношенням

$$L = K - \vec{v} \cdot \vec{k}_v - \vec{j}_s \cdot \vec{k}_s - \hat{\varepsilon} : \hat{k}_e \tag{4}$$

введемо у розгляд енергію руху L, означену в просторі потоків

$$L = L(\vec{v}, \vec{j}_s, \hat{\varepsilon}; U), \qquad L(0,0,0;U) = 0. \tag{5}$$

Для лінійної частини її приросту відповідно до (2), (4) справедлива така диференціальна 1-форма

$$dL = -\vec{k}_v \cdot d\vec{v} - \vec{k}_s \cdot d\vec{j}_s - \hat{k}_e : d\hat{\varepsilon}. \tag{6}$$

При потенціальному описі наслідком (6) є такі визначальні рівняння для імпульсів:

$$\vec{k}_v = -\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \qquad \vec{k}_s = -\frac{\partial L}{\partial \vec{j}_s}, \qquad \hat{k}_e = -\frac{\partial L}{\partial \hat{\varepsilon}}. \tag{7}$$

Введення у вираз для приросту енергії руху dK доданку $\hat{\varepsilon} : d\hat{k}_e$ модифікує рівняння балансу енергії E $(E = K + U)$. У локальній формі, в наближенні геометричної лінійності та при нехтуванні конвективною складовою похідної за часом τ, воно має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\hat{\sigma} + \frac{\partial \hat{k}_e}{\partial \tau} \right) \cdot \vec{v} - T\vec{j}_s \right]. \tag{8}$$

Тут $\vec{\nabla}$ - вектор-оператор Гамільтона.

Поряд з (8) термомеханічні процеси мають задовольняти рівнянню балансу ентропії

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \sigma_s, \tag{9}$$

де σ_s - виробництво ентропії, яке згідно з другим законом термодинаміки є невід'ємною величиною $(\sigma_s \geqslant 0)$.

Враховуючи (2), (3), (9), рівняння (8) перетворюємо до вигляду

$$\left(\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \right) \cdot \vec{v} + \left(\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T \right) \cdot \vec{j}_s + T\sigma_s = 0. \tag{10}$$

За умови недисипативності механічного руху на підставі даного рівняння запишемо

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \tag{11}$$

$$T\sigma_s = -\left(\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T\right) \cdot \vec{j}_s. \tag{12}$$

Якщо знехтувати імпульсом деформації ($\hat{k}_e = 0$), то рівняння (11) стає рівнянням балансу імпульсу механічного поступального руху класичної механіки деформівного твердого тіла.

Вираз для виробництва ентропії σ_s є базовим при формулюванні кінетичних рівнянь моделі. Якщо прийняти, що причиною виникнення термодинамічного потоку $\vec{j}_s$ є сила

$$-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T\right),$$

то згідно з теорією Онзагера, в лінійному наближенні для ізотропного тіла, отримуємо рівняння

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \lambda_s \vec{j}_s + \frac{\vec{\nabla} T}{T} = 0, \tag{13}$$

(λ_s - кінетичний коефіцієнт), яке можна трактувати як рівняння балансу імпульсу потоку ентропії.

Якщо залежність між імпульсом $\vec{k}_s$ та вектором потоку ентропії $\vec{j}_s$ прийняти лінійною

$$\vec{k}_s = d_s \vec{j}_s, \tag{14}$$

то рівняння (13) набуває вигляду

$$\frac{d_s}{T}\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} + b_s \vec{j}_s + \frac{\vec{\nabla} T}{T} = 0, \qquad b_s = \lambda_s + \frac{1}{T}\frac{\partial d_s}{\partial \tau}. \tag{15}$$

Зауважимо, що при $d_s = 0$ останнє рівняння є кінетичним рівнянням класичної термопружності.

Оскільки вектор потоку ентропії $\vec{j}_s$ пов'язаний з вектором теплового потоку $\vec{j}_q$ співвідношенням $\vec{j}_q = T\vec{j}_s$, то при

$$d_s = \frac{\tau_r T}{\lambda}, \qquad \lambda_s = \frac{1}{\lambda} \tag{16}$$

рівняння (15) можна перетворити до

$$\tau_r \frac{\partial \vec{j}_q}{\partial \tau} + \vec{j}_q + \lambda \vec{\nabla} T = 0, \tag{17}$$

де τ_r - час релаксації теплового потоку, який для металів має порядок $10^{-11}c$; λ - коефіцієнт теплопровідності. Рівняння (17) є одним з базових положень узагальненої термомеханіки [6-7] і носить назву узагальненого закону теплопровідності.

Дослідження змін, викликаних врахуванням інерції деформації при описі локальної ситуації порівняно з класичною моделлю термопружного тіла, проведемо за ізотермічних умов на прикладі пружного шару при динамічному навантаженні. У зв'язку з цим розглянемо шар (область $0 < x < l$) у прямокутній декартовій системі координат (x, y, z), поверхня $x = l$ якого нерухома, а на поверхні $x = 0$ задано перпендикулярні до неї переміщення за гармонічним законом з амплітудою u_a та частотою ω. Рівняння балансу механічних імпульсів (11) для лінійної залежності між $\hat{k}_e$ та $\hat{\varepsilon}$ набуває вигляду

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(u - d_e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{18}$$

де u - x-компонента вектора переміщення $\vec{u}$; c_1 - швидкість поздовжної хвилі у безмежному середовищі; d_e - стала матеріалу.

Для амплітуди $u(x)$ коливань шару $u(x, \tau) = u(x)\exp(i\omega\tau)$ з рівняння (18) та граничних умов

$$u(l, \tau) = 0, \qquad u(0, \tau) = u_a \exp(i\omega\tau)$$

отримуємо

$$u(x) = u_a \frac{\sin(k(l - x))}{\sin(kl)},$$

де $k^2 = \omega^2/(c_1^2 - d_e\omega^2)$. Бачимо, що врахування інерції деформації приводить до зміни власних частот ω_n коливань шару

$$\omega_n = \frac{\pi n c_1}{l}\left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} d_e\right)^{-1/2}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots .$$

З підвищенням порядку резонансу (значення n) вплив інерції деформації на власні частоти зростає. При цьому, при прямуванні n до безмежності ω_n прямує до величини $c_1/\sqrt{d_e}$, яка не залежить від товщини шару.

1. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.:Мир, 1973. - 280 с.
2. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. – М.:Мир, 1964. - 456 с.
3. Burak Ya., Nagirny T. *Mathematical modelling of the nonequilibrium processes in locally nonhomogeneous thermoelastic systems.* // Zeshutu naukowe politechniki Rzheshowskiej, Mechanika.-1996. -No.157, z.48, - P.21-28.
4. Burak Ya., Nagirny T. *Thermodynamical aspects of vibrational acceleration of nonequilibrium processes.* // XYI Symp. Vibration in Physical Systems, Poland, Poznan, 1994. Abstract.- P.26-28.
5. Бурак Я.И., Нагирный Т.С. *Математическое моделирование локально- градиентных процессов в инерционных термомеханических системах.* // Прикл. механика, 1992, т.28, N.12.-С.3-23.
6. Лыков А.И. Теория теплопроводности. - М.:Высшая школа, 1967.- 600 с.
7. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. - К.: Наукова думка, 1976.-312 с.

Стаття надійшла до редакції 12.05.1997