ISSN 0201 - 758X
ISSN 0320 - 6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 48

1997

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
VISNYK LVIVSKOHO UNIVERSYTETU
(HERALD OF LVIV UNIVERSITY)

Серія механіко-математична

Mathematics and Mechanics
Виходить з 1965 року

Issued from 1965

Випуск 48

Volume 48

ЛЬВІВ – 1997

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, теорії функцій комплексного змінного, теорії ймовірності, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, complex analysis, probability theory, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редколегії:

290602, Львів, вул. Університетська, 1, Львівський державний університет,
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93
E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics,
Lviv State University, Universytetska 1, Lviv, 290602

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX). Підписано до друку з оригінал-макета 25.11.97.
Зам. №97/10-29. Тир. 100. Папір друк. офсетний №1. Формат 84×108/16. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 15,46. Друк ТзОВ "Простір М", м. Львів.

ЗМІСТ

Видання цього випуску стало можливим завдяки сприянню
ТзОВ "ТЕХНІКА ДЛЯ БІЗНЕСУ" (м. Львів)

CONTENTS

УДК 519.48

СТРУКТУРА ДУО-КІЛЕЦЬ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ СКРУТАМИ ТА РЕГУЛЯРНІ КІЛЬЦЯ ЗІ СКІНЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ МАКСИМАЛЬНИХ ІДЕАЛІВ

І. Я. Тушницький

Tushnytskyi I. Ya. A structure of duo-rings with locally determined torsion theory and regular rings with the finite set of maximal ideals. In this note is shown that the regular duo-rings are rings with locally determined torsion theories. As consequences the structure of regular duo-rings with finite number of the maximal ideals is described.

Кільце називається дуо-кільцем, якщо в ньому кожний односторонній ідеал є двостороннім. Використовуватимемо такі позначення: R – дуо-кільце з $1 \neq 0$, $Id(R)$ – множина всіх його ідеалів, $\operatorname{mspec}(R)$ – множина всіх максимальних ідеалів, що містять I, $R_{\mathfrak{M}}$ – локалізація кільця R стосовно максимального ідеалу $\mathfrak{M}$, $J(R)$ – радикал Джекобсона кільця R.

Для кожного ідеалу I і будь-якого елемента $r \in R$ визначимо ідеал $I : r$ як множину $\{x \in R / xr \in I\}$.

Сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R називається напередрадикальним фільтром кільця R, якщо вона задовольняє таким умовам:

(T_1) $\forall I \in Id(R)\ \forall J \in \mathfrak{F} : J \subseteq I \Rightarrow I \in \mathfrak{F}$;

(T_2) $\forall I, J \in \mathfrak{F} : I \cap J \in \mathfrak{F}$;

(T_3) $\forall i \in \mathfrak{F}\ \forall r \in RI : r \in \mathfrak{F}$, [3].

Якщо виконується ще умова:

$(T4)$ $\forall I \in Id(R)\ \forall J \in \mathfrak{F}\ \forall j \in JI : j \in \mathfrak{F} \Rightarrow I \in \mathfrak{F}$

то сім'я $\mathfrak{F}$ називається радикальним фільтром кільця R [3].

Через $\mathcal{R}_0(R)$ позначимо сім'ю всіх ненульових ідеалів кільця R і їх скінченних добутків. Для первинних кілець $\mathcal{R}_0(R)$ – це сім'я всіх ненульових ідеалів кільця R, для непервинних кілець $\mathcal{R}_0(R)$ – це сім'я всіх, враховуючи і нульовий, ідеалів кільця R. Зауважимо, що якщо R – дуо-кільце, то сім'я $\mathcal{R}_0(R)$ утворює радикальний фільтр кільця R.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18E40.

Радикальний (напередрадикальний) фільтр назвемо ненульовим, якщо він складається лише з ідеалів, які належать $\mathcal{R}_0(R)$. Для первинних кілець це означає, що радикальний (напередрадикальний) фільтр не містить нульового ідеалу.

Через $\mathcal{F}(R)$ $(\mathcal{F}'(R))$ позначимо сім'ю всіх ненульових радикальних (напередрадикальних) фільтрів кільця R.

Означення 1. *Кільце R називається кільцем з локально визначеними скрутами (напередскрутами), якщо відображення*

$$\Phi : \mathcal{F}(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}})\ (\Phi' : \mathcal{F}'(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})),$$

визначене так

$$\Phi(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)}\ \ (\Phi'(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)})$$

для будь-якого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(R)$ $(\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R))$ є бієктивним [1], [5], [6], [7], [8].

Зауважимо, що в [1] відображення Φ було введено для комутативних областей цілісності. Позначимо через $\mathcal{B}(R)$ сім'ю всіх ідеалів кільця R, що містяться не більш ніж в скінченній кількості максимальних ідеалів кільця R.

Означення 2. *Кільце R називається h-локальним, якщо воно задовольняє такі умови:*

(i) кожний ненульовий первинний ідеал кільця R міститься в єдиному максимальному ідеалі;

(ii) кожний ненульовий елемент з R міститься не більш, ніж в скінченній кількості максимальних ідеалів [2] [5], [6], [7],[8].

Поняття h-локальності було введене Матлісом для комутативних областей [2]. Для кожного ідеалу I кільця R визначимо ідеал $K(I)$ кільця $R : K(I) = \{x \in R/I : x \in \mathcal{B}(R)\}$. Якщо a – деякий елемент кільця R, то через $K(a)$ позначимо $K(aR)$.

Означення 3. *Кільце R називається h-квазілокальним, якщо воно задовольняє умову (i) з означення 2, а також умову:*

(ii$'$) для кожного ненульового елемента a з R маємо $K(a) \in \mathcal{B}(R)$ [5], [6], [7], [8].

Зауважимо, що кожне h-локальне кільце є h-квазілокальним. Для дуо-кілець, що задовольняють умову

$$\forall \mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)\ \forall r \in R\ \forall d \notin \mathfrak{M} \exists d' \notin \mathfrak{M}\ \exists c \in R : rd' = drc, \tag{$*$}$$

справедливе таке твердження.

Твердження 1. *Кільце R є кільцем з локально визначеними скрутами (напередскрутами) тоді і тільки тоді, коли воно h-квазілокальне (h-локальне).*

Доведення можна знайти в праці [8]. Добре відомий такий факт.

Лема 1. *Якщо R – регулярне в сенсі Неймана кільце, то R – напівпросте за Джекобсоном [4].*

Покажемо, що регулярне в сенсі Неймана дуо-кільце задовольняє умову $(*)$. Для цього доведемо таку лему.

Лема 2. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і I – будь-який ідеал кільця R. Тоді, якщо $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T}$, то $I = \bigcap_{i\in T}\mathfrak{M}_i$.*

Зауваження. Якщо множина T одноелементна, наприклад, $T = \{j\}$, то перетин $I = \bigcap_{i\in T}\mathfrak{M}_i$ ми розуміємо як максимальний ідеал $\mathfrak{M}_j$. Якщо ж T порожня, то цей перетин ми розуміємо як все кільце R.

Доведення. Нехай I – будь-який ідеал кільця R і $\mathrm{mspec}(R/I) = \{\mathfrak{M}_i/I \mid i \in I\}$. Кільце R є регулярним, тому R/I є також регулярним, а за лемою 1 воно є півпростим, тобто $\bigcap_{i\in T}(\mathfrak{M}_i/I) = 0$. Оскільки $\bigcap_{i\in T}(\mathfrak{M}_i/I) = (\bigcap_{i\in T}\mathfrak{M}_i)/I$, то за лемою 1 $(\bigcap_{i\in T}\mathfrak{M}_i)/I = 0$. Отже, $\bigcap_{i\in T}\mathfrak{M}_i \subseteq I$. Включення $I \subseteq \bigcap_{i\in T}\mathfrak{M}_i$ випливає з умови $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T}$, тому $I = \bigcap_{i\in T}\mathfrak{M}_i$. Лему доведено.

Отже, в регулярному дуо-кільці кожний ідеал є перетином максимальних ідеалів.

Лема 3. *Нехай R – дуо-кільце, I, J – довільні ідеали кільця R, $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1}$, $V(J) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_2}$ для деяких множин K_1 і K_2. Тоді $V(IJ) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$.*

Доведення. Нехай I, J – деякі ідеали кільця R і $V(I) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1}$, $V(J) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_2}$. Очевидно, що $IJ \subseteq \bigcap_{i\in K_1\cup K_2}\mathfrak{M}_i$. Покажемо, що множину $K_1 \cup K_2$ не можна збільшити. Припустимо, що $IJ \subseteq \bigcap_{i\in L}\mathfrak{M}_i$, де L строго містить $K_1 \cup K_2$. Нехай $j \in L$, але $j \notin K_1 \cup K_2$. Тоді $IJ \subseteq \mathfrak{M}_j$. Оскільки $\mathfrak{M}_j$ максимальний, то він первинний. Але тоді $I \subseteq \mathfrak{M}_j$ або $J \subseteq \mathfrak{M}_j$, тобто $i \in K_1$ або $j \in K_2$, а це суперечить умові, що L строго містить $K_1 \cup K_2$. Отже, $V(IJ) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$.

Лема 4. *Регулярне дуо-кільце задовольняє умову (*).*

Доведення. Розглянемо довільні елементи r і d кільця R. Нехай $V(rR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1}$, $V(dR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_2}$ для деяких множин K_1 і K_2. Оскільки кільце R є дуо-кільцем, то $rdR = rRdR$. Тоді за лемою 3 $V(rdR) = V(rRdR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$. Аналогічно можна довести, що $V(drR) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in K_1\cup K_2}$. Звідси, за лемою 2, $rdR = drR$. З цієї рівності видно, що існує таке $c \in R$, що $rd = drc$. Лему доведено.

Лема 5. *Нехай R – регулярне дуо-кільце. Тоді кожний первинний ідеал кільця R є максимальним.*

Доведення. Нехай P – первинний ідеал і $a \notin P$. Тоді існує таке $x \in R$, що $axa = a$. Звідси $a(xa-1) = 0$ або $a(xa-1)R = 0$. Враховуючи, що R – дуо-кільце, маємо $(xa-1)R = R(xa-1)$. З цього випливає, що $aR(xa-1) = 0$. Ідеал P – первинний, тому $xa - 1 \in P$. Отже, $1 \in P + aR$, тобто $P + aR = R$ для будь-якого $a \in R\backslash P$. Таким чином, P – максимальний.

Лема 6. *Якщо сім'я ідеалів $\mathfrak{F} = \{J \in Id(R)/J \supseteq I\}$ є радикальним фільтром, то виконується рівність $I^2 = I$.*

Доведення. Розглянемо ідеал $I^2 : i$ для будь-якого $i \in I$. Згідно того, що $I^2 : i = \{x \in R/xi \in I^2\}$, маємо $I \subseteq I^2 : i$; $I \in \mathfrak{F}$, то з умови $T1$ випливає, що $I^2 : i \in \mathfrak{F}$. Але останній вираз має місце для будь-яких $i \in I$ та $I \in \mathfrak{F}$, тому за умовою $T4$ маємо $I^2 \in \mathfrak{F}$. Це означає, що $I \subseteq I^2$. Включення $I^2 \subseteq I$ випливає з того, що I є ідеалом кільця R. Отже, $I^2 = I$. Лему доведено.

Твердження 2. *Регулярне за Нейманом дуо-кільце R є h-локальним тоді і тільки тоді, коли* $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$.

Доведення. ($\Rightarrow$). Нехай R – h-локальне. Припустимо, що R не має дільників нуля. Оскільки R є регулярним за Нейманом, то за [4] воно є тілом і, отже, $\mathrm{mspec}(R) = \{0\}$. Тепер припустимо, що R має дільники нуля. Тоді з h-локальності випливає, що $V(0)$ – скінченна, тобто $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$.

($\Leftarrow$). На підставі леми 5 кожний первинний ідеал є максимальним і, крім того, $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$, тому кільце R є h-локальним.

Лему доведено.

Надалі будемо розглядати лише ті регулярні дуо-кільця, для яких $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$. Справедливе таке твердження.

Лема 8. *Нехай R регулярне дуо-кільце і* $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. *Тоді* $|\mathcal{F}'(R)| = 2^n$.

Доведення. Кільце R є дуо-кільцем, тому за лемою 4 воно задовольняє умову (*), а оскільки $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$, то R є h-локальним. Тоді за твердженням 1 кільце R є кільцем з локально визначеними скрутами. Це означає, що відображення

$$\Phi' : \mathcal{F}'(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}}),$$

задане формулою $\Phi(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)}$ для будь-якого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R)$, є бієктивним. Розглянемо канонічне відображення $f_{\mathfrak{M}} : R \longrightarrow R_{\mathfrak{M}}$, де $R_{\mathfrak{M}}$ – локалізація кільця R стосовно максимального ідеалу $\mathfrak{M}$. З означення кільця дробів маємо, що $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \{x \in R / \exists t \notin \mathfrak{M} : xt = 0\}$. Доведемо, що $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Спочатку встановимо включення $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$. Візьмемо $x \in R$ таке, що $xt = 0$ для деякого $t \notin \mathfrak{M}$. Зауважимо, що $xRt = 0$. Справді, $xtR = 0$. Оскільки R – дуо-кільце, то $tR = Rt$. Звідси, і з попередньоі рівності, $xRt = 0$. Ідеал $\mathfrak{M}$ первинний, $0 \subseteq \mathfrak{M}$ і $t \notin \mathfrak{M}$, тому $x \in \mathfrak{M}$. Включення доведено. Тепер покажемо, що $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}}$. Справді, нехай $x \in \mathfrak{M}$. Кільце R – регулярне, тому існує $x' \in R$ таке, що $xx'x = x$. Звідси $x(x'x - 1) = 0$. Оскільки $s \in \mathfrak{M}$, то $xx' - 1 \notin \mathfrak{M}$. Отже, для $x \in \mathfrak{M}$ існує таке $t = xx' - 1 \notin \mathfrak{M}$, що $xt = 0$. Включення доведене. З умови $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$ випливає, що $R_{\mathfrak{M}}$ є тілом. Справді, $R_{\mathfrak{M}}$ є локальним кільцем з єдиним максимальним ідеалом $\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}$. З того, що $\mathrm{Ker} f_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, маємо $\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}} = 0_{\mathfrak{M}}$, тобто $0_{\mathfrak{M}}$ є єдиним власним ідеалом кільця $R_{\mathfrak{M}}$. Отже, $R_{\mathfrak{M}}$ є тілом. Оскільки в $R_{\mathfrak{M}}$ є лише два ідеали $0_{\mathfrak{M}}$ і $R_{\mathfrak{M}}$, то $R_{\mathfrak{M}}$ має лише два напередрадикальних фільтри $\{0_{\mathfrak{M}}\}$ і $\{0_{\mathfrak{M}}, R_{\mathfrak{M}}\}$. Таким чином $|\prod_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})| = 2^n$. Вищезазначене відображення Φ' є бієктивним, тому $|\mathcal{F}'(R)| = |\prod_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})|$. Отже, $|\mathcal{F}'(R)| = 2^n$.

Лема 9. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і* $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$. *Тоді* $\mathcal{F}'(R) = \mathcal{F}(R)$, *тобто кожний напередрадикальний фільтр є радикальним.*

Доведення. Оскільки R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| < \infty$, то за лемою 7 кільце R є h-локальним. Як ми зауважили раніше, з h-локальності випливає h-квазілокальність. Тоді за твердженням 1 кільце R є кільцем з локально визначеними скрутами, тобто є бієктивним відображення $\Phi : \mathcal{F}(R) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)} \mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}})$, задане наступним чином $\Phi(\mathfrak{F}) =< \mathfrak{F}_{\mathfrak{M}} >_{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)}$ для будь-якого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(R)$. Оскільки $\{0_{\mathfrak{M}}\}$, $\{0_{\mathfrak{M}}, R_{\mathfrak{M}}\}$ є також радикальними фільтрами, то $\mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}}) = \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})$ для будь-якого $\mathfrak{M} \in \operatorname{mspec}(R)$. З цього факту, а також з бієктивності відображень Φ і Φ' випливає наступна низка рівностей: $|\mathcal{F}(R)| = |\prod_{\mathfrak{M}\in\operatorname{mspec}(R)} \mathcal{F}(R_{\mathfrak{M}})| = |\prod_{\mathfrak{M}\in\operatorname{mspec}(R)} \mathcal{F}'(R_{\mathfrak{M}})| = |\mathcal{F}'(R)|$. З включення $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{F}'(R)$ і $|\mathcal{F}(R)| = |\mathcal{F}'(R)|$, маємо $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}'(R)$, тобто кожний напередрадикальний фільтр є радикальним.

Наслідок. *Нехай R – дуо-кільце і $\operatorname{mspec}(R) < \infty$. Тоді R – регулярне тоді і тільки тоді, коли для будь-якого I з $Id(R)$ виконується рівність $I^2 = I$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай R – регулярне. Тоді за лемою 9 кожний напередрадикальний фільтр є радикальним. Для довільного ідеалу I розглянемо напередрадикальний фільтр $\mathfrak{F}_I = \{J \in Id(R)/I \subseteq J\}$. Оскільки $\mathfrak{F}_I$ є також радикальним фільтром, то за лемою 6 виконується рівність $I^2 = I$.

($\Leftarrow$) Нехай $I^2 = I$ для будь-якого $I \in Id(R)$. Тоді для будь-якого $a \in R$ маємо $aRaR = aR$. Оскільки R – дуо-кільце, то $aR = Ra$. З цієї і попередньої рівності маємо $aRa = aR$. Взявши в правій частині $1 \in R$ маємо, що існує $x \in R$ таке, що $axa = a$.

Доведення завершено.

Лема 10. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\operatorname{mspec}(R)| = n$. Тоді $|Id(R)| = 2^n$.*

Доведення. Розглянемо відображення $\phi : Id(R) \longrightarrow \mathcal{F}'(R)$, визначене наступним чином $\phi(I) = \mathfrak{F}_I$, де $I \in Id(R)$ і $\mathfrak{F}_I = \{J \in Id(R)/I \subseteq J\}$. Легко бачити, що воно є ін'єктивним, бо різним ідеалам відповідають різні напередрадикальні фільтри. Справді, нехай $I, J \in Id(R)$ і $\mathfrak{F}_I = \mathfrak{F}_J$. З включення $\mathfrak{F}_J \subseteq \mathfrak{F}_I$ випливає, що $I \in \mathfrak{F}_J$, а, отже, $J \subseteq I$. Аналогічно, з включення $\mathfrak{F}_J \subseteq \mathfrak{F}_I$ випливає, що $I \subseteq J$, тому $I = J$. Отже, множина ідеалів ізоморфна деякій підмножині напередрадикальних фільтрів. Покажемо, що відображення ϕ є сюр'єктивним, тобто, що для кожного $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R)$ існує ідеал I кільця R такий , що $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_I$. Нехай $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}'(R)$. Покладемо $I = \cap\{J/J \in \mathfrak{F}\}$. Оскільки $\mathfrak{F}$ скінченна, як підмножина скінченної множини $Id(R)$, то за умовою $T2$ з означення напередрадикального фільтру $I \in \mathfrak{F}$. Всі ідеали більші, ніж I, належать $\mathfrak{F}$ за умовою $T1$ з цього означення. Інших ідеалів в $\mathfrak{F}$ немає, бо I міститься в кожному ідеалі з $\mathfrak{F}$ як перетин всіх ідеалів з $\mathfrak{F}$. Таким чином, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_I$, і відображення ϕ є бієктивним. Звідси і з леми 8 випливає рівність $|Id(R)| = |\mathcal{F}'(R)| = 2^n$.

Нехай $\operatorname{mspec}(R) = \{\mathfrak{M}\}_{i\in K}$. Оскільки $|\operatorname{mspec}(R)| = n$, то $|K| = n$. Нехай 2^K – множина всіх підмножин множини K, $M(R)$ – множина, що складається з різних максимальних ідеалів кільця R, їх всеможливих перетинів, нульового ідеалу і кільця R. Розглянемо відображення $f : 2^K \longrightarrow M(R)$, задане так : $f(T) = \cap_{i\in T}\mathfrak{M}_i$, де $T \in 2_K$. Перетин тут розуміється як в зауваженні до леми 2. Відомо, що $|2^K| = 2^{|K|}$. З рівності $|K| = n$ маємо, що $|2^K| = 2^n$. Відображення f – сюр'єктивне, тому $|M(R)| \leqslant 2^n$. Відображення f ін'єктивне тоді і тільки тоді, коли $|M(R)| = 2^n$.

Отже, ми довели таку лему:

Лема 11. *Нехай R – кільце і $|\operatorname{mspec}(R)| = n$. Тоді відображення f – бієктивне тоді і тільки тоді, коли $|M(R)| = 2^n$.*

Лема 12. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\operatorname{mspec}(R)| < \infty$. Тоді має місце наступне твердження:*

(**) Кожний власний ідеал кільця R є або максимальним ідеалом або перетином максимальних ідеалів, причому перетини різних максимальних ідеалів різні.

Доведення. Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді за лемою 2 кожний ідеал кільця R є максимальним ідеалом або перетином максимальних ідеалів. Покажемо, що перетини різних максимальних ідеалів різні. Припустимо супротивне, тобто, що існують хоча б два однакові перетини різних максимальних ідеалів. Тоді відображення f не є бієктивним, а, отже, за лемою 11 $|M(R)| < n$. Оскільки $M(R) = Id(R)$, то ми отримали суперечність з лемою 10, яка говорить, що $|Id(R)| = 2^n$. Лему доведено.

Лема 13. *Нехай R – дуо-кільце, для якого виконується твердження (**). Тоді* $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i = \bigcap_{i\in T_1\cap T_2}\mathfrak{M}_i$.

Доведення. $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_k$, $\bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_k$, де k – будь-який елемент з $T_1\cap T_2$. Звідси $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_k$. Отже, $V(\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i) \supseteq \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T_1\cap T_2}$. Нехай $j \notin T_1\cap T_2$. Для визначеності $j\notin T_1$. Оскільки кільце задовольняє твердженню (**), то

$$\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i \neq \bigcap_{i\in T_1\cup\{j\}}\mathfrak{M}_i.$$

Звідси існує таке $t\in R$, що $t\in\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i$, але $t\notin\bigcap_{i\in T_1\cup\{j\}}\mathfrak{M}_i$. Отже, $t\notin\mathfrak{M}_j$ і $t\in \bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i$. Таким чином, $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i \not\subseteq \mathfrak{M}_j$ для будь-якого $j\notin T_1\cap T_2$. Тому $V(\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i) = \{\mathfrak{M}_i\}_{i\in T_1\cap T_2}$ і за лемою 2 $\bigcap_{i\in T_1}\mathfrak{M}_i + \bigcap_{i\in T_2}\mathfrak{M}_i = \bigcap_{i\in T_1\cap T_2}\mathfrak{M}_i$. Лему доведено.

Лема 14. *Нехай eR є мінімальним ідеалом кільця R. Тоді eR є тілом.*

Доведення. Припустимо, що в кільці eR є ненульовий власний ідеал J. Тоді $JR = JeR$ на підставі того, що e є одиницею кільця eR. Оскільки J є ідеалом кільця eR, то $JeR\subseteq J$, а, отже, $JR\subseteq J$. Звідси випливає, що множина J є ідеалом кільця R. Це суперечить мінімальності ідеала eR, оскільки J – власна підмножина в eR.

Лему доведено.

Лема 15. *Нехай R – дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді $R = F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n$, де F_i – тіло для кожного $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, тоді і тільки тоді, коли для кільця R виконується твердження (**).*

Доведення. ($\Rightarrow$) Твердження очевидне, бо $\mathrm{mspec}(R) = \{\{0\}\times F_2\times F_3\times\cdots\times F_n, F_1\times\{0\}\times F_3\times\cdots\times F_n,\cdots, F_1\times F_2\times F_3\times\cdots\times F_{n-1}\times\{0\}\}$.

($\Leftarrow$) Позначимо $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$. Розглянемо суму $\sum_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j)$. Оскільки $\bigcap_{i\in\Omega}\Omega\setminus\{i\} = \emptyset$, то за лемою 13 $\sum_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j) = R$. За лемою 1 R – напівпросте, тому $(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i_1\}}\mathfrak{M}_j)\cap(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i_2\}}\mathfrak{M}_j) = \mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{M}_n = \{0\}$. Отже,

$$\sum_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j) = \oplus_{i\in\Omega}(\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j).$$

Звідси $1 = e_1+e_2+\cdots+e_n$, де $e_i\in\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$. Покажемо, що $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j = e_iR$ для будь-якого $i\in\Omega$. Включення $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j\supseteq e_iR$ випливає з того, що $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$ – ідеал і $e_i\in\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$, а включення $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j\subseteq e_iR$ – з того, що $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$ є мінімальним ідеалом кільця R. Мінімальність ідеалу $\bigcap_{j\in\Omega\setminus\{i\}}\mathfrak{M}_j$ випливає з того, що вищевизначене відображення f є антиізоморфізмом гратки ідеалів стосовно включення і підмножин скінченної множини стосовно включення і максимальними власними підмножинами множини Ω є множини вигляду $\Omega\backslash\{i\}$ для кожного $i \in \Omega$. Отже, $R = e_1R + e_2R + \cdots + e_nR$. З мінімальності ідеалу e_iR за лемою 14 також випливає, що e_iR є тілом для кожного $i \in \Omega$.

Лему доведено.

Наслідок. *Нехай R – регулярне дуо-кільце і $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді $R = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, де F_i є тілом для кожного $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Доведення випливає з лем 12 і 15.

З доведених лем випливають ще такі прості факти.

Теорема. *Нехай R – кільце, в якому $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді R є регулярним за Нейманом дуо-кільцем тоді і тільки тоді, коли $R = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, де F_i є тілом для кожного $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Наслідок 1. *Нехай R – кільце, в якому $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді R є комутативним регулярним за Нейманом кільцем тоді і тільки тоді, коли $R = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, де F_i є полем для кожного $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Наслідок 2. *Нехай R – кільце, в якому $|\mathrm{mspec}(R)| = n$. Тоді R булеве тоді і тільки тоді, коли $R = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

1. Brandal W., Barbut E. *Localizations of torsion theories* // Pacific J. Math. – 1983.– Vol. 107, 1. – P.27–37.
2. Matlic E. *Decomposable modules* // Trans. Amer. Soc.– 1966. – Vol. 125. – P.147-179.
3. Steström B. Rings and modules of quotients. – Springer Verlag: Berlin, N.Y., 1975.
4. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: "Мир", 1971.
5. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Международная конференция по алгебре. Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1989. – С.135.
6. Тушницкий И.Я. *Кольца с локально определенными кручениями*// Алгебра и логика.– 1991. – Т. 30, 3. – С.369–377.
7. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Ширшова. Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1991. – С.117.
8. Тушницький І.Я. *Кільця з локально визначеними крученнями* // Тематичний збірник наукових праць "Алгебра і топологія". Інститут системних досліджень освіти України. Київ. 1993. – С.88–109.

Стаття надійшла до редколегії 05.12.96

УДК 517.535.4

ДЕФЕКТИ МЕРОМОРФНИХ У ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ

І. Е. Чижиков

Chyzhykov I. E. Deficiencies of meromorphic functions in a half-plane.
In this paper we construct an example of meromorphic in the half-plane $\{w : \mathrm{Im} w < 0\}$ function which has given positive order of growth and deficient values a_n. Its deficiencies satisfies the condition $\delta^*(a_n, f) \geqslant \frac{\delta_n}{2}$, where sequence (δ_n) such that $\sum_n \delta_n \leqslant 2$ is given.

Ми будемо дотримуватися у даній праці стандартних позначень теорії Неванлінни. Файнберг О.Д. у праці [2] показала, що множиною дефектних значень за Цудзі і Неванлінною мероморфних в півплощині функцій може бути довільна, не більш ніж зліченна, множина. Для випадку одиничного круга В.І. Крутінь довів таку теорему.

Теорема А. *Нехай* $(\delta_k)_{k=1}^{\infty}$ *послідовність додатних чисел така, що* $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqslant 2$, (a_k) *— довільна послідовність скінченних комплексних чисел і* $\rho \geqslant 0$ *довільне наперед задане число. Існує мероморфна при* $|z| < 1$ *функція* $g(z, \rho)$ *порядку* ρ *така, що* $\delta(a_n, g) \geqslant \dfrac{\delta_n}{4}$.

Ми доведемо аналог теореми А у випадку півплощини для дефектів за Цудзі. Зауважимо, що ідея доведення запозичена у В.І. Крутіня, проте її технічна реалізація значно спрощується, якщо провести заміну змінної $w = 1/z$ в означеннях характеристик Цудзі, які використані в [2]. Ефективність такої заміни добре відома.

Позначимо $\mathbb{C}_- = \{w : \mathrm{Im} w < 0\}$. Нехай $f(w)$ - мероморфна в $\mathbb{C}_- \cup (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ функція, де $w = u + iv$, $u = \mathrm{Re} w$, $v = \mathrm{Im} w$, а $n^*(v, f)$ — кількість полюсів функції $f(w)$ на множині $\{w : |w| < 1, \mathrm{Im} w \leqslant v\}$. Характеристиками Цудзі будемо називати величини $(-1 < v < 0)$:

$$N^*(v, f) = \int_{-1}^{v} n^*(v, f) dv, \quad N^*(v, a, f) \equiv N^*\Big(v, \frac{1}{f-a}\Big),$$

$$m^*(v, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu(v)}^{\nu(v)} \ln^+ |f(u+iv)| du, \quad m^*(v, a, f) \equiv m^*\Big(v, \frac{1}{f-a}\Big),$$

$$T^*(v, f) = m^*(v, f) + N^*(v, f),$$

де $\nu(v) = \sqrt{1 - v^2}$, $a \in \mathbb{C}$. Дефектом в точці a за Цудзі назвемо величину $\delta^*(a, f) = \varliminf_{v \to -0} \dfrac{m^*(v, a, f)}{T^*(v, f)}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D30.

Лема 1. *Нехай* $\mu \in (-1,1)$. *Тоді при* $v \in (-1,0)$

$$m^*\Big(v, E_{\rho+1}\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big) = \frac{K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1),$$

де $E_{\rho+1}(z)$ — *функція Міттаг-Лефлера порядку* $\rho+1$, $K_1(\rho) > 0$.

Доведення. Відомо асимптотичне зображення [1]

$$E_{\rho+1}(z) = \begin{cases} (\rho+1)e^{z^{\rho+1}} + \varphi_1(z), & |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2(\rho+1)}, \\ \varphi_2(z), & |\arg z| \in \Big[\dfrac{\pi}{2(\rho+1)}, \pi\Big], \end{cases}$$

де $|\varphi_j(z)| \leqslant C_2 = E_{\rho+1}(1)$, при $|z| \leqslant 1$, $\varphi_j(z) \leqslant \dfrac{C_1}{|z|}$, при $|z| > 1$, $j = 1, 2$. Отже, $|\varphi_j(z)| \leqslant C_3$. Легко бачити, що

$$\Big|\arg\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big| \iff |\pi/2 + \arg(w - \mu)| \leqslant \frac{\pi}{2(\rho+1)}.$$

Нехай $\psi = \arg(w - \mu) \in (-\pi, 0)$. Тоді за попереднім

$$\Big|\arg\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big| \leqslant \frac{\pi}{2(\rho+1)} \iff \psi \in \Big(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(\rho+1)}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(\rho+1)}\Big).$$

Нехай $I = \Big\{u : u \in (-\nu(v), \nu(v)), \psi \in \Big(-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2(\rho+1)}, -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2(\rho+1)}\Big)\Big\}$. Враховуючи, що $u - \mu = v\operatorname{ctg}\psi$, $u'(\psi) = -\dfrac{v}{\sin^2\psi}$. Тоді

$$m^*\Big(v, E_{\rho+1}\Big(\frac{i}{\mu - w}\Big)\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\nu(v)}^{\nu(v)} \ln^+\Big|E_{\rho+1}\Big(\frac{i}{\mu - u - iv}\Big)\Big| du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_I \ln^+\Big|(\rho+1)\exp\Big(\Big(\frac{i}{\mu - u - iv}\Big)^{\rho+1}\Big)\Big| du + O(1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_I \operatorname{Re}^+\Big(\Big(\frac{i}{\mu - u - iv}\Big)^{\rho+1}\Big) du +$$

$$+O(1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_I \frac{\cos^+(\rho+1)(\frac{\pi}{2} + \psi(u))}{((\mu-u)^2 + v^2)^{\frac{\rho+1}{2}}} du = \frac{1}{2\pi|v|^\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(\rho+1)}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(\rho+1)}} \frac{\cos^+(\rho+1)(\frac{\pi}{2} + \psi)d\psi}{(1 + \operatorname{ctg}^2\psi)^{\frac{\rho+1}{2}}\sin^2\psi} +$$

$$+O(1) = \frac{1}{2\pi|v|^\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(\rho+1)}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(\rho+1)}} \cos^+(\rho+1)(\frac{\pi}{2} + \psi)|\sin\psi|^{\rho-1}d\psi + O(1) = \frac{K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1).$$

Лему доведено.

Теорема. *Нехай* (δ_n) — *довільна незростаюча послідовність,* $0 < \delta_n \leqslant 1$, $\sum_{n\geqslant 1}\delta_n \leqslant 2$, (a_n) – *довільна послідовність різних комплексних чисел з* $\bar{\mathbb{C}}$, $\rho \in (0, +\infty)$. *Тоді існує мероморфна в* $\mathbb{C}_-$ *функція* $f(w)$ *порядку* ρ *така, що* $\delta^*(a_n, f) \geqslant \dfrac{\delta_n}{2}$.

Доведення. Нехай $\alpha = \dfrac{1}{\rho+1}$, $\mu_1 = \dfrac{3}{4}$, $\mu_{n+1} = \mu_n - (1/4)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $a_1 = \infty$ (при потребі доданок $e_1(w)$ в означенні $g_1(w)$ можна відкинути). Нехай $e_n(w) = E_{\rho+1}\Big(\dfrac{\delta_n^\alpha i}{\mu_n - w}\Big)$, при $n \geqslant 1$. Означимо $g_2(w) = \sum_{n\geqslant 2} b_n e_n(w)$, $g_1(w) = \sum_{n\geqslant 2} b_n a_n e_n(w) + e_1(w)$, де (b_k) — послідовність додатних чисел така, що

$$\sum_{n\geqslant 2} b_n = S_2, \quad \sum_{n\geqslant 2} |a_n| b_n + 1 = S_1.$$

Очевидно, $g_1(w)$, $g_2(w)$ аналітичні в $\mathbb{C}_-$. Покладемо $f(w) = \dfrac{g_1(w)}{g_2(w)}$. Згідно з лемою 1 $m^*(v, e_n(w)) = \dfrac{\delta_n K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1)$. Позначимо $l(v) = \{w = u + iv : u \in (-\nu(v), \nu(v))\}$. Нехай $\Omega_n = \{w : |\arg(w - \mu_n) + \dfrac{\pi}{2}| < \dfrac{\pi}{2(\rho+1)}\} \cap l(v)$, $\Omega = l(v) \setminus \bigcup_{n\geqslant 1}\Omega_n$. Позначимо $N(v) = \max\{n : \Omega_n \cap \Omega_{n+1} = \varnothing\}$. Це рівносильно тому, що

$$|v| \leqslant \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{2}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)}$$

виконується лише при $1 \leqslant n \leqslant N(v)$. Оскільки

$$\mathrm{mes}\Big(\bigcup_{N(v)+1}^{N(v)+p}\Omega_n\Big) \leqslant (\mu_{N(v)} - \mu_{N(v)+1}) + \dots + (\mu_{N(v)+p-1} - \mu_{N(v)+p}),$$

то

$$\mathrm{mes}(\bigcup_{n>N(v)}\Omega_n) \leqslant \sum_{n\geqslant N(v)}(\mu_n - \mu_{n+1}) \leqslant \int_{N(v)-1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^x dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 4}\Big(\frac{1}{4}\Big)^{N(v)-1} \leqslant \frac{16\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2(\rho+1)}}{\ln 2}|v|.$$

Тобто, $\mathrm{mes}\Big(\bigcup_{n>N(v)}\Omega_n\Big) = O(|v|)$.

Оцінимо тепер $g_1(w)$ і $g_2(w)$. Нехай $w \in \Omega_k$, $2 \leqslant k \leqslant N(v)$. Тоді

$$\ln^+|g_1(w)| = \ln^+\Big|\sum_{n\geqslant 2} a_n b_n e_n(w) + e_1(w)\Big| \leqslant \ln^+|a_k b_k e_k(w)| +$$

$$+ \ln^+\Big|\sum_{n\neq k, n\geqslant 2} a_n b_n e_n(w) + e_1(w)\Big| + \ln 2 \leqslant \ln^+|e_k(w)| + \ln^+|a_k b_k| + \ln^+(C_3 S_1) + \ln 2.$$

Подібно до попереднього, при $w \in \Omega_1$ маємо

$$\ln^+ |g_1(z)| \leqslant \ln^+ |e_1(w)| + \ln^+(C_3 S_1) + \ln 2.$$

Нарешті, при $w \in \bigcup_{n>N(v)} \Omega_n$ отримаємо

$$\ln^+ |g_1(w)| \leqslant \ln^+ \Big| \sum_{n=2}^{N(v)} a_n b_n e_n(w) + \sum_{n>N(v)} a_n b_n e_n(w) + e_1(w) \Big| \leqslant \ln^+ \Big| C_3 \Big(\sum_{n\geqslant 2} |a_n| b_n + 1 \Big) +$$
$$\sum_{n>N(v)} |a_n| b_n (\rho+1) e^{\frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}} \Big| \leqslant \ln^+ |C_3 S_1| + \ln 2 + \ln^+ |(\rho+1) S_1| + \frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}} \leqslant C_4 + \frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}.$$

Зауважимо, що $N(v) \to +\infty$ при $v \to 0$. При $w \in \Omega$, маємо $\ln^+ |g_1(z)| \leqslant \ln^+ |S_1 C_3|$. Подібно, для $g_2(w)$ матимемо

$$\ln^+ |g_2(w)| \leqslant \begin{cases} \ln^+ |e_k(w)| + C_5, & w \in \Omega_k, 2 \leqslant k \leqslant N(v) \\ C_6 + \dfrac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}, & w \in \Omega_k, k > N(v), \\ C_7, & w \in \Omega \cup \Omega_1. \end{cases}$$

Оцінимо характеристику $T^*(v, f)$, використовуючи рівність

$$T^*(v, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu(v)}^{\nu(v)} \max\{\ln |g_1(u+iv)|, \ln |g_2(u+iv)|\}\, du + O(1).$$

Отже, при $w = u + iv$

$$T^*(v, f) = \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_{n=2}^{N(v)} \int_{\Omega_n} + \int_{\bigcup_{n>N(v)} \Omega_n} + \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega} \Big) (\max\{\ln |g_1(w)|, \ln |g_2(w)| du + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=2}^{N(v)} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_n} \ln^+ |e_n(u+iv)|\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{n>N(v)} \Omega_n} \frac{\delta_{N(v)}}{|v|^{\rho+1}}\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_1} \ln^+ |e_1(u+iv)|\, du +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} C_8\, du + O(1) = \sum_{n=1}^{N(v)} \frac{\delta_n K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O\Big(\frac{\delta_{N(v)}}{|v|^\rho}\Big) + O(1) \leqslant (1 + o(1)) \frac{2K_1(\rho)}{|v|^\rho},\ v \to 0.$$

Лема 2. $m^*(v, a_k, f) \geqslant \dfrac{\delta_k K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1)$ *при* $v \to 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Зафіксуємо k. Тоді

$$|f(w) - a_k| = \frac{|\sum_{n \neq k} b_n(a_n - a_k)e_n(w) + e_1(w)|}{|\sum_{n \geqslant 2} b_n e_n(w)|}.$$

Нехай $|v|$ настільки мала, що $\Omega_k \cap \Omega_n = \varnothing$, при $k \neq n$. Тоді

$$\Big| \sum_{n \neq k, n \geqslant 2} b_n(a_n - a_k)e_n(w) + e_1(w) \Big| \leqslant 2S_1C_3, \ \Big| \sum_{n \geqslant 2} b_n e_n(w) \Big| \geqslant b_k|e_k(w)| - 2S_2C_3,$$

$$\frac{1}{|f(w) - a_k|} \geqslant \frac{b_k|e_k(w)| - 2S_2C_3}{2S_1C_3}.$$

Отже,

$$m^*(v, a_k, f) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_k} \ln^+ \frac{1}{|f(u + iv) - a_k|}\, du = \frac{\delta_k K_1(\rho)}{|v|^\rho} + O(1).$$

Лему доведено.

Звідси випливає, що $\delta^*(a_k, f) = \varliminf\limits_{v \to 0} \dfrac{m^*(v, a_k, f)}{T^*(v, f)} \geqslant \dfrac{\delta_n}{2}$. Крім того, очевидно, що $f(w)$ має порядок ρ за Цудзі. Це завершує доведення теореми.

1. Крутинь В.И. *О величинах дефектов Р.Неванлинны для мероморфных при $|z| < 1$ функций*// Изв. АН АрмССР, Математика.– 1973.– Т. VIII, N 5.– С.347-358.

2. Файнберг Е.Д. *О дефектах функций, мероморфных в полуплоскости*// Сб. "Теор. функций функ. анализ и их пр.".– 1976.– Вып. 25.– С.120-131.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.97

УДК 517.524

РОЗВИНЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ АППЕЛЯ F_1 ТА ЛАУРІЧЕЛЛИ $F_D^{(N)}$ У ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Н. П. Молнар, О. С. Манзій

Molnar N.P., Manziy O.S. The expansion of the Lauricella hypergeometric functions $F_D^{(N)}$ into branch continued fractions. With use of recurrent relations for Lauricella hypergeometric functions $F_D^{(N)}$ the development of ratios of such functions into branch continued fractions was built. The convergence of obtained expansion in the case of real parameters is investigated.

Ефективним засобом для наближення аналітичних, зокрема, гіпергеометричних функцій, є апарат неперервних дробів [4,8]. Розвинення гіпергеометричних функцій у неперервні дроби збігаються, як правило, в більш ширших областях, ніж відповідні розвинення у степеневі ряди. Аппель [5], Лаурічелла [7] розглянули гіпергеометричні функції від двох та n змінних, дослідили властивості цих функцій, встановили для них рекурентні співвідношення.

Побудовано різні алгоритми розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля та Лаурічелли у багатовимірні δ- та С-дроби [2,3]. Залишається відкритим питання збіжності цих розвинень.

У праці запропоновано нові алгоритми розвинення відношення гіпергеометричних функцій $F_1(a, b, b'; c; z_1, z_2)$ та $F_D^{(N)}(a, b_1, \ldots, b_N; c; z_1, \ldots, z_N)$ у гіллясті ланцюгові дроби , досліджено відповідність цих розвинень, знайдено застосування до зображеннь розв'язків рівняння Шредінгера.

1. Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли $F_D^{(N)}$ у гіллястий ланцюговий дріб.

Розглянемо гіпергеометричну функцію Лаурічелли [7]

$$F_D^{(N)}(a, b_1, \ldots, b_N; c; z_1, \ldots, z_N) = \sum_{k_1, \ldots, k_N = 0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+\cdots+k_N} (b_1)_{k_1} \cdots (b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\cdots+k_N}} \frac{z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}}{k_1! \cdots k_N!},$$

де a, $b_1, \ldots, b_N$, c – комплексні сталі, причому $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $z_1, \ldots, z_N$ – комплексні змінні; $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ – символ Похгаммера; $(\alpha)_0 = 1$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 33C65.

Легко переконатися, що справджуються такі рекурентні співвідношення:

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};c;\bar{z}) = F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_i,c;\bar{z}) - \frac{a}{c} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;c+1;\bar{z}),\ i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z}) = \frac{c-a}{c} F_D^{(N)}(a,\bar{b};\ c+1;\ \bar{z}) + \frac{a}{c} F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};\ c+1;\ \bar{z}), \tag{2}$$

$$F_D^{(N)}(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z}) = F_D^{(N)}(a+1,\bar{b};\ c;\ \bar{z}) - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c} z_i F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z}), \tag{3}$$

де $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$, $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, $\bar{e_i} = (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_N^i)$; δ_i^j – символ Кронекера. Формули(2), (3) наведені в монографії [6] без доведення.

Побудуємо розвинення частки двох гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z})}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{4}$$

у гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД). Із співвідношення (1) випливає, що

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})} = \frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})} - \frac{a}{c} z_i. \tag{5}$$

Враховуючи формулу (2), одержимо

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})} = \frac{c-a}{c} \frac{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})} + \frac{a}{c}. \tag{6}$$

З властивості (3) випливає, що .

$$\frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})} = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k+\delta_i^k}{c+1} z_k \frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z})}. \tag{7}$$

Введемо позначення

$$G_i(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z}) := \frac{F_D^{(N)}(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})}{F_D^{(N)}(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z})}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N\,. \tag{8}$$

Враховуючи отримані співвідношення (5) – (7), маємо

$$G_i(a,\bar{b};c;\bar{z}) = \cfrac{1}{\cfrac{a}{c}(1-z_i) + \cfrac{1-\cfrac{a}{c}}{1+\sum\limits_{k=1}^{N} \cfrac{b_k+\delta_i^k}{c+1} z_k G_k(a,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z})}}, \tag{9}$$

де $i = 1, 2, \dots, N$. Послідовно вкладаючи співвідношення (9), одержимо теорему.

Теорема 1. *Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли (4) для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant N$, має формальне розвинення у гіллястий ланцюговий дріб*

$$\frac{F_D^{(N)}(a+1, \bar{b}+\bar{e}_i;\, c+1;\, \bar{z})}{F_D^{(N)}(a, \bar{b};\, c;\, \bar{z})} = G_i(a, \bar{b};\, c;\, \bar{z}) =$$

$$= \cfrac{1}{v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{u_{i(n)}(\bar{z})}{v_{i(n)}(\bar{z}) + \ddots}}}}}, \tag{10}$$

де

$$v_0(\bar{z}) = \frac{a}{c}(1 - z_i), \quad w_n = 1 - \frac{a}{c+n-1}, \quad u_{i(n)} = \frac{b_{i_n} + p_{i(n)}}{c+n} z_{i_n},$$

$$v_{i(n)} = \frac{a}{c+n}(1 - z_{i_n}), \qquad p_{i(n)} = \begin{cases} \alpha_{i(n)}, & \text{якщо } i_n \neq i, \\ \alpha_{i(n)} + 1, & \text{якщо } i_n = i; \end{cases} \tag{11}$$

$\alpha_{i(n)}$ *– кількість чисел i_n в мультиіндексі $i(n-1) = i_1 i_2 \ldots i_{n-1}$, якщо $n \geqslant 2$; $\alpha_{i(1)} = 0$.*

Доведення. Методом математичної індукції покажемо, що для довільного натурального n правильне розвинення відношення (8) у скінченний гіллястий ланцюговий дріб

$$G_i = \cfrac{1}{v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_{n-1}}{1 + \sum\limits_{i_{n-1}=1}^{N} \cfrac{u_{i(n-1)}(\bar{z})}{v_{i(n-1)}(\bar{z}) + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \widehat{u}_{i(n)}(\bar{z})}}}}}}, \tag{12}$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами (11) і

$$\widehat{u}_{i(n)}(\bar{z}) = u_{i(n)}(\bar{z}) G_{i_n}\left(a, \bar{b} + \sum_{j=1}^{N} p_{i(n-1)j}\bar{e}_j;\, c;\, \bar{z}\right).$$

З формули (9) випливає, що

$$v_0(\bar{z}) = \frac{a}{c}(1 - z_i), \quad w_1 = 1 - \frac{a}{c}, \quad u_{i(1)}(\bar{z}) = \frac{b_{i_1} + p_{i(1)}}{c+1} z_{i_1}$$

(оскільки $p_{i(1)} = \delta_i^{i_1}$), тобто розвинення (12) справедливе при $n = 1$.

Припустивши, що формули (12) справджуються при $n = k$ і використавши співвідношення (9), матимемо

$$G_{i_k}\left(a, \bar{b} + \sum_{j=1}^{N} p_{i(k-1)j}\bar{e_j};\ c+k;\ \bar{z}\right) =$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{a}{c+k}(1-z_{i_k}) + \cfrac{1-\cfrac{a}{c+k}}{1+\sum\limits_{i_k=1}^{N}\cfrac{b_{i_{k+1}}+p_{i(k-1)i_{k+1}}+\delta_{i_k}^{i_{k+1}}}{c+k+1}\, z_{i_{k+1}}\,\widehat{G}_{i_{k+1}}}}, \qquad (13)$$

де $\widehat{G}_{i_{k+1}} = G_{i_{k+1}}\left(a, \bar{b} + \sum\limits_{j=1}^{N}(p_{i(k-1)} + \delta_{i_k}^{j})\bar{e_j};\ c+k+1;\ \bar{z}\right)$. Враховуючи, що $p_{i(k+1)} = p_{i(k-1)i_{k+1}} + \delta_{i_k}^{i_{k+1}}$, з формули (13) одержимо

$$v_{i(k)}(\bar{z}) = \frac{a}{c+k}(1-z_{i_k}),\ w_{k+1} = 1 - \frac{a}{c+k},\ u_{i(k+1)}(\bar{z}) = \frac{b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}}{c+k+1} z_{i_{k+1}}.$$

Отже, розвинення (12) справедливе для $n = k+1$. Теорему доведено.

Еквівалентними перетвореннями ГЛД (13) зводиться до дробу такого вигляду:

$$\cfrac{ca^{-1}(1-z_i)^{-1}}{1+\cfrac{t_0(\bar{z})}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{s_{i(1)}(\bar{z})}{1+\ddots+\cfrac{t_{i(n-1)}(\bar{z})}{1+\sum\limits_{i_n=1}^{N}\cfrac{s_{i(n)}(\bar{z})}{1+\ddots}}}}}, \qquad (14)$$

$$t_0(\bar{z}) = \frac{c-a}{a(1-z_i)},\quad t_{i(n)}(\bar{z}) = \frac{c-a+n}{a(1-z_{i_n})},\quad s_{i(n)}(\bar{z}) = \frac{(b_{i_n} + p_{i(n)})z_{i_n}}{a(1-z_{i_n})}.$$

2. Відповідність.

Розглянемо послідовність раціональних функцій $f_n(\bar{z}) = \dfrac{P_m(\bar{z})}{Q_l(\bar{z})}$, де $P_m(\bar{z})$, $Q_l(\bar{z})$ – поліноми степеня $m = m(n)$ і $l = l(n)$ відповідно. Функція $f_n(\bar{z})$ розвивається у формальний степеневий ряд (ФСР) в околі нуля, якщо знаменник $Q_l(\bar{z})$ в точці $\bar{z} = (0, 0, \ldots, 0)$ відмінний від нуля.

Раціональна функція $f_n(\bar{z})$ називається відповідною деякому ФСР

$$f = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_N = 0}^{\infty} c_{i(N)} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_N^{i_N}$$

з порядком відповідності ν_n, якщо розвинення $f_n(\bar{z})$ у формальний степеневий ряд збігається з f за всіма однорідними поліномами до степеня $\nu_n - 1$ включно. Послідовність $f_n(\bar{z})$ є відповідною ФСР, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$.

Нехай

$$F_n(\xi) = \cfrac{1}{v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{u_{i(n)}(\bar{z})}{v_{i(n)}(\bar{z}) + \xi}}}}}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Підхідні дроби ГЛД (10) визначаються так

$$f_0 = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + w_1}; \qquad f_{2n-1} = F_n(0); \qquad f_{2n} = F_n(w_{n+1}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Відповідність ГЛД формальному степеневому ряду f означає, що послідовність підхідних дробів ГЛД $\{f_n\}$ є відповідною f.

Теорема 2. *Гіллястий ланцюговий дріб (10) є відповідним формальному степеневому ряду, в який розвивається функція G_i, з порядком відповідності*

$$\nu_n = \left[\frac{n+1}{2}\right], \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

для кожного n-го підхідного дробу.

Доведення. Використовуючи алгоритм розвинення G_i у гіллястий ланцюговий дріб, можна записати тотожності, що справджуються для довільного натурального n:

$$G_i^{-1} = v_0(\bar{z}) + \cfrac{w_1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(\bar{z})}{v_{i(1)}(\bar{z}) + \ddots + \cfrac{w_{n-1}}{1 + \sum\limits_{i_{n-1}=1}^{N} \cfrac{u_{i(n-1)}(\bar{z})}{v_{i(n-1)}(\bar{z}) + \cfrac{w_n}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} u_{i(n)}(\bar{z}) \widehat{G}_{i_n}(\bar{z})}}}}}$$

Введемо позначення

$$S_l^k(\eta) = 1 + \sum_{i_k=1}^{N} \cfrac{u_{i(k)}(\bar{z})}{v_{i(k)}(\bar{z}) + \cfrac{w_k}{1 + \ddots + \cfrac{w_l}{1 + \sum\limits_{i_l=1}^{N} u_{i(l)}(\bar{z}) \eta}}}, \qquad 1 \leqslant l \leqslant k,$$

$$R_l^k = S_l^k(1/v_{i(l)}(\bar{z})), \quad Q_l^k = S_l^k(\widehat{G}_{i_l}(\bar{z})), \quad P_l^k = S_l^k(1/(v_{i(l)}(\bar{z}) + w_{l+1})),$$

$$\widehat{R}_l^k = \frac{w_k}{R_l^k}, \quad \widehat{Q}_l^k = \frac{w_k}{Q_l^k}, \quad \widehat{P}_l^k = \frac{w_k}{P_l^k}.$$

Згідно з введеними позначеннями

$$G_i = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + \widehat{Q}_n^1}, \qquad f_{2n-1} = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + \widehat{R}_n^1}, \qquad f_{2n} = \frac{1}{v_0(\bar{z}) + \widehat{P}_n^1}.$$

Використовуючи методику виведення формули різниці підхідних дробів [1], легко довести, що

$$G_i - f_{2n-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{w_k}{R_n^k Q_n^k} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{N} \frac{\left(1 - v_{i(n)}(\bar{z})\widehat{G}_{i_n}(\bar{z})\right) \prod\limits_{k=1}^{n} u_{i(k)} z_{i_k}}{v_{i(n)}(\bar{z}) \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left[(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{Q}_n^{k+1})(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{R}_n^{k+1})\right]},$$

$$G_i - f_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{w_k}{P_n^k Q_n^k} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{N} \frac{\left((w_n + v_{i(n)}(\bar{z}))\widehat{G}_{i_n}(\bar{z}) - 1\right) \prod\limits_{k=1}^{n} u_{i(k)} z_{i_k}}{(v_{i(n)}(\bar{z}) + w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n-1} \left[(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{Q}_n^{k+1})(v_{i(k)}(\bar{z}) + \widehat{P}_n^{k+1})\right]},$$

де $i(0) = 0$, $u_{i(k)} = \dfrac{b_{i_k} + p_{i(k)}}{c + k}$, $n = 1, 2, \ldots$

Оскільки всі вирази в знаменниках цих формул дорівнюють одиниці, якщо $z_1 = \ldots = z_N = 0$, то в деякому околі точки $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^N$ вони відмінні від нуля. Розклавши формально в степеневі ряди величини, обернені до цих знаменників, а також $\widehat{G}_{i_n}(\bar{z})$, одержимо

$$G_i - f_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_N \geqslant 0 \, i_1 + i_2 + \ldots + i_N \geqslant \nu_n} \alpha_{i(N)} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_N^{i_N}, \quad \nu_n = \left[\frac{n+1}{2}\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отже, ГЛД (10) є відповідний ряду, в який формально розкладається функція G_i.

3. Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля у гіллястий ланцюговий дріб.

Розглянемо гіпергеометричну функцію двох змінних

$$F_1(a, b, b'; c; z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!},$$

де a,b,b',c – комплексні сталі, z_1,z_2 – комплексні змінні, причому $c \neq 0, -1, -2, \ldots$

Ця функція була введена та досліджена французьким математиком Аппелем у монографії [5], де, зокрема, наведені такі рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} F_1(a, b, b'; c; z_1, z_2) = F_1(a-1, b, b'; c; z_1, z_2) + \frac{z_1 b}{c} F_1(a, b+1, b'; c+1; z_1, z_2) + \\ + \frac{z_2 b'}{c} F_1(a, b, b'+1; c+1; z_1, z_2); \end{aligned} \tag{15}$$

$$F_1(a,b,b';c;z_1,z_2) = (1-z_1)^{-b}(1-z_2)^{-b'}F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right). \qquad (16)$$

Побудуємо розвинення

$$K := \frac{F_1(a-1,b,b';c;z_1,z_2)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)}$$

у гіллястий ланцюговий дріб з двома гілками розгалуження.

Із співвідношення (15) випливає, що

$$K = 1 - \frac{z_1 b}{c}\frac{F_1(a,b+1,b';c+1;z_1,z_2)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)} - \frac{z_2 b'}{c}\frac{F_1(a,b,b'+1;c+1;z_1,z_2)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)}.$$

Використавши формулу (16), зможемо записати

$$\begin{aligned} K =& 1 + \frac{bz_1}{c(z_1-1)}\frac{F_1\left(c-a+1,b+1,b';c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)} + \\ &+ \frac{b'z_2}{c(z_2-1)}\frac{F_1\left(c-a+1,b,b'+1;c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $F_1(a,b,b';c;z_1,z_2) = F_D^{(2)}(a,b,b';c;z_1,z_2)$, використаємо попередні викладки для побудови розвинення відношення K у гіллястий ланцюговий дріб.

Згідно з позначеннями (8) маємо:

$$\frac{F_1\left(c-a+1,b+1,b';c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)} = G_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right) = G_1,$$

$$\frac{F_1\left(c-a+1,b,b'+1;c+1;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)}{F_1\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right)} = G_2\left(c-a,b,b';c;\frac{z_1}{z_1-1},\frac{z_2}{z_2-1}\right) = G_2.$$

Тоді

$$K = \frac{F_1(a-1,b,b';c;z_1,z_1)}{F_1(a,b,b';c;z_1,z_2)} = 1 + \frac{b}{c}\frac{z_1}{z_1-1}G_1 + \frac{b'}{c}\frac{z_2}{z_2-1}G_2,$$

де G_k, $k = 1, 2$, розвиваються у гіллясті ланцюгові дроби вигляду (14). Отже,

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{2} \cfrac{s_0^k(z)}{1 + \cfrac{t_0^k(z)}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{2} \cfrac{s_{i(1)}^k(z)}{1 + \ddots + \cfrac{t_{i(n-1)}^k(z)}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{2} \cfrac{s_{i_n}^k(z)}{1 + \ddots}}}}}, \tag{17}$$

де $z = (z_1, z_2)$ і

$$s_0^k(z) = \begin{cases} \dfrac{b}{(a-c)} z_1, & \text{якщо } k = 1, \\ \dfrac{b'}{(a-c)} z_2, & \text{якщо } k = 2; \end{cases}$$

$$t_0^k(z) = \frac{a}{a-c}(z_k - 1); \qquad t_{i(n)}^k(z) = \frac{a+n}{a-c}(z_{i_n} - 1); \tag{18}$$

$$s_{i(n)}^k(z) = \begin{cases} \dfrac{b + p_{i(n)} + 1}{a-c} z_1, & \text{якщо } i_n = 1,\ k = 1, \\ \dfrac{b' + p_{i(n)}}{a-c} z_2, & \text{якщо } i_n = 2,\ k = 1, \\ \dfrac{b + p_{i(n)}}{a-c} z_1, & \text{якщо } i_n = 1,\ k = 2, \\ \dfrac{b' + p_{i(n)} + 1}{a-c} z_2, & \text{якщо } i_n = 2,\ k = 2. \end{cases}$$

Враховуючи, що $F_1(0, b, b'; c; z_1, z_2) = 1$, отримаємо розвинення функції $F_1^{-1}(1, b, b'; c; z_1, z_2)$ у ГЛД.

4. Застосування розвинення функції $F_1(a, b, b'; c; z_1, z_2)$ у ГЛД для побудови розв'язку рівняння Шредінгера.

У монографії [6] подані розв'язки радіального рівняння Шредінгера

$$\frac{d^2x}{dr^2} = \left[u^2 v(r) - \frac{Eh^2}{2m} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] x,$$

де $u^2 = \dfrac{Kh^2}{2m}$, K – стала, h – стала Планка, $v(r) = (\alpha_1 - r)^{-\beta_1}(\alpha_2 - r)^{-\beta_2}$ – сферично-симетричний потенціал, у вигляді $x = (\alpha_1 - r)^{-\frac{\beta_1}{2}}(\alpha_2 - r)^{-\frac{\beta_2}{2}} \exp(\pm u\xi(r))$, причому

$$\xi(r) = (r - r_0)(\alpha_1 - r_0)^{-\frac{\beta_1}{2}}(\alpha_2 - r_0)^{-\frac{\beta_2}{2}} F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r - r_0}{\alpha_1 - r_0}, \frac{r - r_0}{\alpha_2 - r_0}\right),$$

де r_0 – довільна стала. У реальній фізичній моделі на параметри накладаються такі обмеження: $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$. Використовуючи розвинення гіпергеометричної функції Аппеля $F_1^{-1}(1, b, b'; c; z_1, z_2)$ у гіллястий ланцюговий дріб (17), одержимо

$$F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r-r_0}{\alpha_1 - r_0}, \frac{r-r_0}{\alpha_2 - r_0}\right) =$$

$$\cfrac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{2}\cfrac{s_0^k(r)}{1+\cfrac{t_0^k(r)}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{2}\cfrac{s_{i(1)}^k(r)}{1+\ddots+\cfrac{t_{i(n-1)}^k(r)}{1+\sum\limits_{i_n=1}^{2}\cfrac{s_{i(n)}^k(r)}{1+\ddots}}}}}}, \tag{19}$$

де $s_0^k(r) = \dfrac{\beta_k}{2}\dfrac{(r-r_0)}{(r_0-\alpha_k)}$, $t_0^k(r) = \dfrac{(r-\alpha_k)}{(r_0-\alpha_k)}$, $\quad t_{i(n)}^k = \dfrac{(n+1)(r-\alpha_k)}{r_0-\alpha_k}$, $s_{i(n)}^k = \dfrac{(\beta_{i_n}/2 + p_{i(n)}^k)(r-r_0)}{r_0-\alpha_k}$.

Теорема 3. *Нехай параметри ГЛД (19) задовольняють умови:*
а) $r > r_0 > \alpha_k$, $k = 1, 2$;
б) $\beta_k \geqslant 0$, $k = 1, 2$.
Тоді ГЛД (19) збігається і справедлива оцінка швидкості збіжності:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{m} \frac{2}{2+\phi_j(r)}, \tag{20}$$

де $f_n(z), f_m(z)$ *– підхідні дроби ГЛД (19),*

$$\phi_{2j-1}(r) = \max{}^{-1}(s_{i(j-1)}^k(r) : i_p = 1, 2,\ p = \overline{0, m-1},\ k = 1, 2),$$
$$\phi_{2j}(r) = \max{}^{-1}(t_{i(j-1)}^k(r) : i_p = 1, 2,\ p = \overline{0, m-1},\ k = 1, 2),\ n > m,\ i(0) = 0.$$

Доведення. Компоненти ГЛД (19) при заданих умовах є невід'ємними числами. Використовуючи методику, запропоновану в [1, теор.3.12], одержимо оцінку (20), з якої випливає збіжність ГЛД (19).

Гіпергеометричний ряд

$$F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r-r_0}{\alpha_1 - r_0}, \frac{r-r_0}{\alpha_2 - r_0}\right)$$

збігається, якщо $|r - r_0| < |\alpha_k - r_0|$. А розвинення у гіллястий ланцюговий дріб (19) збігається при умові, що $(r-r_0)/(r-\alpha_k) < 1$. Ці умови нееквівалентні, якщо $\alpha_k < r_0 < r$.

У цьому випадку ГЛД збігається завжди, а ряд є збіжним при виконанні додаткової умови $r < 2r_0 - \alpha_k$.

При виконанні умов теореми 3 ГЛД (19) збігається до

$$F_1\left(1, \frac{\beta_1}{2}, \frac{\beta_2}{2}; 2; \frac{r-r_0}{\alpha-r_0}, \frac{r-r_0}{\alpha_2-r_0}\right),$$

якщо $\exists k_0 : \forall k > k_0$

$$G_{i_k}\left(2, \frac{\beta_1}{2} + p_{i(k)1}, \frac{\beta_2}{2} + p_{i(k)2}; 3+k; \frac{r-r_0}{r-\alpha_1}, \frac{r-r_0}{r-\alpha_2}\right) > 0, \ \ i_k = 1, 2.$$

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986.– 176 с.
2. Боднар Д. И., Дубиняк О. С.*Розвинення відношення функцій Аппеля в гіллясті ланцюгові дроби*// Волин. мат. вісн.– 1996.– Вип.2. – С.15-16.
3. Гоєнко Н. П.*Алгоритм розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли в гіллясті ланцюгові дроби*// Волин. мат. вісн. – 1996.– Вип.2. – С.49-51.
4. Джоунс У.,Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985.–414 с.
5. Appell P., Kampe de Feriet. Fonction hypergemetriques et hyperspheriques Polinomies d'Hermite. – Paris: Couthier-Villars, 1926.– 434 p.
6. Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. – New York–Sydney–Toronto, Chichester, Ellis Horwood, 1976.–376 p.
7. Lauricella G.*Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili*// Rend. Circ. Mat. Palermo.– 1893.– Vol. 7.– P. 111–113.
8. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fraction with Application. – Amsterdam: North-Holland, 1992.–606 p.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.97

УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ З ТРЬОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ І ПЕРІОДИЧНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

М. О. Оліскевич

Oliskevych M.O. Solution's stability of mixed problem for system with three values for periodic boundary conditions The mixed problem for a system of partial differential equations of the first order is considered. The existence of a solution is obtained with use of the parabolic system of the second order. Theorem of Liapunov's stability of a trivial solution is proved.

Поведінку розв'язку задач при великих значеннях часу досліджують різними методами. У працях П. Ванга і П. Паркса стійкість схематизованого гнучкого літального апарата [1] чи стійкість розв'язку задачі флатера панелі [2] доведено методом Ляпунова. У працях [3],[4] досліджено стійкість тривіального розв'язку задачі Коші спеціального класу напівлінійних гіперболічних систем. У праці [5] за допомогою зображення функції Гріна доведено теорему про стійкість за Ляповим стаціонарного розв'язку мішаної задачі для лінійної гіперболічної системи. У даній праці досліджено стійкість нульового розв'язку мішаної задачі з нелокальними крайовими умовами методом апріорних оцінок.

Розглянемо в смузі $P = \{(x, y, t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0\}$ мішану задачу для лінійної системи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,y,t)u_j = f_i(x,y,t), \qquad (1)$$

$i = \overline{1,n}$, де матриці $A(x,y,t) = (a_{ij}(x,y,t))$, $B(x,y,t) = (b_{ij}(x,y,t))$ $(i,j = \overline{1,n})$ – симетричні, а $|a_{ijt}|$, $|a_{ijx}|$, $|a_{ijy}|$, $|b_{ijt}|$, $|b_{ijx}|$, $|b_{ijy}|$, $|c_{ij}|$, $|c_{ijt}|$, $|c_{ijx}|$, $|c_{ijy}|$ належать простору $L^\infty(P)$.

Для системи (1) задано крайові

$$u_i(0,y,t) = u_i(1,y,t), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B35; Secondary 35L50.

$$u_i(x,0,t) = u_i(x,1,t)\,, \quad i=\overline{1,n} \tag{3}$$

і початкові умови

$$u_i(x,y,0) = \varphi_i(x,y), \quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

причому функції $\varphi_i(x,y)$ задовольняють умови узгодження. Позначимо через $P_T = \{(x,y,t) : 0 < x < 1\,, 0 < y < 1\,, 0 < t < T\}$, $D = (0,1)\times(0,1)$, а через $H^1_{loc}(P)$ $\left(L^2_{loc}(P)\right)$ простір функцій $u(x,y,t)$ таких, що $u \in H^1(P_T)$ і задовольняють умови (2), (3) $\left(u \in L^2(P_T)\right)$ для довільного $T > 0$.

Означення. *Вектор-функція u з простору $H^1_{loc}(P)$ називається узагальненим розв'язком задачі (1)–(4), якщо вона задовольняє умови (2)–(4) і для довільних функцій $v_i(x,y,t)$ з $L^2_{loc}(P)$ виконуються інтегральні тотожності*

$$\int\limits_{P_T} \left(u_{it} + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{jx} + \sum_{j=1}^n b_{ij} u_{jy} + \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j \right) v_i \, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{P_T} f_i(x,y,t)\, v_i \, dxdydt\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \quad \forall T>0\,. \tag{5}$$

Для доведення існування розв'язку задачі (1)–(4), розглянемо допоміжну задачу

$$\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x} + \sum_{j=1}^n b_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial y} + \sum_{j=1}^n c_{ij}(x,y,t) u_j^\varepsilon =$$
$$= \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial y^2}\right) + f_i(x,y,t)\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \tag{6}$$

$$u_i^\varepsilon(0,y,t) = u_i^\varepsilon(1,y,t), \quad u_i^\varepsilon(x,0,t) = u_i^\varepsilon(x,1,t), \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

$$u_{ix}^\varepsilon(0,y,t) = u_{ix}^\varepsilon(1,y,t), \quad u_{iy}^\varepsilon(x,0,t) = u_{iy}^\varepsilon(x,1,t), \quad i=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$u_i^\varepsilon(x,y,0) = \varphi_i(x,y), \quad i=\overline{1,n}), \tag{9}$$

де ε – додатний малий параметр.

Нехай

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(1,y,t) - a_{ij}(0,y,t))\xi_i\xi_j \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x,1,t) - b_{ij}(x,0,t))\xi_i\xi_j \geqslant 0 \quad \forall \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n). \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай $\varphi_i \in H^1(D)$, $f_i \in H^1_{loc}(P)$, $i = \overline{1,n}$, і виконуються умови (10),(11). Тоді для розв'язку задачі (6) – (9) справедлива оцінка*

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right) dxdy \leqslant C(T) \tag{12}$$

для майже всіх $t \in [0,T]$.

Доведення. Можна довести, що задача (6) – (9) має розв'язок $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \ldots, u_n^\varepsilon)$, причому похідні $\dfrac{\partial^{|\alpha|} u_i^\varepsilon(x,y,t)}{\partial t^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}\partial y^{\alpha_3}}$, $i = \overline{1,n}$ $\left(|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i \leqslant 3,\ \alpha_1 \leqslant 2,\ \alpha_2 \leqslant 3,\ \alpha_3 \leqslant 3\right)$ належать простору $L^2_{loc}(P)$. Домноживши кожне рівняння системи (5) на $2u_i^\varepsilon$ і проінтегрувавши по P_T, отримаємо

$$\int\limits_{P_T} \left(2u_{it}^\varepsilon u_i^\varepsilon + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^\varepsilon u_i^\varepsilon + 2\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_{jy}^\varepsilon u_i^\varepsilon + 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) dxdydt =$$
$$= \int\limits_{P_T} 2\left(\varepsilon(u_{ixx}^\varepsilon u_i^\varepsilon + u_{iyy}^\varepsilon u_i^\varepsilon) + f_i u_i^\varepsilon\right) dxdydt\,.$$

Звідси

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right) dxdydt + \int\limits_{P_T} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) - \sum_{j=1}^{n} a_{ijx} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) dxdydt +$$
$$+ \int\limits_{P_T} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y}\left(b_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{ijy} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) dxdydt + \int\limits_{P_T} 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^\varepsilon u_i^\varepsilon dxdydt =$$
$$= \int\limits_{P_T} 2\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(u_{ix}^\varepsilon u_i^\varepsilon) - \varepsilon u_{ix}^{\varepsilon\,2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}(u_{iy}^\varepsilon u_i^\varepsilon) - \varepsilon u_{iy}^{\varepsilon\,2} + f_i u_i^\varepsilon\right) dxdydt\,.$$

Врахувавши обмеженість a_{ijx}, b_{ijy}, c_{ij} і оцінивши останню рівність, отримаємо нерівність

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right) dxdydt +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(1,y,t) u_j^\varepsilon(1,y,t) u_i^\varepsilon(1,y,t) - a_{ij}(0,y,t) u_j^\varepsilon(0,y,t) u_i^\varepsilon(0,y,t)\right) dydt +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij}(x,1,t) u_j^\varepsilon(x,1,t) u_i^\varepsilon(x,1,t) - b_{ij}(x,0,t) u_j^\varepsilon(x,0,t) u_i^\varepsilon(x,0,t)\right) dxdt -$$

$$- \int\limits_{P_T} \left(2\mu \sum_{j=1}^{n} u_j^{\varepsilon\,2} + 2n\mu u_i^{\varepsilon\,2} \right) dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \int\limits_0^1 2\varepsilon \left(u_{ix}^{\varepsilon}(1,y,t)u_i^{\varepsilon}(1,y,t) - u_{ix}^{\varepsilon}(0,y,t)u_i^{\varepsilon}(0,y,t)\right) dydt +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 2\varepsilon \left(u_{iy}^{\varepsilon}(x,1,t)u_i^{\varepsilon}(x,1,t) - u_{iy}^{\varepsilon}(x,0,t)u_i^{\varepsilon}(x,0,t)\right) dxdt +$$

$$+ \int\limits_{P_T} \left(f_i^2 + u_i^{\varepsilon\,2}\right) dxdydt\,.$$

Підсумувавши по i від 1 до n та врахувавши крайові умови (6),(7) і умови (10), (11), матимемо

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2} \right) dxdydt \leqslant (4n\mu + 1) \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2} dxdydt + \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{n} f_i^2 dxdydt\,, \tag{13}$$

де стала μ залежить від коефіцієнтів $a_{ij}\,, b_{ij}\,, c_{ij}$ і їх перших похідних за $t\,, x\,, y$. Продиференціюємо тепер кожне рівняння системи (5) за t і помножимо на $2u_{it}^{\varepsilon}$. Після інтегрування по P_T, отримаємо рівність

$$\int\limits_{P_T} \left(2u_{itt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jxt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ijt} u_{jx}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_{jyt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} \right) dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{P_T} \left(2\sum_{j=1}^{n} b_{ijt} u_{jy}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_{jt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} c_{ijt} u_j^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} \right) dxdydt =$$

$$= \int\limits_{P_T} 2\left(\varepsilon (u_{ixxt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + u_{iyyt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon}) + f_{it} u_{it}^{\varepsilon} \right) dxdydt\,,$$

яку можна подати у вигляді

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t} \left(u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) \right) dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{P_T} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{ij} u_{jt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} \right) - \sum_{j=1}^{n} a_{ijx} u_{jt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ijt} u_{jx}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} \right) dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{P_T} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y} \left(b_{ij} u_{jt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} \right) - \sum_{j=1}^{n} b_{ijy} u_{jt}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} b_{ijt} u_{jy}^{\varepsilon} u_{it}^{\varepsilon} \right) dxdydt +$$

$$+\int\limits_{P_T} 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij}u_{jt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon} + 2\sum_{j=1}^{n} c_{ijt}u_{j}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}dxdydt =$$

$$= \int\limits_{P_T} 2\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(u_{ixt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}) - \varepsilon u_{ixt}^{\varepsilon\,2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}(u_{iyt}^{\varepsilon}u_{it}^{\varepsilon}) - \varepsilon u_{iyt}^{\varepsilon\,2} + f_{it}u_{it}^{\varepsilon}\right)dxdydt\,.$$

Підсумувавши ці рівності по i від 1 до n та врахувавши обмеженість відповідних перших похідних коефіцієнтів системи (5), крайові умови (6),(7) і умови (10), (11), матимемо

$$\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T}\Bigg((7n\mu+1)\sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2} +$$

$$+n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{i}^{\varepsilon\,2}\Bigg)dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n} f_{it}^2 dxdydt\,. \qquad (14)$$

Аналогічно можемо продиференціювати кожне рівняння системи (1) по x (по y), а після цього помножити на $2u_{ix}^{\varepsilon}$ (на $2u_{iy}^{\varepsilon}$). Після інтегрування по P_T, підсумувавши отримані рівності по i від 1 до n і відповідно їх оцінивши, матимемо нерівності

$$\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T}\Bigg((6n\mu+1)\sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} +$$

$$+n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{i}^{\varepsilon\,2}\Bigg)dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n} f_{ix}^2 dxdydt\,, \qquad (15)$$

$$\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T}\Bigg((6n\mu+1)\sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2} +$$

$$+n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + n\mu\sum_{i=1}^{n} u_{i}^{\varepsilon\,2}\Bigg)dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n} f_{iy}^2 dxdydt\,. \qquad (16)$$

Якщо додати нерівності (13),(14),(15) та (16), то отримаємо

$$\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\left(u_{i}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right)dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{P_T}\left((7n\mu+1)\sum_{i=1}^{n}\left(u_{it}^{\varepsilon\,2} + u_{ix}^{\varepsilon\,2} + u_{iy}^{\varepsilon\,2} + u_{i}^{\varepsilon\,2}\right)\right)dxdydt +$$

$$+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i^2 + f_{it}^2 + f_{ix}^2 + f_{iy}^2\right)dxdydt\,.$$

Позначивши $K = 7n\mu + 1$, прийдемо до нерівності

$$\int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2}\right) dxdydt \leqslant$$
$$\leqslant K \int\limits_{P_T} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{it}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{ix}^{\varepsilon\,2} + \sum_{i=1}^{n} u_{iy}^{\varepsilon\,2}\right) dxdydt +$$
$$+ \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i^2 + f_{it}^2 + f_{ix}^2 + f_{iy}^2\right) dxdydt,$$

з якої згідно з лемою Гронуолла-Беллмана випливає оцінка

$$\int\limits_{D} \sum_{i=1}^{n} \left(u_i^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{it}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{ix}^{\varepsilon\,2}(x,y,t) + u_{iy}^{\varepsilon\,2}(x,y,t)\right) dxdy \leqslant C(T)\,,$$

що і треба було довести.

Теорема 2. *Якщо* $\varphi_i \in H^1(D)$, $f_i \in H^1_{loc}(P)$, $i = \overline{1,n}$, *і виконуються умови (10), (11), то існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (4).*

Доведення. З теореми 1 випливає, що з послідовностей $\{u_i^\varepsilon\}, i = \overline{1,n}$, можна вибрати підпослідовності, які слабко збігаються при $\varepsilon \to 0$ в просторі $H^1_{loc}(P)$ до деяких елементів $u_i(x,y,t), i = \overline{1,n}$.

Помноживши i-те рівняння системи (5) на довільну функцію v_i з простору $H^1_{loc}(P)$, що задовольняє умови (2), і проінтегрувавши по P_T, отримаємо

$$\int\limits_{P_T} \left(u_{it}^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_{jy}^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^\varepsilon\right) v_i\, dxdydt =$$
$$= \varepsilon \int\limits_{P_T} \left(u_{ixx}^\varepsilon v_i + u_{iyy}^\varepsilon v_i\right) dxdydt + \int\limits_{P_T} f_i v_i\, dxdydt \quad i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

У першому інтегралі в правій частині рівностей (17) проведемо інтегрування частинами

$$\int\limits_{P_T} \left(u_{it}^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_{jy}^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j^\varepsilon\right) v_i\, dxdydt =$$
$$= -\varepsilon \int\limits_{P_T} \left(u_{ix}^\varepsilon v_{ix} + u_{iy}^\varepsilon v_{iy}\right) dxdydt + \int\limits_{P_T} f_i v_i\, dxdydt,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{18}$$

Перейдемо тепер до границі при $\varepsilon \to 0$ в рівностях (18). Оскільки перший інтеграл в правій частині (18) обмежений для довільного $\varepsilon > 0$, то в границі він прямує до нуля.

Тому отримаємо, що $u_i, i = \overline{1,n}$, задовольняють рівності (5). Крім того, граничні функції u_i задовольняють крайові умови (2),(3) і початкові умови (4), тому згідно з означенням 1 вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Дослідимо стійкість нульового розв'язку задачі (1) – (4). Припускатимемо, що $f_i(x,y,t) \equiv 0$ для всіх $(x,y,t) \in P$.

Нехай для всіх $(x,y,t) \in P$ існує таке $c_0 \geqslant 0$, що виконується умова

$$\sum_{i,j=1}^{n} (2c_{ij} - a_{ijx} - b_{ijy})\xi_i\xi_j \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{19}$$

Теорема 3. *Якщо виконуються умови (10), (11), (19), то для нульового розв'язку задачі (1)–(4) з* $f_i(x,y,t) \equiv 0$ *справедлива така нерівність*

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} u_i^2(x,y,t)dxdy \leqslant C_3 e^{-\beta t} \int_D \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(x,y)dxdy\,, \tag{20}$$

де $0 < \beta \leqslant c_0$, *тобто розв'язок задачі стійкий за Ляпуновим, якщо* $c_0 = 0$ *та експоненціально стійкий за Ляпуновим, якщо* $c_0 > 0$.

Доведення. Візьмемо в рівностях (5) функції $v_i = 2e^{\beta t}u_i$. Проінтегрувавши отримані рівності по P_T і підсумувавши за i від 1 до n, отримаємо

$$\int_{P_T} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x,y,t)\right)dxdydt + \int_{P_T} e^{\beta t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijx}u_ju_i + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijy}u_ju_i\right)dxdydt +$$
$$+ \int_{P_T} e^{\beta t}\left(2\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}u_ju_i - \beta\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)dxdydt \leqslant 0\,,$$
$$\int_D e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x,y,t)dxdy + \int_{P_T} e^{\beta t}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} (2c_{ij} - a_{ijx} - b_{ijy})u_ju_i -$$
$$-\beta\sum_{i=1}^{n} u_i^2\Big)dxdydt \leqslant \int_D \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y)dxdy\,. \tag{21}$$

Оскільки згідно з припущеннями теореми виконується умова (19), то при $\beta \leqslant c_0$ другий інтеграл в лівій частині (12) невід'ємний і оцінивши його, отримаємо потрібну нерівність (20).

1. Ванг П.К. *Исследование устойчивости схематизированого гибкого летательного аппарата прямым методом Ляпунова*// Ракетная техника и космонавтика.– 1965. – N 9. – С.249-251.

2. Паркс П.С. *Применение второго метода Ляпунова к задаче устойчивости флаттера панели*// Ракетная техника и космонавтика.– 1966, N 1. – С.220-223.
3. A.Jeffrey, J.Kato *Liapunov's direct method in stability problems for semilinear and quasilinear hyperbolic systems*// Journal of Mathematics and Mechanics. – 1969. – Vol. 18, N 7. – P. 659-682.
4. Knut S., Eckhoff *On stability for symmetric hyperbolic systems*// Journal of Differential Equations. – 1981. – Vol. 40. – P. 94-115.
5. Елтышева Н.А. *О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости*// Матем. сб. – 1988. – Т.135 (177), N 2. – С.186-209.

Стаття надійшла до редколегії 05.02.97

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ СИЛЬНО ВИРОДЖУЮТЬСЯ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

М. М. Бокало, В. М. Сікорський

Bokalo M.M., Sikorsky V.M. A problem without initial conditions for weak nonlinear parabolic equations with strong degeneration at the initial moment of time We studied weak nonlinear parabolic equations which are defined in unbounded domains with respect to spaces variables and strongly degenerated in initial moment of time. The problems with mixed boundary conditions without initial data for these equations are investigated. The uniqueness classes of generalized solutions of this problems have been obtained. The existence of generalized solutions of a problems in classes of uniqueness when the right side of equations belongs to corresponding classes functions have been proved.

Вступ. Дана праця присвячена дослідженню існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі без початкових умов зі змішаною граничною умовою для квазілінійних параболічних рівнянь, які сильно вироджуються в початковий момент часу.

Деякі задачі без початкових умов для параболічних рівнянь та систем, що вироджуються, досліджено в працях [1-7] та ін. Для лінійних і більшості нелінійних параболічних рівнянь, які вироджуються в початковий момент часу, єдиність розв'язків задачі без початкових умов має місце в класах функцій з кваліфікованою поведінкою при $t \to 0$, а доведення існування проводиться при певних обмеженнях на зростання вихідних даних при $t \to 0$. Такого ж роду результати стосовно єдиності та існування розв'язку отримано тут для лінійних і близьких до них нелінійних рівнянь параболічного типу в необмежених за просторовими змінними областях. Для їх доведення у даній задачі зроблено відповідну заміну часової змінної t, яка приводить до задачі Фур'є (така ідея належить С.П.Лавренюку) . Ця задача досліджена методами, аналогічними тим, які використовувалися у працях [8, 9].

1. Формулювання задачі.

Нехай $Q = \Omega \times (0, T)$, де Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з некомпактною кусково - гладкою межею $\partial\Omega$, $0 < T < +\infty$. Нехай $\partial\Omega = \overline{\Gamma^{(1)}} \cup \overline{\Gamma^{(2)}}$, де $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ – відкриті або порожні

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K65.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061007

множини на поверхні $\partial\Omega$, $\Gamma^{(1)}\cap\Gamma^{(2)}=\varnothing$. Покладемо $\Sigma^{(1)}=\Gamma^{(1)}\times(0,T]$, $\Sigma^{(2)}=\Gamma^{(2)}\times(0,T]$, $\Sigma^{(0)}=\overline{\Omega}\times\{0\}=\{(x,0):x\in\overline{\Omega}\}$.

Розглянемо задачу

$$\varphi(t)u_t-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j(x,t,u,\nabla u)+a_0(x,t,u,\nabla u)=f_0(x,t)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}f_j(x,t)\quad \text{в } Q, \tag{1}$$

$$u=\psi^{(1)}\quad \text{на}\quad \Sigma^{(1)}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_j(x,t,u,\nabla u)\nu_j+au=\psi^{(2)}\quad \text{на}\quad \Sigma^{(2)}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньоі нормалі до $\partial\Omega$.

Тут і далі на вихідні дані накладаються такі умови:

1) функція $\varphi(t)$ – неперервна на $[0,T]$ і неперервно диференційовна на $(0,T]$, $\varphi(0)=0, \varphi(t)>0$ при $t>0$, $\int\limits_0^T\frac{ds}{\varphi(s)}\,ds=+\infty$.
2) функції $a_j(x,t,s,\xi)$, $j=0,1,...,n$, визначені для $(x,t)\in Q$, $s\in\mathbb{R}^1$, $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ і каратеодорівські, тобто вимірні за (x,t) для будь-яких (s,ξ) та неперервні за (s,ξ) для майже всіх $(x,t)\in Q$;
3) функції $a_j(x,t,s,\xi), j=1,...,n$, справджують локально умову Ліпшиця за (s,ξ), тобто для майже всіх $(x,t)\in Q$ і довільних $(s,\xi),(r,\eta)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$ справедлива нерівність

$$|a_j(x,t,s,\xi)-a_j(x,t,\tau,\eta)|\leqslant k_j^{(1)}(x,t)|\xi-\eta|+k_j^{(2)}(x,t)|s-r|,$$

   де $k_j^{(l)}\in L^{\infty}_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)}), k_j^{(l)}\geqslant 0$, $j=1,...,n$, $l=1,2$; $a_j(x,t,0,0)\in L^2_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, $j=1,...,n$; $(|\xi|=(\sum\limits_{l=1}^{n}\xi_l^2)^{1/2})$;
4) $a_0(x,t,s,\xi)=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j(x,t)\xi_j+c(x,t,s,\xi)$, де $b_j,(b_j)_{x_i}\in L^{\infty}_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, $i,j=1,...,n$, і для майже всіх $(x,t)\in Q$ і будь-яких $(s,\xi),(r,\eta)$ з простору $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$ справедлива нерівність (умова сильної параболічності)

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j(x,t,s,\xi)-a_j(x,t,r,\eta))(\xi_j-\eta_j)+$$
$$+(c_(x,t,s,\xi)-c_(x,t,r,\eta))(s-r)\geqslant p(x,t)|\xi-\eta|^2+q(x,t)|s-r|^2,$$

   де $p,q\in L^{\infty}_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)}), \inf\limits_{Q'}p>0$ для будь-якої обмеженої підобласті Q' області Q і $\inf\limits_{Q}(q-2^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j)_{x_j})>-\infty$;
5) $f_j\in L^2_{\rm loc}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, j=0,1,...,n ; $\psi^{(1)}\in L^2_{\rm loc}(\overline{\Sigma^{(1)}}\setminus\Sigma^{(0)})$, $\psi^{(2)}\in L^2_{\rm loc}(\overline{\Sigma^{(2)}}\setminus\Sigma^{(0)})$; $a\in L^{\infty}_{\rm loc}(\overline{\Sigma}^{(2)}\setminus\Sigma^{(0)})$, $\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\nu_j+a\geqslant 0$ на $\Sigma^{(2)}$.

Під $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\overline{G}\setminus\Sigma^{(0)})(L^{2}_{\mathrm{loc}}(\overline{G}\setminus\Sigma^{(0)}))$, де $G=Q$ або $G=\Sigma^{(l)}, l=1,2$, розуміємо простір вимірних функцій, звуження яких на довільну вимірну і обмежену підмножину множини G, яка перебуває на додатній відстані від множини $\Sigma^{(0)}$, є вимірними і обмеженими (інтегровними з квадратом) на цій підмножині функціями. Нехай $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$ – простір функцій $v\in L^{2}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, які мають узагальнені похідні $v_{x_j}\in L^{2}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, $j=1,...,n$.

Зауваження 1. Якщо виконується умова $\int\limits_0^T\frac{ds}{\varphi(s)}=+\infty$, то кажуть, що рівняння сильно вироджується в момент $t=0$, а якщо $\int\limits_0^T\frac{ds}{\varphi(s)}<+\infty$, то рівняння слабко вироджується.

Зауваження 2. Частковим випадком розглянутих тут рівнянь вигляду (1) є лінійні параболічні рівняння

$$\varphi(t)u_t-(a_{i,j}(x,t)u_{x_j})_{x_i}+b_i(x,t)u_{x_i}+q(x,t)u=f_0(x,t)-\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x,t),$$

де $a_{i,j}\xi_i\xi_j\geqslant p|\xi|^2$ для довільних $\xi\in\mathbb{R}^n;\varphi,p,b_i,i=\overline{1,n},q,f_i,i=\overline{0,n}$, такі ж як в умовах 1) - 5). Тому для цих рівнянь справедливі всі отримані тут результати.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію u з простору $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, яка справджує умову (2) (в сенсі сліду) та інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_{Q'}\{-u(\varphi\psi)_t+\sum_{j=1}^{n}a_j(x,t,u,\nabla u)\psi_{x_j}+a_0(x,t,u,\nabla u)\psi\}\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}'}au\psi\,d\Sigma=\iint\limits_{Q'}\{f_0\psi+\sum_{j=1}^{n}f_j\psi_{x_j}\}\,dxdt+\int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}'}\psi^{(2)}\psi\,d\Sigma \tag{4}$$

для довільної обмеженої підобласті Q' області Q, яка розташована на додатній відстані від множини $\Sigma^{(0)}$, і будь-яких $\psi\in C^1(\overline{Q'})$ таких, що $\psi=0$ на $\partial Q'\setminus\Sigma^{(2)}$.

Дослідимо умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).

2. Позначення і додаткові припущення.

Нехай $\{\Omega_\tau\}$ – сім'я обмежених підобластей області Ω, які залежать від параметра $\tau=(\tau_1,...,\tau_M)\in\Pi=\{\tau:\tau_j\geqslant 0, j=1,...,M\}$, де $M\in\mathbb{N}$. Припустимо, що $\Omega_\tau\subset\Omega_{\tau'}$, якщо $\tau_j\leqslant\tau'_j$, $j=1,...,M$, і $\Omega=\bigcup\limits_{\tau\in\Pi}\Omega_\tau$. Позначимо $\gamma_\tau=\partial\Omega_\tau\setminus\partial\Omega$ і припустимо, що $\gamma_\tau=\bigcup\limits_{l=1}^{M}\gamma_{\tau_l}$, де γ_{τ_l} є $(n-1)$-вимірною гіперповерхнею, яка має таку ж гладкістю, як і $\partial\Omega$, і її границя належить $\partial\Omega$. Припустимо, що для будь-якого $\hat{\tau}\in\Pi$ з $\hat{\tau}_l>0$, $l=1,...,M$, в деякому околі $\gamma_{\hat{\tau}_l}$ можна ввести локальні координати y такі, що $y_j=\psi_j(x)$, $j=1,...,n$, де функції $\psi_j(x)$ – неперервно диференційовні, $dx=\chi_l(x)dy$, гіперплощина $y_n=\tau_l$ містить γ_{τ_l} при всіх τ_l із деякого околу $\hat{\tau}_l$. Тоді існують неперервні додатні на $\overline{\Omega}\setminus\overline{\Omega}_0$ функції $h_l(x), l=1,...,M$, такі, що для будь-якої неперервної на $\overline{\Omega}$ функції v справедлива рівність

$$\frac{\partial}{\partial\tau_l}\int\limits_{\Omega_\tau}v(x)\,dx=\int\limits_{\gamma_{\tau_l}}v(x)h_l(x)\,ds,\quad \tau_l>0.$$

Нехай $\tau \in \Pi$, $t_0 \in (0,T)$. Позначимо

$$Q_{\tau,t_0} = \Omega_\tau \times (t_0,T), \quad \Gamma_\tau^{(1)} = \Gamma^{(1)} \cap \partial\Omega_\tau, \quad \Gamma_\tau^{(2)} = \Gamma^{(2)} \cap \partial\Omega_\tau,$$

$$\Sigma_{\tau,t_0}^{(1)} = \Gamma_\tau^{(1)} \times (t_0,T], \quad \Sigma_{\tau,t_0}^{(2)} = \Gamma_\tau^{(2)} \times (t_0,T], \quad S_{\tau_l,t_0} = \gamma_{\tau_l} \times (t_0,T], \quad S_{\tau,t_0} = \bigcup_{l=1}^{M} S_{\tau_l,t_0}.$$

Нехай

$$d_{1,l}(\tau_l,t_0) = \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left(\sum_{j=1}^{n} [k_j^{(1)}(x,t)]^2/[p(x,t)h_l(x)] \right)^{1/2},$$

$$d_{2,l}(\tau_l,t_0) = \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} [k_j^{(2)}(x,t)]^2 \right)^{1/2} - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} b_j \nu_j \right),$$

де $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньоі нормалі до γ_{τ_l}, $\tau_l > 0, l = 1,...,M$, $0 < t_0 < T$.

Візьмемо дійсне число μ таке, що $q - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j)_{x_j} + \mu \geqslant 0$ на Q у випадку, коли $\Gamma_\tau^{(1)} \neq \varnothing$ для кожного $\tau \in \Pi$, і $q - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j)_{x_j} + \mu > 0$ на Q в протилежному випадку, і покладемо

$$E_\mu(v) = p|\nabla v|^2 + (q - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} (b_j)_{x_j} + \mu)|v|^2;$$

$$\lambda_l(\tau_l,t_0) = \inf_{t,v} \left\{ \left[\int_{\gamma_{\tau_l}} E_\mu(v) h_l d\gamma \right] \left[\int_{\gamma_{\tau_l}} v^2 \, d\gamma \right]^{-1} \right\}, \quad \tau_l > 0, \; 0 < t_0 < T.$$

де нижня грань береться по всіх неперервно диференційовних в околі γ_{τ_l} функціях v, які дорівнюють нулю на $\partial\gamma_{\tau_l} \cap \Gamma^{(1)}$, і всіх $t \in [t_0,T], l = 1,...,M$;

$$\Theta(\tau,t_0) = \inf_{v} \left\{ \left[\int_{\Omega_\tau} E_\mu(v)|_{t=t_0} \, dx \right] \left[\int_{\Omega_\tau} v^2 \, dx \right]^{-1} \right\},$$

де нижня грань береться по всіх функціях v, які належать простору $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ і дорівнюють нулю в околі $\Gamma_\tau^{(1)}$.

Додатково припустимо таке:

6) існують неперервні функції $A_0(\tau,t_0) > 0$, $A_{\tau_l}(\tau_l,t_0) > 0$, $l = 1,...,M$, $(\tau = (\tau_1,...,\tau_M) \in \Pi$, $0 < t_0 \leqslant T)$, такі, що

$$d_{1,l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1/2}(\tau_l,t_0) + d_{2,l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1}(\tau_l,t_0) \leqslant A_l(\tau_l,t_0), \; l = 1,...,M,$$

$$2^{-1}\Theta^{-1}(\tau, t_0) \leqslant A_0(\tau, t_0),$$

і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tau_l}{d\alpha} = A_l(\tau_l, t_0),\ l = 1, ..., M, \quad \frac{dt_0}{d\alpha} = -\varphi(t_0) A_0(\tau, t_0),$$

$$\tau_l(0) = 0, \quad l = 1, ..., M, \qquad t_0(0) = T$$

має єдиний розв'язок $\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha), ...\tau_M(\alpha)$, $t_0(\alpha)$, визначений на $[0, \infty)$ і такий, що $\tau_l(\alpha) \to +\infty$, $l = 1, ..., M$, $t_0(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Далі під $\tau_1(\alpha), ..., \tau_M(\alpha), t_0(\alpha)$ завжди будемо розуміти цей розв'язок.
Покладемо

$$Q_\alpha = Q_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}, \quad \Sigma^{(1)}_\alpha = \Sigma^{(1)}_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}, \quad \Sigma^{(2)}_\alpha = \Sigma^{(2)}_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}, \quad S_\alpha = S_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}.$$

Введемо простір $\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha) = \{v |\, v \in W_2^{1,0}(Q_\alpha), v = 0 \text{ на } \Sigma^{(1)}_\alpha\}$ і норму в ньому

$$\langle v \rangle_\alpha = \left(\iint\limits_{Q_\alpha} \frac{E_\mu(v)}{\varphi(t)} \exp\{2\mu \int\limits_t^T \frac{ds}{\varphi(s)}\} dxdt \right)^{1/2}.$$

На підставі наших припущень, як випливає з [8], норма $\langle v \rangle_\alpha$ в просторі $\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha)$ еквівалентна нормі

$$\|v\|_\alpha = \left(\iint\limits_{Q_\alpha} [v^2 + |\nabla v|^2] dxdt \right)^{1/2}.$$

Перейдемо до формулювання основних результатів. При цьому завжди будемо вважати, що виконуються умови 1) – 6).

3. Формулювання основних результатів.

Сформулюємо твердження, яке є аналогом відомого в механіці принципу Сен-Венана.

Теорема 1. *Нехай $R^* > 0$ і $u_1(x, t), u_2(x, t)$ – функції з $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$, які збігаються на $\Sigma^{(1)}_{R^*}$ та справджують інтегральну тотожність (4) при умові, що $Q' \subset Q_{R^*}$. Тоді для будь-яких R_1, R_2 таких, що $0 < R_1 < R_2 \leqslant R^*$, справедлива оцінка*

$$\langle u_1 - u_2 \rangle_{R_1} \leqslant \exp\{(R_1 - R_2)/2\} \langle u_1 - u_2 \rangle_{R_2}.$$

Із цієї теореми легко випливає теорема про єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).

Теорема 2. *В класі функцій u з $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}\setminus\Sigma^{(0)})$, які справджують умову*

$$\iint\limits_{Q_R}\frac{E_\mu(u)}{\varphi(t)}\exp\{2\mu\int\limits_t^T\frac{ds}{\varphi(s)}\}\,dxdt=o(1)\exp\{R\}\quad \textit{при}\quad R\to+\infty,$$

узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) єдиний.

Існування узагальненого розв'язку задачі (1)- (3) досліджено в припущенні, що умови (2), (3) однорідні, тобто мають вигляд

$$u=0\quad \text{на}\quad \Sigma^{(1)}, \tag{2_0}$$

$$\sum_{j=1}^n a_j(x,t,u,\nabla u)\nu_j+au=0\quad \text{на}\quad \Sigma^{(2)}, \tag{3_0}$$

і права частина системи (1) справджує певні умови зростання на нескінченності.

Перш ніж формулювати теорему існування, введемо ще деякі позначення. Для кожного $k\in\mathbb{N}$ покладемо $\Omega_k=\Omega_{\tau(k)},\Gamma^{(l)}_k=\Gamma^{(l)}_{\tau(k)}, l=1,2, t_k=t_0(k)$,

$$\Lambda_k=\inf_{t,v}\left\{\left[\int\limits_{\Omega_k}E_\mu(v)\,dx\right]\left[\int\limits_{\Omega_k}v^2\,dx\right]^{-1}\right\},$$

де інфімум береться по всіх функціях v, які належать простору $C^1(\overline{\Omega_k})$ і дорівнюють нулю на $\Gamma^{(1)}_k$, та всіх $t\in[t_k,T]$; $\quad p_k=\inf\limits_{Q_k}p(x,t)>0$.

Теорема 3. *Нехай існують числа $C>0$ і $\varepsilon>0$ такі, що для довільних $k\in\mathbb{N}$*

$$\Lambda_k^{-1}\iint\limits_{Q_k}\frac{[f_0(x,t)-a_0(x,t,0,0)]^2}{\varphi(t)}\exp\{2\mu\int\limits_t^T\frac{ds}{\varphi(s)}\}\,dxdt+$$

$$+p_k^{-1}\iint\limits_{Q_k}\sum_{j=1}^n\frac{[f_j(x,t)-a_j(x,t,0,0)]^2}{\varphi(t)}\exp\{2\mu\int\limits_t^T\frac{ds}{\varphi(s)}\}\,dxdt\leqslant C\exp(1-\varepsilon)k.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок u задачі $(1),(2_0),(3_0)$ з класу єдиності, вказаному в теоремі 2. Більше того, цей розв'язок справджує оцінку

$$<u>_k\leqslant C_0\exp\{(1-\varepsilon)k/2\},$$

де $C_0>0$ – стала, яка залежить тільки від C і ε.

Доведення основних результатів.
Зробимо в інтегральній тотожності (4) заміну змінної t на σ за правилом

$$\sigma = \int\limits_T^t \frac{ds}{\varphi(s)}. \tag{5}$$

В результаті, позначивши через $\tilde{u}(x,\sigma)$, $\tilde{\varphi}(\sigma)$, $\tilde{a}_j(x,\sigma,s,\xi)$ $\tilde{f}_j(x,\sigma), j = 0,1,...,n$, $\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^{(1)}$, $\tilde{\psi}^{(2)}$ функції, отримані при вказаній заміні відповідно з u, φ, a_j, f_j, $j = 1,...,n, \psi, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ і зауваживши, що $dt = \tilde{\varphi}(\sigma)\,d\sigma$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\varphi}(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\sigma}$, приходимо до тотожності

$$\iint\limits_{\tilde{Q}'} \{-\tilde{u}(\tilde{\varphi}\tilde{\psi})_\sigma[\tilde{\varphi}]^{-1} + \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}_{x_j} + \tilde{a}_0(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}\}\tilde{\varphi}\,dxd\sigma +$$
$$+ \int\limits_{\tilde{\Sigma}^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{a}\tilde{u}\tilde{\psi}\tilde{\varphi}\,d\Sigma = \iint\limits_{\tilde{Q}'} \{\tilde{f}_0\tilde{\psi} + \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j\tilde{\psi}_{x_j}\}\tilde{\varphi}\,dxd\sigma + \int\limits_{\tilde{\Sigma}^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{\psi}^{(2)}\tilde{\psi}\tilde{\varphi}\,d\Sigma \tag{6}$$

для довільної обмеженої підобласті $\tilde{Q}'$ області $\tilde{Q}$ і будь-яких $\tilde{\psi} \in C^1(\overline{\tilde{Q}'})$ таких, що $\tilde{\psi} = 0$ на $\partial\tilde{Q}' \setminus \tilde{\Sigma}^{(2)}$.

Тут $\tilde{Q} = \Omega \times (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,\sigma}$, $\tilde{\Sigma}^{(1)} = \Gamma^{(1)} \times (-\infty, 0]$, $\tilde{\Sigma}^{(2)} = \Gamma^{(2)} \times (-\infty, 0]$. Очевидно, що функція $\tilde{u}(x,\sigma)$ належить простору $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\tilde{Q}})$ (означення цього простору див.[8]) і задовольняє (в сенсі сліду) умову

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}^{(1)} \quad \text{на} \quad \tilde{\Sigma}^{(1)}. \tag{$\tilde{2}$}$$

Відмітимо, що відображення простору $\{\tilde{\psi} : \tilde{\psi} \in C^1(\overline{\tilde{Q}'}),\ \tilde{\psi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tilde{Q}' \setminus \tilde{\Sigma}^{(2)}\}$ у той же простір, при якому кожній функції $\tilde{\psi}$ ставиться у відповідність функція $\tilde{\psi}\tilde{\varphi}$, є бієктивним. Тому, з (6), взявши $\tilde{\psi}[\tilde{\varphi}]^{-1}$ замість $\tilde{\psi}$, отримаємо

$$\iint\limits_{\tilde{Q}'} \{-\tilde{u}\tilde{\psi}_\sigma + \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}_{x_j} + \tilde{a}_0(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u})\tilde{\psi}\}\,dxd\sigma +$$
$$+ \int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{a}\tilde{u}\tilde{\psi}\,d\Sigma = \iint\limits_{\tilde{Q}'} \{\tilde{f}_0\tilde{\psi} + \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j\tilde{\psi}_{x_j}\}\,dxd\sigma + \int\limits_{\tilde{\Sigma}^{(2)}\cap\overline{\tilde{Q}'}} \tilde{\psi}^{(2)}\tilde{\psi}\,d\tilde{\Sigma} \tag{7}$$

для довільної обмеженої підобласті $\tilde{Q}'$ області $\tilde{Q}$ і будь-яких $\tilde{\psi} \in C^1(\overline{\tilde{Q}'})$ таких, що $\tilde{\psi} = 0$ на $\partial\tilde{Q}' \setminus \tilde{\Sigma}^{(2)}$.

Звідси та з [8, 9] випливає, що функція $\tilde{u}$ є узагальненим розв'язком задачі

$$\tilde{u}_\sigma - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j}\tilde{a}_j(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u}) + \tilde{a}_0(x,\sigma,\tilde{u},\nabla\tilde{u}) = \tilde{f}_0(x,\sigma) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{f}_j(x,\sigma) \quad \text{в} \quad \tilde{Q}, \tag{$\tilde{1}$}$$

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}^{(1)} \quad \text{на} \quad \tilde{\Sigma}^{(1)}, \tag{$\tilde{2}$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j(x, \sigma, \tilde{u}, \nabla\tilde{u})\nu_j + a\tilde{u} = \tilde{\psi}^{(2)} \quad \text{на} \quad \tilde{\Sigma}^{(2)}. \tag{$\tilde{3}$}$$

Неважко перевірити, що задача $(\tilde{1}), (\tilde{2}), (\tilde{3})$ є частковим випадком задачі (1)-(3) праці [9] (див. також [8]) і для неї виконані всі без винятку умови теорем 1-3 цієї праці. Звідси, оскільки кожному розв'язку u задачі (1)-(3) відповідає розв'язок $\tilde{u}$ задачі $(\tilde{1}) - (\tilde{3})$ і навпаки, отримаємо твердження теорем 1-3 даної праці. Відмітимо, що з цих міркувань та результатів [9], як наслідок, отримаємо такий факт: узагальнений розв'язок u задачі (1)-(3) є границею сильно збіжної у $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$ послідовності $\{u_k\}$, де u_k – продовжений нулем поза Q_k узагальнений розв'язок (означення аналогічне як у [9]) змішаної задачі (в Q_k)

$$\varphi(t)u_{kt} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j(x,t,u_k,\nabla u_k) + a_0(x,t,u_k,\nabla u_k) = f_0(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(x,t) \text{ в } Q_k,$$

$$u_k = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t,u_k,\nabla u_k)\nu_j + au_k = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(2)},$$

$$u_k|_{t=t_k} = 0.$$

Приклад. Отримані результати проілюструємо на простому прикладі. Нехай $\Omega = \{(x_1, x_2) \ : \ 0 < x_1 < \pi, -\infty < x_2 < \infty\}$. Розглянемо в області $Q = \Omega \times (0,T)$ задачу

$$t\,u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q, \quad u|_{x_1=0} = 0, \quad u_{x_1}|_{x_1=\pi} = 0,$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q} \setminus \Sigma^{(0)})$. Як легко бачити, для даної задачі умови 1) - 5) виконуються з $k_j^{(1)} = 1, k_j^{(2)} = 0$, $p = 1, q = 0$. Покладемо $\tau = (\tau_1, \tau_2), \Omega_\tau = \{(x_1,x_2) | 0 < x_1 < \pi, -\tau_1 - 1 < x_2 < \tau_2 + 1\}$ $(\tau_1 \geqslant 0, \tau_2 \geqslant 0)$. Очевидно, що $h_1(x) = h_2(x) = 1$, $d_{1,l} = \sqrt{2}$, $d_{2,l} = 0$. Візьмемо $\mu = 0$. Тоді $E_\mu(v) = |\nabla v|^2$, $\lambda_l(\tau_l, t_0) = 1/4$, $l = 1,2$, $\Theta(\tau, t_0) = 1/4$, і, як наслідок, виконується умова 6), причому $A_l(\tau_l, t_0) = 2\sqrt{2}, A_0(\tau, t_0) = 2$. Тоді $\tau_l(\alpha) = 2\sqrt{2}\alpha, l = 1, ..., M$, $t_0(\alpha) = T\exp\{-2\alpha\}, Q_R = \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < \pi, -2\sqrt{2}R - 1 < x_2 < 2\sqrt{2}R + 1, T\exp\{-2R\} < t < T\}$. Таким чином, клас єдиності узагальненого розв'язку даної задачі (див. теорему 2) визначається умовою

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{|\nabla v|^2}{t}\, dxdt = o(1)\exp\{R\} \quad \text{при } R \to +\infty.$$

Відмітимо, що дана задача при $f = 0$ має розв'язок вигляду $u_A = \dfrac{A}{t^{1/4}} \sin\dfrac{x_1}{2}$, де A – довільна стала. Як легко бачити,

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{|\nabla u_A|^2}{t}\, dxdt = \frac{\pi A^2 (2\sqrt{2}R + 1)}{2\sqrt{T}} (\exp\{R\} - 1) = O(R)\exp\{R\} \text{ при } R \to \infty.$$

Звідси випливає, зокрема, що отриманий нами клас єдиності узагальненого розв'язку даної задачі близький до точного.

З теореми 3, врахувавши, що в даному випадку $\Lambda_k = 1/4, p_k = 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, випливає, що коли існують числа $C > 0, \varepsilon > 0$ такі, що

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{f^2(x,t)}{t}\,dxdt \leqslant C\exp\{(1-\varepsilon)R\},$$

то існує узагальнений розв'язок з класу єдиності і він справджує оцінку

$$\iint\limits_{Q_R} \frac{|\nabla u|^2}{t}\,dxdt = C_0\exp\{(1-\varepsilon)R\}.$$

1. Олейник О.А.,Радкевич Е.В.*Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*// Итоги науки.– Матем. анализ. 1969.М.-1971.-243с.
2. Калашников А.С. *Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка*// Вестник МГУ. Сер. матем.- 1971.-I.-N2.- С.42-48. -II.- N3.- С.3-8.
3. Иванов А.В.*Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка*// Труды Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР.-1982.- т.160.-С.3-285.
4. Глаголева Р.Я.*О классах единственности и устойчивости решений вырождающихся квазилинейных уравнений параболического типа в задаче без начальных условий*// Диффер. уравнения.- 1985.-Т.21, N8.- С.1376-1389.
5. Лавренюк С.П.*Змішана задача з видозміненими початковими умовами для однієї еволюційної системи, яка вироджується у початковий момент часу* // Доповіді АН України. Матем., природозн., техн. науки.-1993.- N 6. - С. 12-15.
6. Лавренюк С.П. *Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы*// Дифференц. уравн.- 1994. - Т. 30, N 8. - С. 1405 - 1411.
7. Пукач П.Я.*Задачі для нелінійних параболічних рівнянь з виродженням*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат.-1991. – Вип.36.- С.6-10.
8. Бокало М.М.*Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений*// Дифференц. уравн. - 1994.- Т. 30, N8,- С.1395-1402.
9. Сікорський В.М. *Задача Фур'є зі змішаною граничною умовою для систем квазілінійних параболічних рівнянь* // Вісник Львів. ун-ту. Сер.мех-мат.-1996.-Вип.45.-С.45-56.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.97

УДК 517.95

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

М. О. Колінько, С. П. Лавренюк

Kolinko M.O., Lavrenyuk S.P. Existence of a solution for a nonlinear pseudoparabolic system. Existence of weak solution of the initial boundary value problem for a pseudoparabolic system was studied. Some sufficient conditions were obtained. The problem is considered in a bounded domain with respect to space variables and with zero boundary values.

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (t_0, T)$, $T < \infty$; $S_T = \partial\Omega \times (t_0, T)$. Розглянемо в Q_T систему рівнянь

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_t + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} H_\alpha(x,t) D^\alpha u -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_i t})_{x_i} + \mathcal{B}(u) + G(x,t)u = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \tag{1}$$

з крайовими

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \dots, l-1, \tag{2}$$

і початковою

$$u(x, t_0) = 0 \tag{3}$$

умовами, де $\mathcal{B}(u) = -\sum\limits_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i)_{x_i}$; $l \geqslant 1$; $A_{\alpha\beta}$, B_{ij}, H_α, G – квадратні матриці розміру $N \times N$; $C_i(x) = \mathrm{diag}\{c_1^i(x), \dots, c_N^i(x)\}$, $i = 1, \dots, n$; $\theta_i = \mathrm{colon}(|u_{1,x_i}|^{p-2} u_{1,x_i}, \dots, |u_{N,x_i}|^{p-2} u_{N,x_i})$, $i = 1, \dots, n$; $p > 2$; $u = \mathrm{colon}(u_1, \dots, u_N)$; $F_\alpha = \mathrm{colon}(f_{1\alpha}, \dots, f_{N\alpha})$, $|\alpha| \leqslant 1$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n;$$

ν – зовнішня нормаль до S_T. Метою даної праці є встановлення умов існування узагальненого розв'язку задачі (1) – (3). Зауважимо, що мішані задачі для лінійних і нелінійних псевдопараболічних рівнянь і систем досліджено раніше багатьма авторами [1 – 8].

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (A), (B), (C), (G), якщо:

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K70.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061062

Умова (A). $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l;$

$$\int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta w, D^\alpha w)dx \geqslant a_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w|^2 dx, \ a_0 > 0, \forall w \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N.$$

Умова (B). $B_{ij}(x,t), B_{ijt}(x,t) \in L^\infty(Q_T)$; $B_{ij}(x,t) = B_{ji}(x,t)$; $B_{ij}(x,t) = B_{ij}^*(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$;

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \geqslant b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad b_0 > 0$$

для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}^N$ *і майже для всіх* $(x,t) \in Q_T$.

Умова (C). $C_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$; $c_k^i(x) \geqslant c_0 > 0$ *майже для всіх* $x \in \Omega$, $j = 1,\dots,n$; $k = 1,\dots,N$.

Умова (G). $G \in L^\infty(Q_T)$; $\quad (G(x,t)\xi,\xi) \geqslant g_0(t)|\xi|^2$, $g_0 \in L^\infty(-\infty,T)$ *для всіх* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *і майже для всіх* $(x,t) \in Q_T$.

Тут через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^N$. Позначимо через V рефлексивний банахів простір $V = (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N$. Очевидно, справедливі неперервні вкладення $V \subset (L^2(\Omega))^N \subset V^*$, де $V^* = (H^{-l}(\Omega))^N + (W^{-1,q}(\Omega))^N$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Надалі будуть використовуватися нерівності Фрідріхса ([8], с.50)

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2 dx \leqslant \gamma_{l,j} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx,$$

$j = 0,\dots,l$, справедливі для будь-яких $v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$, де сталі $\gamma_{l,j}$ залежать від Ω, l, n. Введемо такі позначення:

$$h_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \|H_\alpha(x,\tau)\|^2; \quad g_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_0(t) \geqslant 0, \\ g_0(t), & \text{якщо} \quad g_0(t) < 0. \end{cases}$$

Означення. *Функцію* $u(x,t)$, *яка задовольняє включення*

$$u \in L^2_{loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N) \cap L^p_{loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N), \ u_t \in L^2_{loc}((-\infty,T); (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$$

і рівність

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[(u_t, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)u_{x_i t}, v_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (C_i(x)\theta_i, v_{x_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + (G(x,t)u,v) \Bigg] dxdt = \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v) dxdt \qquad (4)$$

для довільної функції $v \in (C_0^\infty(Q_T))^N$, *називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).*

Теорема. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (G) і, крім того,* $F_\alpha(x,t) \in L^2(Q_{t_0,T})$, $|\alpha| \leqslant 1$; $H_\alpha(x,t) \in L^\infty(Q_{t_0,T})$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$; $A_{\alpha\beta}(x) = A_{\beta\alpha}(x)$; $A_{\alpha\beta}(x) = A^*_{\alpha\beta}(x)$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l$, $\partial G \in C^l$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).*

Доведення. Виберемо у просторі V базис $\{\varphi^k(x)\}$ і розглянемо послідовність

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} z_k^m(t)\varphi^k(x), \quad m = 1,2,\ldots,$$

де функції $z_1^m(t),\ldots,z_m^m(t)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\int\limits_\Omega \Bigg[(u_t^m,\varphi^k) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u^m, D^\alpha\varphi^k) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u^m_{x_it},\varphi^k_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\Theta_i^m,\varphi^k_{x_i}) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha u^m,\varphi^k) + (G(x,t)u^m,\varphi^k)\Bigg]dx = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha\varphi^k)dx, \qquad (5)$$

$$z_k^m(t_0) = 0, \quad k = 1,\ldots,m, \qquad (6)$$

де $\Theta_i^m = \operatorname{colon}(|u^m_{1,x_i}|^{p-2}u^m_{1,x_i},\ldots,|u^m_{N,x_i}|^{p-2}u^m_{N,x_i})$. Зробимо у системі (5) заміну $u^m(x,t) = v^m(x,t)e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$. Тоді $u_t^m(x,t) = v_t^m(x,t)e^{\lambda t} + \lambda v^m(x,t)e^{\lambda t}$, $\varkappa_i^m = e^{\lambda(p-2)t}\operatorname{colon}(|v^m_{1,x_i}|^{p-2}v^m_{1,x_i},\ldots,|v^m_{N,x_i}|^{p-2}v^m_{N,x_i})$, а задача (5), (6) набуде вигляду

$$\int\limits_\Omega \Bigg[(v_t^m,\varphi^k) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)(x)D^\beta v^m, D^\alpha\varphi^k) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^m_{x_it},\varphi^k_{x_j}) +$$

$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^m_{x_i},\varphi^k_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\varkappa_i^m,\varphi^k_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m,\varphi^k) + \qquad (7)$$

$$+((G(x,t)+\lambda E)v^m,\varphi^k)\Bigg]dx = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha\varphi^k)e^{-\lambda t}dx,$$

$$v_k^m(t_0) = 0, \quad k = 1,\ldots,m. \qquad (8)$$

Помножимо кожне рівняння системи (7) відповідно на функцію $z_k^m(t)\exp(-\lambda t)$, додамо їх і проінтегруємо по проміжку $[t_0,\tau]$. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Bigg[(v_t^m,v^m) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^m, D^\alpha v^m) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^m_{x_it},v^m_{x_j}) +$$

$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^m_{x_i},v^m_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\varkappa_i^m,v^m_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m,v^m) + \qquad (9)$$

$$+((G(x,t)+E)v^m,v^m)\Bigg]dxdt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha v^m)e^{-\lambda t}dxdt.$$

Тепер, враховуючи умови (8) та умови теореми, перетворимо і оцінимо кожний доданок рівності (9) окремо. Матимемо:

$$\Im_1 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (v_t^m, v^m)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v^m|^2 dx, \quad \Omega_\tau = Q_\tau \cap \{t = \tau\};$$

$$\Im_2 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}D^\beta v^m, D^\alpha v^m)dxdt \geqslant a_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^m|^2 dxdt;$$

$$\Im_3 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} [(B_{ij}(x,t)v^m_{x_i t}, v^m_{x_j}) + \lambda(B_{ij}(x,t)v^m_{x_i}, v^m_{x_j})]dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,\tau)v^m_{x_i}, v^m_{x_j})dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} ((2\lambda B_{ij}(x,t) - B_{ijt}(x,t))v^m_{x_i}, v^m_{x_j})dxdt.$$

Нехай λ таке число, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} ((2\lambda B_{ij}(x,t) - B_{ijt}(x,t))\xi_i, \xi_j) \geqslant h_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$$

майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \ldots, n$, де $h_1 = 2h_0(T){a_0}^{-1}\gamma_{1,0} \sum\limits_{j=1}^{l} \gamma_{l,j}$. Тоді

$$\Im_3 \geqslant \frac{b_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v^m_x|^2 dx + \frac{h_1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |v^m_x|^2 dxdt.$$

Далі

$$\Im_4 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\varkappa_i^m, v^m_{x_i})dxdt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} e^{\lambda(p-2)t} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} c_k^i(x)|v^m_{k,x_i}|^p dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \mu_3 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} e^{\lambda(p-2)t}|v^m_x|^p dxdt, \quad \mu_3 > 0;$$

$$\Im_5 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m, v^m)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\delta_0 h_0(t)\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v^m|^2 + \frac{1}{\delta_0}\gamma_{1,0}|v^m_x|^2\right]dxdt.$$

Вибравши $\delta_0 = a_0\left(2h_0(t)\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right)^{-1}$, отримаємо оцінку

$$\Im_5 \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\frac{a_0}{2}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v^m|^2 + 2h_0(t){a_0}^{-1}\gamma_{1,0}\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}|v^m_x|^2\right]dxdt.$$

Нехай, крім того, λ таке, що $((G(x,t) + \lambda E)\xi, \xi) \geqslant 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$. Тоді

$$\Im_6 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} ((G(x,t) + \lambda E)v^m, v^m)dxdt \geqslant 0.$$

Нарешті,

$$\Im_7 \leqslant \frac{(\gamma_{l,0} + \gamma_{l,1})}{a_0} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 e^{-2\lambda t} dxdt + \frac{a_0}{4} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^m|^2 dxdt.$$

Отже, на підставі оцінок інтегралів $\Im_1, \dots, \Im_7$, з рівності (9) ми отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (|v^m|^2 + b_0|v_x^m|^2)dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[a_0 \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^m|^2 + 2\mu_3 e^{\lambda(p-2)t_0} |v_x^m|^p\right] dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \mu_4 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 e^{-2\lambda t} dxdt \tag{10}$$

для всіх $\tau \in [t_0, T]$. Крім того, легко бачити, що

$$\mathcal{B}(v^m \exp(\lambda t)) = -\left(\sum_{i=1}^n C_i(x) \varkappa_i^m\right)_{x_i}$$

обмежений у просторі $L^q((t_0,T); (W^{-1,q}(\Omega))^N)$.

Помножимо тепер кожне рівняння системи (7) відповідно на функцію $z_{kt}^m(t)e^{-\lambda t}$, додамо їх і проінтегруємо по проміжку $[t_0, \tau]$. Від отриманого результату віднімемо рівність (9), помножену на λ. Після виконання цих операцій будемо мати рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[(v_t^m, v_t^m) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^m, D^\alpha v_t^m) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v_{x_i t}^m, v_{x_j t}^m) +$$
$$+\lambda \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v_{x_i}^m, v_{x_j t}^m) + \sum_{i=1}^m (C_i(x)\varkappa_i^m, v_{tx_i}^m) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^m, v_t^m) + \tag{11}$$
$$+((G(x,t) + \lambda E)v^m, v_t^m)\Big] dxdt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v_t^m)e^{-\lambda t} dxdt.$$

Знову перетворюючи і оцінюючи кожний доданок рівності (11) на підставі умов теореми та оцінки (10), отримаємо нерівності

$$\|v^m\|_{L^\infty((t_0,T);V)} \leqslant \mu_8, \quad \|v_t^m\|_{L^2((t_0,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)} \leqslant \mu_8, \tag{12}$$

причому стала μ_8 не залежить від m. Отже, згідно з оцінками (10), (12) з послідовності $\{v^m(x,t)\}$ можна виділити таку підпослідовність $\{u^{m_k}(x,t)\}$, що $v^{m_k}(x,t) \to v(x,t)$ $*$ – слабко в $L^\infty((t_0,T);V)$; $v_t^{m_k}(x,t) \to v_t(x,t)$ слабко в $L^2((t_0,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$; $\mathcal{B}(v^{m_k}\exp(\lambda t)) \to \mathcal{Z}_\lambda$ слабко в $L^q((t_0,T);(W^{-1,q}(\Omega))^N)$, коли $m_k \to \infty$. Легко показати, що

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \Bigg[(v_t,w) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v, D^\alpha w) + \sum_{i,j=1}^{m}(B_{ij}(x,t)v_{x_i t}, v_{x_j}) +$$

$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v_{x_i},v_{x_j}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v, w) + ((G(x,t)+\lambda E)v,w)\Bigg]dxdt+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{T}\langle\mathcal{Z},w\rangle dt = \int\limits_{Q_{t_0,T}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t),D^\alpha w)e^{-\lambda t})dxdt$$

для довільної функції $w \in (C_0^\infty(Q_{t_0,T}))^N$. Крім того, оскільки $v \in L^2((t_0,T);V)$, $v_t \in L^2((t_0,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$, то на підставі теореми 1.17 ([8], c.177) $v \in C([t_0,T];(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$. Тому $v(x,t_0) = 0$. На підставі монотонності оператора $\mathcal{B}$ маємо, що $\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{B}(v\exp(\lambda t))$. Отже, $u(x,t) = v(x,t)\exp(\lambda t)$ буде узагальненим розв'язком задачі (1) – (3) і теорему доведено.

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і у випадку ненульової початкової умови $u(x,t_0) = \varphi(x)$, коли $\varphi \in (L^2(\Omega))^N$.

1. Ting T.W. *Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations*// J. Math. Soc. Japan. – 1969. – Vol. 21, N 3. – P. 440–453.
2. Gopala Rao V.R., Ting T.W. *Initial-value problems for pseudoparabolic partial differential equations*// Indiana Univ. Math. J. – 1973. – Vol.23, N 2. – P. 131–153.
3. Showalter R.E. *Partial differential equations of Sobolev-Galpern type*// Pacif. J. Math. – 1969. – Vol. 31, N 3. – P. 787–793.
4. Rundell W. *The solution of initial-boundary value problem for pseudoparabolic partial differential equations*// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1976. – A74. – P.311–326.
5. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable*// J. Different. Equat. – 1972. – Vol. 12, N 3. – P. 559–565.
6. Ford W.H. *Galerkin approximations to non-linear pseudoparabolic partial differential equations*// Aequet. math. – 1976. – Vol. 14, N 3. – P. 271–291.
7. Ляшко С.И. *Аналог метода Галеркина для решения псевдопараболических уравнений*// Доп. АН УРСР. – 1991. – N 8. – C. 59–60.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
9. Лионс Ж.- Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.96

УДК 517.956

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Г. І. Берегова

Beregova G. I. The inverse problem for a hyperbolic equation of the second order. In a rectangle $P_T = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ the inverse problem for the strictly hyperbolic equation is considered at an unknown right part. The additional information about a solution of the equation is given in the integral form. With the help of the characteristics method the theorems of existence and uniqueness of the solution of problem for local t are proved.

У праці досліджено обернену задачу з невідомим множником при вільному члені правої частини гіперболічного рівняння другого порядку на прямій. Додаткову умову задано в інтегральній формі. Обернені задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку досліджувались у працях [1-4, 10-11]. Ці праці присвячені, в основному, задачам визначення одного з коефіцієнтів при u_{x_i} або u. Деякі задачі знаходження незалежних від часової змінної правих частин гіперболічних рівнянь та систем розглянуті в [3, 5, 8–10]. Зокрема, в [12] досліджено обернену задачу для хвильового рівняння з невідомою правою частиною $f(t)$ і додатковою умовою $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma(\xi) = -4\pi g_0(t)$. За допомогою методу Фур'є у частковому випадку доводено існування та єдиність узагальненого і класичного розв'язків задачі.

Розглянемо в прямокутнику $P_T = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$ строго гіперболічне рівняння другого порядку

$$u_{tt} + a_1(x,t)u_{xt} + a_2(x,t)u_{xx} = b_1(x,t)u_t + b_2(x,t)u_x + b(x,t)u + f(t)g(x,t), \tag{1}$$

в якому окрім функції $u(x,t)$ невідомою є також і функція $f(t)$. Задамо початкові умови

$$u(x,0) = \beta_1(x), \qquad u_t(x,0) = \beta_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

граничні умови $(c_1 = 0,\ c_2 = l)$

$$u_x(c_i,t) = \nu_i(t), \quad i = 1,2, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та додаткову умову

$$\int\limits_0^l \alpha(x,t)u(x,t)\, dx = h(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L20.

Надалі вважатимемо, що $\lambda_1(x,t) < 0 < \lambda_2(x,t)$, $\quad (x,t) \in P_T$, де λ_1 і λ_2 – дійсні корені відповідного характеристичного рівняння $\lambda^2 + a_1(x,t)\lambda + a_2(x,t) = 0$.

Користуючись методикою праці [13], зведемо рівняння (1) до системи рівнянь першого порядку в припущенні, що функція $u(x,t)$ є двічі неперервно диференційовна в $\overline{P}_T$, а $f \in C([0,T])$ і справджуються рівності (1)-(4). Введемо функції

$$v_i(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_{3-i}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad i = 1,2. \tag{5}$$

Перепишемо рівняння (1) у вигляді системи

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = \left[b_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + \left(b_2(x,t) - \frac{\partial \lambda_{3-i}}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial \lambda_{3-i}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,t)\right]u + \\ + f(t)g(x,t), \qquad i = 1,2. \tag{6}$$

З позначень (5) також випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)}v_1(x,t) - \frac{1}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)}v_2(x,t), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\lambda_1(x,t)}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)}v_1(x,t) - \frac{\lambda_2(x,t)}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)}v_2(x,t). \end{aligned} \tag{7}$$

На підставі рівності $u(x,t) = u(x,0) + \int\limits_0^t \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau$ та умов (2), (7), отримаємо зображення розв'язку

$$u(x,t) = \beta_1(x) + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_0^t A_j(x,\tau)v_j(x,\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in \overline{P}_T, \tag{8}$$

де $A_j(x,\tau) = (-1)^{j+1}\lambda_j(x,\tau)/(\lambda_1(x,\tau) - \lambda_2(x,\tau)), \quad j = 1,2.$

Підставляючи вирази (7) і (8) у рівняння (6), отримаємо

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x,t)v_j(x,t) + \\ + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{2} B_j(\tau,x,t)v_j(x,\tau)\, d\tau + f(t)g(x,t) + B(x,t), \tag{9}$$

де

$$a_{ij}(x,t) = (-1)^{j+1}\frac{b_1(x,t)\lambda_j(x,t) + b_2(x,t) - \partial\lambda_{3-i}(x,t)/\partial t + \lambda_i(x,t)\partial\lambda_{3-i}(x,t)/\partial x}{\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)},$$

$B_j(\tau,x,t) = b(x,t)A_j(x,\tau), \quad B(x,t) = b(x,t)\beta_1(x).$

Використовуючи рівності (2), (3), (5) та друге співвідношення (7), отримаємо початкові і граничні умови для системи (9):

$$v_i(x,0) = \beta_2(x) - \lambda_{3-i}(x,0)\beta_1'(x) \equiv q_i(x), \quad i = 1,2, \tag{10}$$

$$v_1(c_i,t) - v_2(c_i,t) = \big(\lambda_1(c_i,t) - \lambda_2(c_i,t)\big)\nu_i(t) \equiv \gamma_i(t), \quad i = 1,2. \tag{11}$$

За допомогою зображення (8) умову (4) перепишемо у такому вигляді

$$\sum_{j=1}^{2}\int_0^t\int_0^l \alpha(x,t)A_j(x,\tau)v_j(x,\tau)\,dxd\tau = h_1(t),\ h_1(t) = h(t) - \int_0^l \alpha(x,t)\beta_1(x)\,dx. \tag{12}$$

Розв'язком оберненої задачі (9)–(12) назвемо трійку функцій $\big(v_1(x,t), v_2(x,t), f(t)\big) \in C^1(\overline{P}_T)\times C^1(\overline{P}_T)\times C([0,T])$, яка задовольняє рівняння (9) та умови (10)–(12). Тоді пару $\big(u(x,t), f(t)\big) \in C^{1,2}(\overline{P}_T)\times C([0,T])$, де функція $u(x,t)$ подається зображенням (8), назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Теорема 1. *Нехай*

1) $a_i \in C^{2,1}(\overline{P}_T), b \in C^{1,0}(\overline{P}_T), b_i \in C^{1,0}(\overline{P}_T), g \in C^{1,0}(\overline{P}_T)$, $a_2(x,t) \neq 0$, $\big(a_1(x,t)\big)^2 - 4a_2(x,t) > 0$;

2) $\alpha \in C^{0,2}(\overline{P}_T), h \in C^2([0,T])$, $\beta_i \in C^{3-i}([0,l])$, $\nu_i \in C^1([0,T])$;

3) $\int\limits_0^l \alpha(x,t)g(x,t)\,dx \neq 0, \quad t \in [0,T]$;

4) виконуються умови узгодження нульового та першого $\beta_1'(0) = \nu_1(0)$, $\beta_1'(l) = \nu_2(0)$, $\alpha(l,0)\beta_1(l) = \alpha(0,0)\beta_1(0)$, $\int\limits_0^l \alpha(x,0)\beta_1(x)\,dx = h(0)$, $\beta_2'(0) = \nu_1'(0)$, $\beta_2'(l) = \nu_2'(0)$, $\int\limits_0^l \big[\alpha_t'(x,0)\beta_1(x) + \alpha(x,0)\beta_2(x)\big]\,dx = h'(0)$ *порядків.*

Тоді в області $\overline{P}_T$ *існує єдиний узагальнений розв'язок* $\big(u(x,t), f(t)\big) \in C^{1,2}(\overline{P}_T)\times C([0,T])$ *задачі (1)–(4).*

Доведення. З наведених вище міркувань випливає, що для знаходження узагальненого розв'язку (1)–(4) достатньо розв'язати задачу (9)–(12) з невідомими $f(t)$ та $v_i(x,t)$, а потім із співвідношення (8) знайти $u(x,t)$. Задачу (9)–(12) будемо розв'язувати методом характеристик. Введемо такі допоміжні функції

$$v_i(c_i,t) = \mu_i(t), \quad i = 1,2. \tag{13}$$

Нехай $\varphi_i(\tau;x,t)$ – розв'язок характеристичного рівняння $d\xi/d\tau = -\lambda_i(\xi,\tau)$ при $\xi(t) = x$, де $(x,t) \in P_T$. Через $L_i(x,t)$ позначимо відповідні інтегральні криві, які проходять через точку (x,t). Візьмемо $T_1 \in (0,T]$ таке, щоб характеристики, випущені з кутових точок $(c_i,0)$ в області P_{T_1} не перетиналися. Тоді ці характеристики розбивають $\overline{P}_{T_1}$

на три підобласті: $\overline{P}_{T_1} = \bigcup\limits_{j=0}^{2} P_j$. Інтегруючи в кожній області P_j рівність (9) вздовж характеристик, отримуємо систему інтегральних рівнянь:

$$v_i(x,t) = \omega_i(x,t) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} \Big[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)v_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + B(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{0}^{\tau} B_j(\eta,\varphi_i(\tau;x,t),\tau)v_j(\varphi_i(\tau;x,t),\eta)d\eta + f(\tau)g(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Big]d\tau, \quad i=1,2, \tag{14}$$

де $t_i(x,t) = \min\{\tau : (\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \in \overline{P}_{T_1}\}$,

$$\omega_i(x,t) = \begin{cases} q_i(\varphi_i(0;x,t)), \text{при } (x,t) \in P_0 \cup P_{3-i}; \\ \mu_i(t_i(x,t)), \quad \text{при} \quad (x,t) \in P_i. \end{cases}$$

Підставляючи (14) в граничні умови (11), знаходимо функції μ_i :

$$\mu_i(t) = q_{3-i}(\varphi_{3-i}(0;c_i,t)) + \int\limits_0^t \Big[\sum_{j=1}^{2} a_{3-i,j}(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau)v_j(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau) +$$
$$+\int\limits_0^{\tau}\sum_{j=1}^{2} B_j(\eta,\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau)v_j(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\eta)\,d\eta + \tag{15}$$
$$+f(\tau)g(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau) + B(\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t),\tau)\Big]\,d\tau + (-1)^{i+1}\gamma_i(t).$$

Умову (12) двічі продиференціюємо за t. Тоді отримаємо

$$\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^l \Big[2\alpha_t'(x,t)A_j(x,t) + \alpha(x,t)A_{jt}'(x,t)\Big]v_j(x,t)\,dx + \sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^l \alpha(x,t)A_j(x,t)\frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t}\,dx +$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \alpha_{tt}''(x,t)A_j(x,\tau)v_j(x,\tau)\,dx = h_1''(t). \tag{16}$$

Перепишемо цю рівність так

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg[\int\limits_0^{\varphi_i(t;c_i,0)} \Big[2\alpha_t'A_i + \alpha A_{it}'\Big]v_i\,dx + \int\limits_{\varphi_i(t;c_i,0)}^{l} \Big[2\alpha_t'A_i + \alpha A_{it}'\Big]v_i\,dx +$$
$$+\int\limits_0^{\varphi_i(t;c_i,0)} \alpha A_i\frac{\partial v_i}{\partial t}\,dx + \int\limits_{\varphi_i(t;c_i,0)}^{l} \alpha A_i\frac{\partial v_i}{\partial t}\,dx\Bigg] + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l \alpha_{tt}''A_iv_i\,dx = h_1''(t). \tag{17}$$

Надалі нам знадобляться такі похідні [6]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}=\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right),\\
\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t}=\lambda_i(x,t)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right),\\
\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{\lambda_i(c_i,t_i(x,t))}\exp\left(\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right),\\
\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial t}=\frac{\lambda_i(x,t)}{\lambda_i(c_i,t_i(x,t))}\exp\left(\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma;x,t),\sigma)\,d\sigma\right),\qquad i=1,2.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

У вираз (17) підставимо (14), (15), а також результат диференціювання (14) за t. Після цього в отриманому співвідношенні проведемо такі перетворення [7]: в подвійних і потрійних інтегралах змінюємо порядок інтегрування з метою отримання доданків типу Вольтерра, а потім у внутрішніх інтегралах від змінної x переходимо до y заміною змінних:
1) $y=\varphi_i(\tau;x,t)$, тоді $x=\varphi_i(t;y,\tau)$, $i=1,2$; 2) $y=\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))$.

Оскільки згідно (18), для кожної точки $(x,t)\in P_i$ виконуються рівності

$$
\frac{d\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{dx}=\frac{\partial\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{\partial t}\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\neq 0,
$$

то на підставі теореми про неявну функцію в P_i існує $\psi_i\in C^1$, що $x=\psi_i(y,\tau,t)$. В однократних інтегралах отриманої рівності від змінної y переходимо до змінної τ заміною $\tau=t_i(y,t)$. Оскільки $\dfrac{\partial t_i(y,t)}{\partial y}\neq 0$, то за теоремою про неявну функцію в кожній P_i існує неперервно диференційовна χ_i така, що $y=\chi_i(\tau,t)$.

Обчислимо похідні $\frac{\partial\psi_i(y,\tau,t)}{\partial y}$, $\frac{\partial\chi_i(\tau,t)}{\partial\tau}$, $i=1,2$. Враховуючи заміну $y=\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))$, після диференціювання виразу $x=\psi_i(y,\tau,t)$ за x, отримаємо

$$
\frac{\partial\psi_i(y,\tau,t)}{\partial y}=\left(\frac{\partial\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{\partial t}\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\right)^{-1}.
$$

Щоб знайти $\dfrac{\partial\chi_i(\tau,t)}{\partial\tau}(i=1,2)$, розглянемо тотожність $\varphi_i(t_i(x,t);x,t)=c_i$ при $\tau=t_i(x,t)$, $(x,t)\in P_i$. Тоді, диференціюючи $\varphi_i(\tau;\chi_i(\tau,t),t)=c_i$ за τ, маємо

$$
\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\chi_i(\tau,t)}{\partial\tau}=0.
$$

Звідси, з врахуванням (18), отримуємо

$$\frac{\partial \chi_i(\tau,t)}{\partial \tau} = \lambda_i(c_i,\tau)\exp\left(-\int\limits_\tau^t \lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\sigma;\chi_i(\tau,t),t),\sigma\big)\,d\sigma\right).$$

Всі отримані вирази для шуканих похідних виражаються через відомі функції.

Перетворивши так рівність (17), приходимо до інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду стосовно $f(t)$, в яке входять невідомі функції v_j та v'_{jx} :

$$\begin{gathered}
f(t)\int\limits_0^l \alpha(y,t)g(y,t)\,dy = \sum_{i=1}^2(-1)^i\int\limits_0^t f(\tau)\Bigg[\int\limits_{c_i}^{\varphi_i(\tau;c_{3-i},t)}\Big(2\alpha'_t(x,t)A_i(x,t)+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)+\\
+\alpha(x,t)A_i(x,t)\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t}+\alpha(x,t)\sum_{j=1}^2 A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\Bigg|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)} g(y,\tau)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dy-\\
-\int\limits_{c_i}^{\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t)}\bigg(\Big(2\alpha'_t(x,t)A_i(x,t)+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)\Big)\lambda_i(x,t)+\alpha(x,t)\Big(A_i(x,t)+\\
+\sum_{j=1}^2 A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\frac{\partial\psi_i(y,\tau,t)}{\partial y}\bigg)\bigg|_{x=\psi_i(y,\tau,t)} g(y,\tau)\,dy\Bigg]d\tau-\\
-\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t\int\limits_0^l v_j(y,\tau)\Big(\sum_{i=1}^2\alpha(y,t)A_i(y,t)B_j(t,y,\tau)+\alpha''_{tt}(y,t)A_j(y,t)\Big)\,dy\,d\tau+\\
+\sum_{i=1}^2(-1)^i\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_{c_i}^{\varphi_i(\tau;c_{3-i},t)}\bigg\{\Big(2\alpha'_t(x,t)A_i(x,t)+ \qquad (19)\\
+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)+\alpha(x,t)\sum_{j=1}^2 A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\bigg|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)}\times\\
\times\sum_{j=1}^2\Big(a_{ij}(y,\tau)v_j(y,\tau)+\int\limits_0^\tau B_j(\eta,y,\tau)v_j(y,\eta)\,d\eta\Big)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}+\\
+\alpha(x,t)A_i(x,t)\lambda_i(x,t)\Big|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)}\Big(\frac{\partial a_{ij}(y,\tau)}{\partial y}v_j(y,\tau)+\int\limits_0^\tau\frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y}v_j(y,\eta)\,d\eta\Big)\bigg\}\,dy-\\
-\int\limits_{c_i}^{\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t)}\bigg\{\Big(2\alpha'_i(x,t)A_i(x,t)+\alpha(x,t)A'_{it}(x,t)+\alpha(x,t)\sum_{j=1}^2 A_j(x,t)a_{ji}(x,t)\Big)\bigg|_{x=\psi_i(y,\tau,t)}\times
\end{gathered}$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \left(a_{3-i,j}(y,\tau) v_j(y,\tau) + \int_0^\tau B_j(\eta,y,\tau) v_j(y,\eta)\, d\eta \right) \frac{\partial \psi_i(y,\tau,t)}{\partial y} +$$

$$+\alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\psi_i(y,\tau,t)} \left(\frac{\partial a_{3-i,j}(y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\tau) + \int_0^\tau \frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\eta)\, d\eta \right) \Bigg\} dy \Bigg] d\tau +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\chi_i(\tau,t)} \big(a_{1j}(c_i,\tau) - a_{2j}(c_i,\tau)\big) v_j(c_i,\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \int_0^t \Bigg[\int_{c_i}^{\varphi_i(\tau;c_{3-i},t)} \alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\varphi_i(t;y,\tau)} \left(a_{ij}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y}\, d\eta \right) dy - \int_{c_i}^{\varphi_{3-i}(\tau;c_i,t)} \alpha(x,t) A_i(x,t) \lambda_i(x,t) \Big|_{x=\psi_i(y,\tau,t)} \times$$

$$\times \left(a_{3-i,j}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \int_0^\tau B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y}\, d\eta \right) dy \Bigg] d\tau + H(t),$$

де $H(t)$ – функція, яка містить $h''(t)$ та вирази, складені з відомих функцій та коефіцієнтів рівняння (1) та умов (2)–(4).

Щоб отримати систему інтегральних рівнянь стосовно невідомих $f(t)$, v_j та $\dfrac{\partial v_j}{\partial x}$ продиференціюємо (14) за x. В результаті отримаємо

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} = \Omega_i(x,t) + \int_0^{t_i(x,t)} \Bigg[\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial a_{3-i,j}(y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\tau) + a_{3-i,j}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\eta) + B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y} \right\} d\eta \right) +$$

$$+ f(\tau) \frac{\partial g(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial B(y,\tau)}{\partial y} \Bigg] \Bigg|_{y=\varphi_{3-i}\left(\tau;c_i,t_i(x,t)\right)} \times \frac{\partial \varphi_{3-i}(\tau;c_i,t_i(x,t))}{\partial t} \frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\, d\tau + \tag{20}$$

$$+ \int_{t_i(x,t)}^{t} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{2} \Bigg[\frac{\partial a_{ij}(y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\tau) + a_{ij}(y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y} + \int_0^\tau \Bigg\{ \frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} v_j(y,\eta) +$$

$$+ B_j(\eta,y,\tau) \frac{\partial v_j(y,\eta)}{\partial y} \Bigg\} d\eta \Bigg] + f(\tau) \frac{\partial g(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial B(y,\tau)}{\partial y} \Bigg\} \Bigg|_{y=\varphi_i(\tau;x,t)} \frac{\partial \varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}\, d\tau,$$

де

$$\Omega_i(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial q_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi_i(0;x,t)}{\partial x}, \quad \text{при} \quad (x,t)\in P_0\cup P_{3-i}; \\ \left[\dfrac{\partial q_{3-i}\big(\varphi_{3-i}(0;a_i(t_i(x,t)),t_i(x,t))\big)}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi_{3-i}}{\partial t} + (-1)^{i+1}\dfrac{\partial \gamma_i}{\partial t} + (-1)^i\gamma_i\big(t_i(x,t)\big)\times \right. \\ \left. \times\big(a_{2,3-i}(c_i,t_i(x,t)) - a_{1,3-i}(c_i,t_i(x,t))\big)\right]\dfrac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}, \quad \text{при} \quad (x,t)\in P_i. \end{cases}$$

Отже, для визначення функцій $f(t), v_i$, та $\dfrac{\partial v_i}{\partial x}$ ми отримали систему інтегро-функціональних рівнянь типу Вольтерра (14), (19), (20), яку з врахуванням умови 3) теореми 1 запишемо в операторній формі

$$\begin{cases} v(x,t) = \Omega^1(x,t) + \big(G^1 f\big)(x,t) + \big(K^1 v\big)(x,t), \\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \Omega^2(x,t) + \big(G^2 f\big)(x,t) + \big(K^2 v\big)(x,t) + \Big(D^1\dfrac{\partial v}{\partial x}\Big)(x,t), \\ f(t) = H(t) + \big(G^3 f\big)(t) + \big(K^3 v\big)(t) + \Big(D^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\Big)(t). \end{cases} \tag{21}$$

Тут $v=(v_1,v_2)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}, \dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right)$, а компоненти векторів G^l, K^l, D^k $(l=\overline{1,3},\ k=1,2)$ – лінійні інтегральні оператори типу Вольтерра; Ω^l $(l=\overline{1,2})$ – відомі величини, побудовані за коефіцієнтами та вільними членами рівнянь (14) та (20). Ця система в області P_{T_1} розв'язується методом ітерацій. Отже, ми отримали єдиний неперервний розв'язок системи $\big(f(t), v_1(x,t), v_2(x,t), v_{1x}(x,t), v_{2x}(x,t)\big)$. Не важко переконатись, що $v_{it}(x,t)$ також є неперервними. Для цього досить продиференціювати (14) за t і проаналізувати результат. Далі за співвідношенням (8) знаходимо $u(x,t)$. Диференціюючи (8), знайдемо вирази для перших частинних похідних $u(x,t)$:

$$u_x(x,t) = \beta_1'(x) + \sum_{j=1}^{2}\int_0^t \Big[A_{jx}'(x,\tau)v_j(x,\tau) + A_j(x,\tau)v_{jx}'(x,\tau)\Big]\,d\tau, \tag{22}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{j=1}^{2} A_j(x,t)v_j(x,t). \tag{23}$$

Оскільки $v_i(x,t)\in C^1(\overline{P}_{T_1})$, то з умов теореми 1 випливає, що $u(x,t)\in C^1(\overline{P}_{T_1})$. Диференціюючи (23) за t знайдемо

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{j=1}^{2}\Big[A_{jt}'(x,t)v_j(x,t) + A_j(x,t)v_{jt}'(x,t)\Big].$$

Звідси видно, що $u(x,t)\in C^{1,2}(\overline{P}_{T_1})$. Після того як знайдено розв'язок в $(\overline{P}_{T_1})$ (тобто відоме значення $u(x,T_1)$, яке вибираємо за нову початкову умову), знову проводимо характеристики $L_1(0,T_1)$ і $L_2(l,T_1)$ і аналогічно шукаємо розв'язок в області $P_T\setminus P_{T_1}$. Оскільки

T – обмежене, то повторюючи цей процес, за скінченне число кроків вийдемо на верхню межу прямокутника P_T.

Теорему доведено.

При сильніших припущеннях на гладкість вихідних даних справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай* $a_i \in C^{2,2}(\overline{P}_T)$, $b \in C^{2,0}(\overline{P}_T)$, $b_i \in C^{2,0}(\overline{P}_T)$, $g \in C^{2,0}(\overline{P}_T)$, $\beta_i \in C^{4-i}([0,l])$, $\nu_i \in C^2([0,T]), (i = 1,2)$, *виконуються всі припущення теореми 1, а також умови узгодження другого порядку в кутових точках* $(0,0)$ *та* $(l,0)$.

Тоді існує єдиний класичний розв'язок $u \in C^2(\overline{P}_T)$, $f \in C([0,T])$ *задачі (1)–(4).*

Доведення теореми 2 подібне до доведення теореми 1.

Зауваження. Покажемо на прикладі, що умова 3) теореми 1 є суттєвою для коректної розв'язності задачі (1)–(4).

Розглянемо таку задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + f(t),$$

$$u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0) = 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \; u_x(0,t) = 1, \qquad u_x(l,t) = 1 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\int_0^l t^2 \cos\frac{\pi x}{l} u(x,t)\,dx = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тут виконуються всі припущення теореми 1, за винятком умови 3), так як

$$\int_0^l t^2 \cos\frac{\pi x}{l}\,dx = 0, \quad t \in [0,1].$$

Розв'язуючи задачу запропонованим методом, прийдемо до рівняння стосовно $f(t)$:

$$\frac{1}{2} f(t) t^2 \int_0^l \cos\frac{\pi x}{l}\,dx + 4t \int_0^l \cos\frac{\pi x}{l} \int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dx +$$

$$+2\int_0^t d\tau \int_0^l \cos\frac{\pi x}{l} \int_0^\tau f(\eta)\,d\eta\,dx + 8t\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi t}{l} - \frac{4l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{l} = h''(t),$$

тобто

$$f(t)\cdot 0 + 8t\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi t}{l} - \frac{4l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{l} = h''(t). \tag{24}$$

Отже, коли $h''(t) = 8t\dfrac{l}{\pi}\sin\dfrac{\pi t}{l} - \dfrac{4l^2}{\pi^2}\cos\dfrac{\pi t}{l}$, або $h(t) = -4\dfrac{l^3}{\pi^3}\left(2t\sin\dfrac{\pi t}{l} + \dfrac{3l}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi t}{l} - 1\right)\right)$, то існує безліч функцій $f \in C([0,1])$. Якщо ж $h(t) \neq -4\dfrac{l^3}{\pi^3}\left(2t\sin\dfrac{\pi t}{l} + \dfrac{3l}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi t}{l} - 1\right)\right)$, то рівняння (24) несумісне, тобто не існує такої функції $f \in C([0,1])$, яка була б розв'язком вихідної задачі. В обох випадках коректна розв'язність задачі порушується.

1. Благовещенский А.С. *Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка.*// В кн. Математич. вопросы теории распространения волн.— Л., 1969.— Т.2.— С. 85–90.
2. Благовещенский А.С. *Обратная задача для волнового уравнения с неизвестным источником.*// В кн. Проблемы мат. физики.— Л.: ЛГУ, 1970.— Вып.4.— С. 27–39.
3. Бубнов Б.А. *Разрешимость обратной задачи для волнового уравнения* // Краевые задачи для неклассических уравнений мат. физики, Новосибирск. — 1987. — С. 43–51.
4. Кабанихин С.И. *Об одной постановке двумерной обратной задачи для уравнения колебаний.*// В кн.: Некорректные мат. задачи и проболемы геофизики.— Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976.— С. 64–73.
5. Кабанихин С.И. *Методы решения обратных динамических задач для гиперболических уравнений.*// Условно корректные задачи мат. физики и анализа, Новосибирск.— 1992.— С. 109–123.
6. Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій.– Навч. посібн., К.: ІСДО, 1993.— 72 с.
7. Мельник З.О. *Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем на прямой*// Дифференц. уравнения. — 1985. – Т.21, N2. — С. 246–253.
8. Орловский Д.Г. *К задаче определения правой части гиперболической системы*// Дифференц. уравнения. — 1983. — Т.19, N8. — С. 137–146.
9. Орловский Д.Г. *Определение правой части гиперболического уравнения второго порядка* //Теор. функц. и числ. методы исслед. физ. процессов, М., 1983.— С.38–42.
10. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики.— М., 1984.— 263с.
11. Романов В.Г. *К задаче об определении коэффициентов при младших членах гиперболического уравнения* // Сиб. мат. журнал — 1992. — Т.33, N3. — С. 156–160.
12. Ройхель Б.З. *Об одной обратной задаче для уравнения гиперболического типа* // Дифференц. уравнения — 1990. — Т.26, N8. — С. 1462–1464.
13. Thomee V. *Estimates of the Fridrichs-Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equations in two independent variables* // Math. Scand. — 1957. — Vol. 5, N1. — P.93–113.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.1997

УДК 517.956.3

УМОВИ КОРЕКТНОСТІ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Ю. І. Говда

Govda Yu.I. On correctness of some boundary value problems for a hyperbolic system. Some boundary value problems for hyperbolic system of partial differential equations were studied. Models of locally-gradient elastic body mechanics can be reduced to such kind of problems. The theorem of unique solvability of an abstract operator equation was proved, and as a consequency the conditions of correctness of a hyperbolic system were established.

У праці розглянуто деякі крайові задачі для системи рівнянь гіперболічного типу, до якої може бути зведена повна система рівнянь моделі локально-градієнтного пружного тіла. Доведено теорему про однозначну розв'язність загального операторного рівняння, на підставі якої сформульовано умови коректності крайових задач для вихідної системи рівнянь. При доведенні теореми суттєво використано результати праці [1].

1. У циліндрі $Q = \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ 0 < t < T\}$ розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + L\vec{U} + B\vec{U} = \vec{F}(x,t), \tag{1}$$

де Ω – скінченна область, обмежена кусково-гладкою поверхнею Γ; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка простору $\mathbb{R}^3$;

$$\vec{U}(x,t) = \begin{pmatrix} \vec{u}^1(x,t) \\ \vec{u}^2(x,t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}(x,t) = \begin{pmatrix} \vec{f}^1(x,t) \\ \vec{f}^2(x,t) \end{pmatrix},$$

$\vec{u}^i(x,t) = (u_1^i(x,t), u_2^i(x,t), u_3^i(x,t))^T$, $i = 1,2$, — шукані функції,
$\vec{f}^i(x,t) = (f_1^i(x,t), f_2^i(x,t), f_3^i(x,t))^T$, $i = 1,2$, — відомі функції;

$$L\vec{U} = -\begin{pmatrix} \beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^1 + \nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \end{pmatrix} + \varkappa\vec{U}; \tag{2}$$

B – лінійний оператор, на який нижче буде накладена умова певної підпорядкованості оператору L; α, β, γ, ν, $\varkappa$ – додатні сталі, причому $\gamma^2 \leqslant \alpha\nu$; індекс "т" означає транспонування.

Відзначимо, що у випадку, коли B – матриця, всі елементи b_{ij}, $i,j = 1,\ldots,6$, якої дорівнюють нулеві, крім $b_{ii} = -\varkappa$, $i = 1,2,3$, то до системи (1) може бути зведена повна система рівнянь моделі локально-градієнтного пружного тіла [2].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L55.

На нижній основі циліндра ($t = 0$, $x \in \Omega$) задамо початкові умови

$$\vec{U} = \vec{\Phi}(x), \qquad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{\Psi}(x), \tag{3}$$

де

$$\vec{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}^1(x) \\ \vec{\varphi}^2(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}^1(x) \\ \vec{\psi}^2(x) \end{pmatrix},$$

$\vec{\varphi}^i(x) = (\varphi_1^i(x), \varphi_2^i(x), \varphi_3^i(x))^T$, $\vec{\psi}^i(x) = (\psi_1^i(x), \psi_2^i(x), \psi_3^i(x))^T$, $i = 1, 2$, – задані функції.

Для системи (1) будемо розглядати три крайові задачі з початковими умовами (3) і такими граничними умовами, заданими на бічній поверхні циліндра $S = \{(x,t) : x \in \Gamma,\, t \in [0;T]\}$

$$\vec{U} = \vec{0}; \tag{4_1}$$

$$G\vec{U} = \vec{0}; \tag{4_2}$$

$$G\vec{U} + \sigma\vec{U} = \vec{0}. \tag{4_3}$$

Тут

$$G\vec{U} = \begin{pmatrix} \beta\dfrac{\partial \vec{u}^1}{\partial n} + \left[\vec{\nabla}\cdot(\nu\vec{u}^1 + \gamma\vec{u}^2)\right]\vec{n} \\ \left[\vec{\nabla}\cdot(\gamma\vec{u}^1 + \alpha\vec{u}^2)\right]\vec{n} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

σ – додатна стала; $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ – зовнішня нормаль до Γ; $\dfrac{\partial \vec{u}^1}{\partial n}$ – похідна в напрямку $\vec{n}$.

Нашою метою є встановлення умов коректності задач $(1), (3), (4_i)$, $i = 1, 2, 3$. Покажемо, що такі умови випливатимуть з умов однозначної розв'язності більш загального операторного рівняння.

2. Введемо в розгляд сепарабельний гільбертів простір H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Позначимо H_1 – сепарабельний гільбертів простір, елементами якого є вимірні функції $u = u(\cdot)$, задані на відрізку $[0;T]$, зі значеннями для майже всіх t з проміжку $[0;T]$ в H, зі скалярним добутком

$$(u, v)_1 = \int_0^T (u(t), v(t))\, dt \tag{6}$$

і нормою

$$\|u\|_1 = (u, u)_1^{1/2}. \tag{7}$$

Означення 1. *Будемо говорити, що функція u з простору H_1 має похідну на $[0;T]$, якщо для довільного t з $[0;T]$*

$$u(t) = u(a) + \int_a^t v(\tau)\, d\tau,$$

де $v \in H_1$, *причому* $v(t) = \dfrac{\partial u(t)}{\partial t}$ *для майже всіх* t.

Розглянемо задачу знаходження розв'язків рівняння

$$Su \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + S_1 u + S_2 u = f, \tag{8}$$

що справджують початкові умови

$$u(0) = \varphi_0, \qquad \frac{\partial u(0)}{\partial t} = \varphi_1. \tag{9}$$

Нехай виконуються такі умови.

1) $S_1\colon H \to H$ лінійний симетричний додатно визначений оператор зі щільною в H областю визначення $D(S_1)$.

За допомогою оператора S_1 на множині $D(S_1)$ можна ввести скалярний добуток

$$(u, v)_S = (S_1 u, v) \tag{10}$$

і норму

$$\|u\|_S = (S_1 u, u)^{1/2}. \tag{11}$$

Через H_S позначимо енергетичний простір [3] оператора S_1. Відомо [3], що H_S буде гільбертовим простором, $H_S \subset H$ і $(\forall f \in H)(\exists! \varphi \in H_S)(\forall h \in H_S)\big[(\varphi, h)_S = (f, h)\big]$.

2) $S_2\colon H \to H$ – лінійний оператор з областю визначення $D(S_2) \supset H_S$; для всіх u з простору H_S виконується $\|S_2 u\|^2 \leqslant c_1 \|u\|_S^2$, де c_1 – деяка додатна стала. Надалі вважаємо $c_1 \geqslant 2$.

Позначимо $C^k\big([0;T]; H(H_S)\big) = \big\{u \in H_1 : \forall t \in [0;T]\, \frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i} \in H(H_S);\ \frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i}$ неперервні в нормі $\|\cdot\|(\|\cdot\|_S)$; $i = 0, \ldots, k; \big\}$, $k \geqslant 0$, $C^0\big([0;T]; H(H_S)\big) \equiv C\big([0;T]; H(H_S)\big)$; $M = C\big([0;T]; H_S\big) \cap C^1\big([0;T]; H\big)$; $M^* = M \cap \big\{\eta \in M : \eta(0) = \eta(T) = 0_S\big\}$, де 0_S – нульовий елемент простору H_S.

3) M^* щільна в H_1.

Якщо на множині M ввести норму співвідношенням

$$\|u\|_M = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \big(\|u\|_S^2 + \|u_t\|^2\big)^{1/2}, \tag{12}$$

то M перетвориться в банахів простір. Тут і надалі $u_t \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Введемо в розгляд гільбертів простір $W = H_1 \times H_S \times H$ зі скалярним добутком

$$\big((f; \varphi_0; \varphi_1), (g; \psi_0; \psi_1)\big)_W = (f, g)_1 + (\varphi_0, \psi_0)_S + (\varphi_1, \psi_1) \tag{13}$$

і нормою

$$\|(f; \varphi_0; \varphi_1)\|_W = \big((f; \varphi_0; \varphi_1), (f; \varphi_0; \varphi_1)\big)_W^{1/2}. \tag{14}$$

Задамо лінійний оператор $A\colon M \to W$ з областю визначення $D(A) = \big\{u \in M : S_1 u \in C\big([0, T]; H\big);\ S_1 u_t,\ u_{tt} \in H_1\big\}$ рівністю

$$Au \equiv (Su; u(0); u_t(0)). \tag{15}$$

Задачу (8),(9) можна розглядати як задачу знаходження розв'язків рівняння

$$Au = (f; \varphi_0; \varphi_1), \tag{16}$$

де $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ – заданий елемент простору W.

Означення 2. *Узагальненим розв'язком задачі (8),(9) будемо називати функцію u з M, яка справджує умови (9) та інтегральну тотожність*

$$\int_0^T \left[(u_t, \eta_t) - (u, \eta)_S - (S_2 u, \eta) + (f, \eta)\right] dt = 0 \tag{17}$$

для довільних η з M^*.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1) – 3). Тоді для довільних $f \in H_1$, $\varphi_0 \in H_S$, $\varphi_1 \in H$ задача (8),(9) має єдиний узагальнений розв'язок u і для нього справедлива оцінка*

$$\|u\|_M \leqslant \sqrt{c_1} e^{c_1 T/2} \left(\|\varphi_0\|_S^2 + \|\varphi_1\|^2 + \|f\|_1^2\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Доведення. З леми 11 праці [1] випливає, що для всіх елементів з D(A) виконується нерівність

$$\|u\|_M \leqslant \sqrt{c_1} e^{c_1 T/2} \|Au\|_W. \tag{19}$$

Лема 1. *Оператор A допускає замикання $\overline{A}$; $D(\overline{A}) \subset M$; $R(\overline{A}) = \overline{R(A)}$.*

Доведення леми 1. Будемо позначати 0_1, 0_H, 0_M – нульові елементи просторів H_1, H, M відповідно. З (19) випливає: якщо послідовність $\left\{Au_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігається в нормі простору W до деякого елемента $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ з W, то послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, з $D(A)$ збігається до деякого елемента u з M. Для можливості замикання оператора A досить показати [4], що із збіжності послідовностей $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ з $D(A)$ до 0_M та $\left\{Au_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ до $(f; \varphi_0; \varphi_1)$ випливає, що $(f; \varphi_0; \varphi_1) = (0_1; 0_S; 0_H)$. Очевидно, що $\varphi_0 = 0_S$ і $\varphi_1 = 0_H$. Покажемо, що $f = 0_1$. З цією метою розглянемо вираз

$$(f_n, \eta)_1 = \int_0^T \left[(u_{ntt}, \eta) + (S_1 u_n, \eta) + (S_2 u_n, \eta)\right] dt =$$
$$= \int_0^T \left[-(u_{nt}, \eta_t) + (u_n, \eta)_S + (S_2 u_n, \eta)\right] dt,$$

де $\eta \in M^*$. Якщо в останній рівності перейти до границі по n, то будемо мати

$$(f, \eta)_1 = 0 \tag{20}$$

для довільного η з M^*. З рівності (20) і умови 3) випливає, що $f = 0_1$. Отже, A допускає замикання, яке будемо позначати $\overline{A}$. Область визначення $D(\overline{A})$ буде складатися з $D(A)$ і границь послідовностей $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ з $D(A)$ у нормі простору M таких, що послідовності $\left\{Au_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігаються до деяких елементів з простору W. Якщо $v \in D(\overline{A})$, то за означенням $\overline{A}v \equiv \lim\limits_{n\to\infty} Av_n$ у випадку, коли $\|v - v_n\|_M \to 0$ при $n \to \infty$. З вище викладеного випливає, що $D(\overline{A}) \subset M$ і область значень $R(\overline{A})$ замикання оператора A збігається з $\overline{R(A)}$. Лему 1 доведено.

На підставі оцінки (19) та леми 1 неважко переконатись, що розв'язок рівняння

$$\overline{A}u = (f;\, \varphi_0;\, \varphi_1)$$

є узагальненим розв'язком задачі (8),(9) і для нього справедлива оцінка (18).

Лема 2. $R(\overline{A}) = W$.

Доведення леми 2. Нехай $R(\overline{A}) \neq W$. Тоді існує відмінний від нуля елемент $(v;\psi_0;\psi_1)$ з W ортогональний до $R(\overline{A})$. Для функції u з $D(\overline{A})$ такої, що $\overline{A}u = (f;0_S;0_H)$, це означає виконання рівності

$$(f,v)_1 = 0. \tag{21}$$

За умовою 3) існує така послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ з M^+, що $\|v - v_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді

$$(f,v)_1 = \lim_{n\to\infty}(f,v_n)_1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \left[-(u_t,v_{nt}) + (u,v_n)_S + (S_2u,v_n)\right]dt = 0. \tag{22}$$

Для майже всіх t з $[0;T]$ $v(t) \in H$ і $v_n(t) \in H_S$. Тому з умови 1) випливає: для майже кожного t з $[0,T]$ знайдеться один і лише один елемент φ з H_S такий, що

$$(\varphi;v_n)_S = (v,v_n). \tag{23}$$

Візьмемо

$$u = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad t \in [0;a), \\ \int_a^t\int_a^\tau\int_T^\xi \varphi(\zeta)\,d\zeta\,d\xi\,d\tau \quad \text{при} \quad t\in[a;T]. \end{cases} \tag{24}$$

Неважко перевірити, що $u \in D(\overline{A})$ і

$$(u,v_n)_S = \Big(\int_a^t\int_a^\tau\int_T^\xi v(\zeta)\,d\zeta\,d\xi\,d\tau, v_n\Big) \tag{25}$$

при $t \in [a,T]$.

На підставі (24),(25) рівність (22) можна записати так

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^T \Big[-(u_t,v_{nt}) + \Big(\int_a^t\int_a^\tau\int_T^\xi v(\zeta)\,d\zeta\,d\xi\,d\tau, v_n\Big) + (S_2u,v_n)\Big]dt =$$
$$= \int_a^T \Big[(u_{tt},v) + \Big(\int_a^t\int_a^\tau\int_T^\xi v(\zeta)\,d\zeta\,d\xi\,d\tau, v\Big) + (S_2u,v)\Big]dt = 0,$$

звідки, інтегруючи частинами з урахуванням (23),(25), отримуємо

$$\Big\|\int_T^a \varphi(\tau)\,d\tau\Big\|_S^2 + \Big\|\int_a^T\int_T^\xi v(\tau)\,d\tau\,d\xi\Big\|^2 = 2\int_a^T (S_2u,v)\,dt. \tag{26}$$

Далі, використовуючи метод доведення леми 10 праці [1], приходимо до висновку, що $v = 0_1$.

Тепер умова ортогональності елемента $(v;\psi_0;\psi_1)$ до $D(\overline{A})$ може бути записана так:

$$\big(u(0),\psi_0\big)_{\boldsymbol{S}} + \big(u_t(0),\psi_1\big) = 0 \tag{27}$$

для довільного $\boldsymbol{u}$ з $D(\overline{A})$. З рівності (27) та щільності $D(S_1)$ в H і в H_S випливає, що $\psi_0 = 0_{\boldsymbol{S}}$ і $\psi_1 = 0_{\boldsymbol{H}}$. Отже, в W не існує відмінного від нуля елемента, ортогонального до $R(\overline{A})$. А, оскільки $R(\overline{A}) = \overline{R(\overline{A})}$ – замкнена множина, то $R(\overline{A}) = W$. Лему 2 доведено.

З лем 1, 2 та нерівності (19) безпосередньо випливає існування і оцінка (18) узагальненого розв'язку задачі (8),(9). Його єдиність є наслідком оцінки (18). Теорему 1 доведено.

3. Скористаємось теоремою 1 для встановлення умов коректності змішаних задач $(1),(3),(4_i)$, $i=1,2,3$.

За простір H виберемо $L_2(\Omega)$ – простір вектор-функцій $\vec{U}=\vec{U}(\cdot)$, заданих на Ω, скалярний квадрат яких інтегровний на Ω, зі скалярним добутком

$$(\vec{U},\vec{U}_1)=\int_\Omega \vec{U}(x)\cdot\vec{U}_1(x)\,dx \tag{28}$$

і нормою

$$\|\vec{U}\|=\big(\vec{U},\vec{U}\big)^{1/2}, \tag{29}$$

а за H_1 – гільбертів простір $L_2(Q)$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_1$ і нормою $\|\cdot\|_1$. Через $C^2(\overline{\Omega})$ позначимо сукупність вектор-функцій, кожна компонента яких двічі неперервно диференційовна в $\overline{\Omega}$. Введемо в розгляд множину $\dot{C}^2(\Omega)=\big\{\vec{U}\in C^2(\overline{\Omega}):\vec{U}$ фінітна в $\Omega\big\}$. За області визначення оператора L, що відповідають крайовим задачам, приймемо $D_1(L)=\dot{C}^2(\Omega)$, $D_2(L)=\big\{\vec{U}\in C^2(\overline{\Omega})\colon\ G\vec{U}\big|_\Gamma=0\big\}$ та $D_3(L)=\big\{\vec{U}\in C^2(\overline{\Omega}):\ (G\vec{U}+\sigma\vec{U})\big|_\Gamma=0\big\}$. Крайову задачу $(1),(3),(4_i)$ будемо розглядати як задачу Коші (1),(3), а граничні умови включимо у вимогу належності при кожному t з проміжку $(0;T)$ шуканої функції $\vec{U}(x,t)$ до області визначення $D_i(L)$ оператора L, $i=1,2,3$. Покажемо тепер, що для крайових задач $(1),(3),(4_i)$ виконуються всі умови теореми 1. Очевидно, що $D_i(L)$, $i=1,2,3$, щільні в $L_2(\Omega)$. Покажемо симетричність оператора L на $D_i(L)$, $i=1,2,3$. Нехай $\vec{U},\ \vec{V}\in D_i(L)$,

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}\vec{u}^1\\ \vec{u}^2\end{pmatrix},\qquad \vec{V}=\begin{pmatrix}\vec{v}^1\\ \vec{v}^2\end{pmatrix},$$

$\vec{u}^j=(u_1^j,\,u_2^j,\,u_3^j)^T,\vec{v}^j=(v_1^j,\,v_2^j,\,v_3^j)^T$, $j=1,2$. Тоді

$$\begin{aligned}(L\vec{U},\vec{V})&=-\int_\Omega\Big[\beta(\vec{\nabla}^2\vec{u}^1)\cdot\vec{v}^1+\nu\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)\big)\cdot\vec{v}^1+\gamma\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)\big)\cdot\vec{v}^1+\\ &\quad+\gamma\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)\big)\cdot\vec{v}^2+\alpha\big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)\big)\cdot\vec{v}^2\Big]\,dx+\varkappa(\vec{U},\vec{V})=\\ &=I(\vec{U},\vec{V})+\varkappa(\vec{U},\vec{V})-\int_\Gamma\Big[\beta\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j^1}{\partial\vec{n}}v_j^1+\nu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{v}^1\cdot\vec{n})+\\ &\quad+\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{v}_1\cdot\vec{n})+\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{v}^2\cdot\vec{n})+\alpha(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{v}^2\cdot\vec{n})\Big]\,d\Gamma,\end{aligned} \tag{30}$$

де

$$\begin{aligned}I(\vec{U},\vec{V})&=\int_\Omega\Big[\beta\sum_{j=1}^{3}(\vec{\nabla}u_j^1)\cdot(\vec{\nabla}v_j^1)+\nu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^1)+\\ &\quad+\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^1)+\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^2)+\alpha(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^2)\Big]\,dx.\end{aligned} \tag{31}$$

Таким чином,

$$(L\vec{U},\vec{V}) = I(\vec{U},\vec{V}) + \varkappa(\vec{U},\vec{V}) - \int_{\Gamma}(G\vec{U})\cdot\vec{V}\,d\Gamma,$$

звідки отримуємо при $i = 1,2$

$$(L\vec{U},\vec{V}) = I(\vec{U},\vec{V}) + \varkappa(\vec{U},\vec{V}), \tag{32}$$

а при $i = 3$ –

$$(L\vec{U},\vec{V}) = I(\vec{U},\vec{V}) + \varkappa(\vec{U},\vec{V}) + \sigma\int_{\Gamma}\vec{U}\cdot\vec{V}\,d\Gamma. \tag{33}$$

З рівностей (32),(33) випливає симетричність оператора L на $D_i(L)$, $i = 1,2,3$. Доведемо, що L додатно визначений. Для цього перепишемо $I(\vec{U},\vec{U})$ у вигляді

$$I(\vec{U},\vec{U}) = \int_{\Omega}\Big[\beta\sum_{j=1}^{3}|\vec{\nabla}u_j^1|^2 + (\nu-\gamma/\varepsilon)(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)^2 +$$
$$+(\alpha-\gamma\varepsilon)(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)^2 + (\sqrt{\gamma/\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1 + \sqrt{\gamma\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)^2\Big]\,dx,$$

де ε – довільне додатне число. Очевидно, що $I(\vec{U},\vec{U}) \geqslant 0$, коли $\gamma/\nu \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha/\gamma$. А множина таких ε непорожня, бо $\gamma^2 \leqslant \alpha\nu$. Отже,

$$(L\vec{U},\vec{U}) \geqslant \varkappa\|\vec{U}\|^2, \tag{34}$$

що означає додатну визначеність оператора L на $D_i(L)$, $i = 1,2,3$. Тому, для оператора L виконується умова 1) з п.2. За допомогою оператора L на $D_i(L)$ введемо скалярний добуток

$$(\vec{U},\vec{V})_{Li} = (L\vec{U},\vec{V}) \tag{35_i}$$

і норму

$$\|\vec{U}\|_{Li} = (\vec{U},\vec{U})_{Li}^{1/2}, \tag{36_i}$$

$i = 1,2,3$. Зауважимо, що $\|\cdot\|_{L1} \equiv \|\cdot\|_{L2}$. Енергетичний простір оператора L, що відповідає області визначення $D_i(L)$, скалярному добутку $(\cdot,\cdot)_{Li}$, нормі $\|\cdot\|_{Li}$, позначимо H_{Li}, $i = 1,2,3$. На оператор B будемо накладати таку умову.

2_i) Область визначення $D_i(B)$ оператора B містить H_{Li}; для всіх $\vec{U}$ з простору H_{Li} $\|B\vec{U}\|^2 \leqslant c_4\|\vec{U}\|_{Li}^2$, $c_4 \geqslant 2$, $i = 1,2,3$.

За множини M і M^* в умові 3) з п.2 візьмемо $M_i = \big\{\vec{\eta} \in L_2(Q) : \forall t \in [0;T]\ \vec{\eta} \in H_{Li},\ \vec{\eta}_t \in L_2(\Omega);\ \vec{\eta}$ і $\vec{\eta}_t$ неперервні за t в нормах $\|\cdot\|_{Li}$ та $\|\cdot\|$ відповідно $\big\}$; $M_i^* = M_i \cap \big\{\vec{\eta} \in M_i : \vec{\eta}(x,0) = \vec{\eta}(x,T) = 0\big\}$, $i = 1,2,3$, де $\vec{\eta}_t$ – узагальнена похідна. Без сумніву, M_i^* щільна в $L_2(Q)$.

Означення 3. *Узагальненим розв'язком задачі* $(1),(3),(4_i)$ *будемо називати функцію* $\vec{U}$ *з* M_i, *яка справджує умови (3) та інтегральну тотожність*

$$\int_0^T\big[(\vec{U}_t,\vec{\eta}_t) - (\vec{U},\vec{\eta})_{Li} - (B\vec{U},\vec{\eta}) + (\vec{F},\eta)\big]\,dt = 0$$

для довільного $\vec{\eta} \in M_i^*$; $i = 1,2,3$.

З вище наведеного випливає, що для задач $(1),(3),(4_i)$, $i = 1,2,3$, виконуються всі умови теореми 1. Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 2. *При виконанні вказаних в п.1 умов на коефіцієнти системи рівнянь (1) та умови* 2_i) *на оператор* B, *при довільних* $\vec{F} \in L_2(Q)$, $\vec{\Phi} \in H_{Li}$, $\vec{\Psi} \in L_2(\Omega)$ *мішана задача* $(1), (3), (4_i)$ *має єдиний узагальнений розв'язок* $\vec{U}$ *і для нього справедлива оцінка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\|\vec{U}\|_{Li}^2 + \|\vec{U}_t\|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{c_4} e^{c_4 T/2} \left(\|\vec{\Phi}\|_{Li}^2 + \|\vec{\Psi}\|^2 + \|\vec{F}\|_1^2\right)^{1/2}, \ i = 1, 2, 3.$$

Залишаємо відкритим питання конкретизації просторів H_{Li}, $i = 1, 2, 3$.

1. Ладыженская О.А. *О решении нестационарных операторных уравнений* // Мат.сб. – 1956. – Т. 39, N 4. – С.491-524.
2. Бурак Я.Й., Говда Ю.І., Нагірний Т.С. *Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень* // Доп.НАН України. – 1996. – N 2.– С.39-43.
3. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш.шк., 1977. – 432 с.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.97

УДК 518:517.948

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ ЕЛЕКТРОННО-ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

М. В. Дорошенко, С. М. Кічура

Doroshenko M.V., Kichura S.M. The uniqueness of a solution of the axis-symmetry probiem of the synthesis of electronic-optical systems. The inverse Dirichlet problem for Laplace equations with known geometry of boundary surfases is considered. Problem of finding of an optimal potential distribution on electrodes which realizes the given potential distribution of electrostatic field on a symmetry axis is reduced to such mathematical model.

Граничні задачі математичної фізики поділяються на два великі класи: прямі та обернені. В прямих задачах потрібно знайти характеристики поля, коли відомі крайові умови та граничні поверхні. В обернених задачах потрібно знайти крайові умови та геометрію граничних поверхонь, які реалізують задані характеристики поля.

У праці розглянуто обернену задачу Діріхле для рівняння Лапласа при відомій геометрії граничних поверхонь. До такої задачі зводиться задача знаходження оптимального розподілу потенціалів на електродах, які реалізують заданий розподіл потенціалу електростатичного поля на осі симетрії.

Нехай на відрізку $[a,b]$ осі OZ циліндричної системи координат (r,z,ϕ) задана деяка достатньо гладка функція $U_0(z)$. Необхідно знайти розподіл потенціалів $\left\{V_0^{(i)}\right\}_{i=1}^{m}$ на системі розімкнутих електродів $(S=\cup_{i=1}^{m}S_i)$, які створюють осесиметричне поле $U(r,z)$ при умові, що $U(0,z)=U_0(z)$, $z\in[a,b]$. Функція $U(r,z)$ є розв'язком такої задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

$$U^{\pm}(r,z)=V_0^{(i)},\ (r,z)\in S_i, \tag{2}$$

$$\lim_{(r,z)\to\infty}U(r,z)=0, \tag{3}$$

де $U(r,z)$ повинна також задовольняти умову на ребрі [2]. Поверхні S_i будемо розглядати як двосторонні: S_i^+ і S_i^-. Нехай $U^{\pm}(r,z)$ – граничні значення потенціалу відповідно на S_i^+ і S_i^-. Невідомі потенціали визначаються з умови $U(0,z)=U_0(z)$, $z\in[a,b]$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35Q60.

Отже, задача синтезу електронно-оптичних систем при відомій геометрії зводиться до оберненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Невідомими є константи $V_0^{(i)}$, які задають розподіл потенціалу на електродах. Розв'язок задачі (1)–(3) подамо у такому вигляді

$$U(r,z) = \sum_{i=1}^{m} V_0^{(i)} \phi_i(r,z), \tag{4}$$

де $\phi_i(r,z)$ – розв'язки таких характеристичних задач

$$\Delta_{rz}\phi_i(r,z) = 0, \tag{5}$$

$$\phi_i^{\pm}(r,z) = \begin{cases} 0, & (r,z) \in S_i, \\ 1, & (r,z) \in S_i. \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язки задачі (5),(6) не залежать від заданих на поверхнях потенціалів і визначаються геометрією системи.

Невідомі потенціали (2) знаходимо шляхом мінімізації функціоналу

$$F(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, ..., V_0^{(m)}) = \left|\left| U_0(z) - \sum_{i=1}^{m} V_0^{(i)} \phi_i(z) \right|\right|, \tag{7}$$

де

$$||g(z)||^2 = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b |g(z)|^2 dz, \quad \phi_i(z) = \phi_i(0,z).$$

Суттєвим для знаходження мінімуму функціоналу (7) є вивчення питання лінійної незалежності системи функцій $\{\phi_i(z)\}_{i=1}^m$. Це пов'язано з дослідженням єдиності розв'язку поставленої задачі.

Теорема. *Якщо $U_0(z) \equiv 0$ на $[a,b]$, то обернена задача має тривіальний розв'язок, тобто $V_0^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1,m}$.*

Доведення. Нехай існує функція $W(r,z)$, яка є розв'язком задачі (1)–(3). Константи $V_0^{(i)}$ не дорівнюють нулю і виконується умова $W(0,z) = U_0(z) \equiv 0$, $z \in [a,b]$.

Покажемо, що $W(0,z) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$. Нехай z_0 є серединою відрізка $[a,b]$. Опишемо сферу $\Sigma(z_0)$ з центром в точці z_0 радіуса ε. Число ε виберемо так, щоб сфера $\Sigma(z_0)$ не дотикалась до граничної поверхні S і точки $z = a$ і $z = b$ лежали поза сферою. Функція $W(r,z)$ є гармонічною в $\overline{\Sigma(z_0)}$. Позначимо літерою C коло, утворене перетином площини $\phi = 0$ і сфери $\Sigma(z_0)$.

Оскільки $W(0, z_0 - \varepsilon) = W(0, z_0 + \varepsilon) = 0$, то з принципу максимуму випливає, що існує точка $(r^*, z^*) \in C$, така, що $W(r^*, z^*) = 0$. У протилежному випадку $W(r,z) \geqslant 0$ або $W(r,z) \leqslant 0$, $(r,z) \in \Sigma(z_0)$. На підставі теореми про середнє [1] для гармонічних функцій маємо

$$W(0,z_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int\limits_{\Sigma(z_0)} W(z,r) dS_\Sigma = 0. \tag{8}$$

З формули (8) отримаємо, що $W(r,z) \equiv 0$ на $\Sigma(z_0)$. З принципу максимуму випливає, що $W(r,z) \equiv 0$ в кулі $K(z_0)$ радіуса ε. Аналогічно отримаємо такий же результат для випадку $W(r,z) \leqslant 0$, $(r,z) \in \Sigma(z_0)$.

Нехай на дузі кола C, обмеженої точками $(0, z_0 - \varepsilon)$ і (r^*, z^*), функція $W(r,z) \geqslant 0$. Розглянемо $\Sigma_{\varepsilon_1}(z_0)$, де $\varepsilon_1 < \varepsilon$. На підставі неперервності функції $W(r,z)$ і наведених вище міркувань матимемо, що існує точка $(r_1^*, z_1^*) \in C$, де $W(r_1^*, z_1^*) = 0$. Виберемо $\varepsilon_2 < \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$, так, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Отже, на площині $\phi = 0$ існує деяка крива Γ з кінцями (r^*, z^*) і $(0, z_0)$, на якій $W(r,z) = 0$. Також в області Ω, яка утворена обертанням навколо осі z кривої Γ і кола C, функція $W(r,s) \geqslant 0$. Виберемо точку $z_1 \in [z_0 - \varepsilon, z_0]$ і побудуємо сферу $\Sigma(z_1)$ радіуса γ так, щоб вона лежала в області Ω. На підставі теореми про середнє отримаємо, що

$$W(0, z_1) = \frac{1}{4\pi\gamma^2} \int\limits_{\Sigma(z_1)} W(z,r) dS_\Sigma = 0. \tag{9}$$

Оскільки $W(r,z) \geqslant 0$ на $\Sigma(z_1)$, то $W(r,z) \equiv 0$ на $\Sigma(z_1)$. З принципу максимуму маємо, що $W(r,z) \equiv 0$, якщо (r,z) лежить в кулі $K(z_1)$ радіуса γ. Таким чином, ми показали, що існує деяка куля K, в якій функція $W(r,z) \equiv 0$.

Розглянемо тепер таку область $B \in \mathbb{R}^3$, яка містить дану кулю K і гранична поверхня S лежить поза B. Оскільки за умовою функція $W(r,z)$ є гармонічною в B, то отримаємо, що $W(r,z) \equiv 0$, якщо $(r,z) \in B$. Враховуючи довільність вибору B, $W(r,z) = 0$ для довільної точки (r,z) поза S. Оскільки $W(r,z)$ неперервна на S, то $W(r,z) \equiv 0$, $(r,z) \in S$, тобто $V_0^{(i)}$, для $i = 1, 2, ..., m$. Теорему доведено.

Таким чином, для довільної достатньо гладкої функції $U_0(z)$, яка визначена на відрізку $[a,b]$, існує єдиний набір граничних потенціалів, який реалізує заданий розподіл електростатичного поля на осі OZ.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972. – 736 с.
2. Hayashi J. *The expansion theory of Dirichlet problem for the Helmholz equation for an open boundary* // J.Math. Anal. and Appl. – 1977. – Vol. 61, N 2. – P. 331-340.

Стаття надійшла до редколегії 08.10.96

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯМ

Березницька І.Б., Дребот А.Й., Іванчов М.І., Макар Ю.М.

Bereznitska I.B., Drebot A.J., Ivanchov M.I., Makar Ju.M. Inverse problem for a heat equation with an integral overdetermination. The inverse problem for finding an unknown time–dependent major coefficient in the heat equation is considered. The overdetermination conditions are linear combinations of boundary data and integral of the solution.

Формулювання обернених задач відрізняється від формулювання прямих задач наявністю додаткової інформації про досліджуваний процес – так званих умов перевизначення. Їх вигляд визначається як технічними можливостями, так і метою дослідження, яка. зокрема, може полягати у виборі таких параметрів, які забезпечували б певний режим проходження процесу. При цьому умови перевизначення можуть мати вигляд як додаткових крайових умов, так і інтегральних, фінальних, нелокальних умов [1]–[6]. У даній праці розглядаються умови перевизначення, що складаються з лінійної комбінації крайової та інтегральної умов. Пряма задача з подібною умовою розглянута в праці [7].

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)$, початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \ x \in [0,h] \tag{2}$$

та крайові умови

$$u(0.t) = \mu_1(t), \ u(h,t) = \mu_2(t), \ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Задача полягає в знаходженні функцій $(a(t), u(x,t)) \in C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0, \ t \in [0,T]$, які задовольняли б (1)–(3) та умову перевизначення

$$u_x(0,t) + \nu(t)\int_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t), \ t \in [0,T]. \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\varphi(x) \in C^2[0,h]$; $\mu_i(t) \in C^1[0,T]$, $i=1,2,3$; $\nu(t) \in C^1[0,T]$; $f(x,t) \in C^{1.0}(\overline{Q}_T)$;
2) $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h]$; $\varphi'(h-x) - \varphi'(x) \geqslant 0$, $x \in [0,h/2]$;
$\mu_1(t) + \mu_2(t) \geqslant 0$, $\mu_1'(t) - f(0,t) > 0$, $\mu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0$, $\mu_3'(t) \leqslant 0$,
$\nu(t) \geqslant 0, \nu'(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$; $f(x,t) \geqslant 0$, $f_x(x,t) \geqslant 0$, $x \in \overline{Q}_T$,
$f_x(h-x,t) - f_x(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in [0,h/2] \times [0,T]$;
3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$, $\varphi'(0) + \nu(0)\int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0)$.

Тоді розв'язок задачі (1)-(4) існує і єдиний.

Доведення. Вважаючи відомою функцію $a(t) > 0$, за допомогою функції Гріна

$$G_1(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha(t)-\alpha(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right), \quad \alpha(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau,$$

знайдемо розв'язок задачі (1)-(3):

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$
$$- \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{5}$$

Обчислимо похідну $u_x(x,t)$, використовуючи при цьому інтегрування частинами та умови узгодження:

$$u_x(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - f(0,\tau))d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau) - f(h,\tau))d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{6}$$

де

$$G_2(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\alpha(t)-\alpha(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right) \qquad -$$

функція Гріна другої крайової задачі для рівняння (1). Підставляючи (5) та (6) в умову перевизначення (4), отримаємо рівняння щодо $a(t)$ такого вигляду

$$\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int_0^t G_2(0,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau)-f(0,\tau))d\tau +$$
$$+\int_0^t G_2(0,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau + \int_0^t\int_0^h G_2(0,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$
$$+\nu(\tau)\Bigg(\int_0^h \varphi(\xi)d\xi\int_0^h G_1(x,t,\xi,0)dx + \int_0^t d\tau\int_0^h f(\xi,\tau)d\xi\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)dx + \tag{7}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{a(\tau)(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau\Bigg) = \mu_3(t).$$

Для зведення рівняння (7) до вигляду, розв'язаного стосовно $a(t)$, виконаємо такі перетворення: покладемо в (7) $t=\sigma$, домножимо на вираз

$$\frac{a(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)$$

і проінтегруємо за σ від 0 до t. Використовуючи формули з довільними функціями $\mu(t)\in C^1[0,T]$, $\varphi(x)\in C^1[0,h]$ [6]

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\sigma))(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp\Big(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}-$$
$$-\frac{n^2h^2}{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}\Big)d\sigma = \pi,$$
$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\sigma))(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp\Big(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}-$$
$$-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\Big)d\sigma = \frac{h\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\frac{1}{z^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4z}\Big)dz,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t\frac{a(\tau)\mu(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right)d\tau\right) = a(t)\Big(\frac{\mu(0)}{\sqrt{\alpha(t)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)}\right)+\int_0^t\frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\tau)}\right)d\tau\bigg),$$

$$\int_0^h\varphi'(\xi)d\xi\int_0^t\frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\sigma))\alpha(\sigma)}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp\bigg(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}-$$

$$-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\bigg)d\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha(t)}}\int_0^h\varphi(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi-$$

$$-\pi\varphi(0)+\varphi(h)\frac{h\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\alpha(t)}\frac{1}{z^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4z}\right)dz,$$

продиференціюємо співвідношення, отримане з (7). Враховуючи умови теореми, приходимо до такого рівняння стосовно $a(t)$

$$a(t)=\sqrt{\pi}(\mu_1'(t)-f(0,t))\bigg(\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d\tau}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}}\times$$

$$\times\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\int_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi+$$

$$+\frac{h}{2}\int_0^t\frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+$$

$$+\int_0^t\frac{\nu'(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)\bigg(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(\sigma)}}\int_0^h\varphi(\xi)\times$$

$$\times d\xi\int_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\right)\right)dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\sigma\frac{a(\tau)(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\sigma\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}\int_0^h f(\xi,\tau)d\xi\int_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bigg(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)-$$

$$-\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)dx\Bigg)d\sigma+\int\limits_0^t\frac{\nu(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)d\sigma\int\limits_0^h f(x,\sigma)dx+\int\limits_0^t\frac{a(\sigma)\nu(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha(\sigma)}}\int\limits_0^{h/2}(\varphi'(h-\xi)-\varphi'(\xi))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\times\right.$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4\alpha(\sigma)}\right)d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sigma}\frac{\mu_1'(\tau)+\mu_2'(\tau)-f(0,\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)d\tau+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sigma}\frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(\sigma)-\alpha(\tau)}}\times$$

$$\times\int\limits_0^{h/2}(f_\xi(h-\xi,\tau)-f_\xi(\xi,\tau))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)d\xi\Bigg)d\sigma-$$

$$\left.-\int\limits_0^t\frac{\mu_3'(\sigma)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}\right)d\sigma\right)^{-1},\ t\in[0,T]. \tag{8}$$

Легко бачити, що всі розв'язки рівняння (8) є додатними на [0,T]. Щоб встановити існування розв'язку рівняння (8), застосуємо до нього теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку оцінимо розв'язки рівняння (8) зверху:

$$a(t)\leqslant\sqrt{\pi}\max_{[0,T]}(\mu_1'(t)-f(0,t))\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\int\limits_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\alpha(t)}\right)d\xi\right)^{-1}. \tag{9}$$

Помноживши цю нерівність на знаменник та проінтегрувавши від 0 до t, зведемо її до вигляду

$$r(\alpha(t))\leqslant C_1t, \tag{10}$$

де

$$r(s)=\int\limits_0^s\frac{dz}{\sqrt{z}}\int\limits_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\right)d\xi,$$

а $C_1>0$ – стала, що залежить від $\max\limits_{[0,T]}(\mu_1'(t)-f(0,t))$. Функція $r(s)$ визначена і додатна при $s\geqslant 0$. Крім того, вона монотонно зростає і $\lim\limits_{s\to\infty}r(s)=+\infty$, що легко встановити, застосовуючи граничні теореми для перетворення Лапласа. Це означає, що на множині $[0,\infty)$ існує обернена функція $r^{-1}(\sigma)$, і з нерівності (10) отримуємо

$$\alpha(t) \leqslant r^{-1}(C_1 t) \leqslant C_2 < \infty, \ t \in [0,T]. \tag{11}$$

Це дозволяє оцінити $a(t)$ зверху:

$$a(t) \leqslant C_1 \left(\min_{z\in[0,C_2]} \frac{1}{\sqrt{z}} \int\limits_0^h \varphi''(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4z}\right) d\xi \right)^{-1}$$

або

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \ t \in [0,T], \tag{12}$$

де число A_1 визначається тільки вихідними даними задачі. Маючи оцінки (11), (12), з рівняння (8) легко встановити оцінку $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{C_3}{C_4 + C_5(\min\limits_{[0,T]} a(t))^{-1/2}}, \tag{13}$$

де C_3, C_4, C_5 – додатні сталі. Для цього достатньо скористатись нерівностями

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2 z^2\right) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2z}, \ z > 0,$$

$$\frac{1}{z^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 h^2}{4z}\right) \leqslant C_6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = C_7,$$

$$\left| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{3/2}} \int\limits_0^h f(\xi,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{\overline{Q}_T} |f(x,t)| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}},$$

які порівняно легко перевіряються. Тоді з (13) отримуємо оцінку

$$a(T) \geqslant A_0 > 0, \ t \in [0,T], \tag{14}$$

де число A_0 визначається тільки вихідними даними задачі. Як в роботі [6], наявність оцінок (12) і (14) дає можливість застосувати до рівняння (8) теорему Шаудера і встановити існування розв'язку задачі (1)–(4).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(4). Припускаючи, що $(a_i(t),\, u_i(x,t)), i = 1,2$ – два її розв'язки, для їх різниці $b(t) = a_1(t) - a_2(t),\ v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримаємо

$$v_t = a_1(t) v_{xx} + b(t) u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$v(x,0)=0, \quad x\in[0,h], \tag{16}$$

$$v(0,t)=v(h,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{17}$$

$$v_x(0,t)+\nu(t)\int\limits_0^h v(x,t)dx=0, \quad t\in[0,T]. \tag{18}$$

Знайшовши розв'язок задачі (15)–(17) за допомогою функції Гріна і підставивши його в умову перевизначення (18), прийдемо до рівняння

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)b(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\ +\nu(t)\int\limits_0^h dx\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)b(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau=0.\end{gathered} \tag{19}$$

Перетворимо рівність (19) так, як вираз (7). Використовуючи формулу

$$\begin{gathered}\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{(\alpha(t)-\alpha(\sigma))(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))^3}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(\xi+2nh)\times\\ \times\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha(t)-\alpha(\sigma)}-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(\sigma)-\alpha(\tau))}\right)d\sigma=\\ =\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right),\end{gathered}$$

яку можна вивести за допомогою перетворення Лапласа, отримаємо інтегральне рівняння Вольтерра першого роду стосовно $b(t)$:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \frac{b(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}\int\limits_0^h u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)d\xi+\\ +\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t b(\tau)d\tau\int\limits_0^h u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi\int\limits_\tau^t\frac{a_1(\sigma)\nu(\sigma)}{\sqrt{(\alpha_1(t)-\alpha_1(\sigma))(\alpha_1(\sigma)-\alpha_1(\tau))}}\times\\ \times\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\exp\left(-\frac{m^2h^2}{\alpha_1(t)-\alpha_1(\sigma)}\right)d\sigma\int\limits_0^h\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha_1(\sigma)-\alpha_1(\tau))}\right)-\right.\\ \left.-\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha_1(\sigma)-\alpha_1(\tau))}\right)\right)dx=0,\ t\in[0,T],\end{gathered} \tag{20}$$

де $\alpha_1(t) = \int\limits_0^t a_1(\tau)d\tau$. Диференціюючи рівняння (20) за t [8], зводимо його до однорідного рівняння Вольтерра другого роду

$$b(t)u_{2xx}(0,t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)b(\tau)d\tau = 0$$

з інтегровним ядром $K(t,\tau)$, в якому $u_{2xx}(0,t) = \dfrac{\mu_1'(t) - f(0,t)}{a_2(t)} > 0$. Звідси випливає, що $b(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$ і тоді $v(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in Q_T$ як розв'язок однорідної задачі, що відповідає (15)–(17). Теорему доведено.

За подібною схемою досліджуються обернені задачі для рівняння (1) з крайовими умовами інших типів.

Розглянемо обернену задачу у випадку крайових умов вигляду

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3'}$$

і умовами перевизначення

$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{4'}$$

Теорема 2. *Нехай, крім умови 1) теореми 1, в якій під функцією $\nu(t)$ розуміється $\dfrac{\nu_2(t)}{\nu_1(t)}$, виконуються умови:*

1) $\varphi(x) \geqslant 0,\ \varphi''(x) \geqslant 0,\ x \in [0,h];\ \mu_3'(t) - \nu(t)f(0,t) - \int\limits_0^h f(x,t)dx \geqslant 0,$
$\mu_1(t) \leqslant 0,\ \mu_2(t) \geqslant 0,\ \mu_1'(t) \leqslant 0,\ \mu_2'(t) \geqslant 0,\ \nu_1(t) \neq 0,\ \nu(t) \geqslant 0,$
$\nu'(t) \leqslant 0,\ t \in [0,T];\ f(x,t) \geqslant 0,\ f_x(x,t) \geqslant 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_T;$

2) $\varphi'(0) = \mu_1(0),\ \varphi'(h) = \mu_2(0),\ \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0).$

Тоді розв'язок задачі (1), (2), (3'), (4') існує і єдиний.

Нехай задані крайові умови

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3''}$$

та умова перевизначення

$$\nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{4''}$$

Умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (1), (2), (3"), (4") встановлюються такою теоремою.

Теорема 3. *Нехай, крім умови 1) теореми 1 з* $\nu(t) = \dfrac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)}$, *виконуються умови:*

1) $\varphi(x) \geqslant 0,\ \varphi'(x) \geqslant 0,\ \varphi''(x) \geqslant 0,\ x \in [0,h];\ \mu_1(t) \leqslant 0,\ \mu_2(t) \geqslant 0,$

$\mu_1'(t) \leqslant 0,\ \mu_2'(t) - f(h,t) \geqslant 0,\ \mu_3'(t) - \nu(t) f(0,t) - \int\limits_0^h f(x,t)dx \geqslant 0,$

$\nu_2(t) \neq 0,\ \nu(t) \geqslant 0,\ \nu'(t) \leqslant 0,\ t \in [0,T]; f(x,t) \geqslant 0,\ f_x(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in \overline{Q}_T;$

2) $\varphi'(0) = \mu_1(0),\ \varphi(h) = \mu_2(0),\ \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0).$

Тоді розв'язок задачі (1), (2), (3"), (4") існує і єдиний.

Теорема 3 доводиться так, як теорема 1.

1. Jones B.F. *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I* // J. Math. Mech. – 1962.– Vol. 11, N 6. – P. 907–918.
2. Jones B.F. *Various method for finding unknown coefficients in parabolic differential equations* // Comm. on Pure and Applied Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33–44.
3. Прилепко А.И., Костин А.Б. *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I*// Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33, N 3. – С. 146–155.
4. Cannon J.R., Lin Yanping, Wang Shingmin. *Determination of a control parameter in a parabolic differential equation*// J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – Vol. 33. – P. 149–163.
5. Иванчов Н.И. *Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями*// Укр. мат. журнал. – 1993. – Т. 45, N 8 – С. 1066–1071.
6. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – Препринт. – Київ, 1995. – 84 с.
7. Муравей Л.А., Филиновский А.В. *Об одной параболической краевой задаче*// ДАН СССР. – 1991. – Т. 317, N 1. – С. 39–43.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.96

УДК 517.95

ПРО ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С. М. Ковальчук

Koval'chuk S.M. On inverse problems for a parabolic system of differential equations The inverse problems for a parabolic system of differential equations are considered. The unknown coefficients before the highest derivatives in the system depend on the time variable. Existence and uniqueness conditions for solutions of these problems are established.

В області $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ розглянемо задачу визначення функцій $(a_1(t), \dots, a_n(t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)) \in C[0,T] \times C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$[1], $a_i(t) > 0, t \in [0,T], i = \overline{1,n}$, які задовольняють систему рівнянь

$$u_{it} = a_i(t) u_{ixx} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,t) u_j, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

початкові умови

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

крайові умови

$$u_i(0,t) = \mu_i(t), \ \ u_i(l,t) = \nu_i(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3}$$

і умови перевизначення

$$a_i(t) u_{ix}(0,t) = \varkappa_i(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Подібні задачі для одного рівняння, яке не містить молодших членів, досліджено в [2],[3]. У праці [4] встановлено умови стійкості та єдиності розв'язку оберненої задачі для системи (1) з невідомими коефіцієнтами, залежними тільки від просторової змінної. У даній статті встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі (1) – (4).

Зведемо задачу (1) – (4) до еквівалентної системи операторних рівнянь.

Припустимо, що виконуються умови.

Умова (A) $\varphi_i(0) = \mu_i(0), \ \varphi_i(l) = \nu_i(0), \ i = \overline{1,n}.$

Умова (B) $\varphi_i(x) \in C^1[0,l], \ \mu_i(t), \nu_i(t) \in C^1[0,T], \ \varkappa_i(t) \in C[0,T], \ c_{ij}(x,t) \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$, $i,j = \overline{1,n}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

За допомогою функції Гріна зведемо пряму задачу (1)-(3) до системи рівнянь щодо функцій $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$:

$$u_i(x,t)=g_i(x,t)+\int_0^t d\tau\int_0^l G_1(a_i;x,t,\xi,\tau)\sum_{j=1}^n c_{ij}(\xi,\tau)u_j(\xi,\tau)d\xi,\ i=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де

$$g_i(x,t)=\int_0^l \varphi_i(\xi)G_1(a_i;x,t,\xi,0)d\xi+\int_0^t a_i(\tau)\mu_i(\tau)G_{1\xi}(a_i;x,t,0,\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t a_i(\tau)\nu_i(\tau)G_{1\xi}(a_i;x,t,l,\tau)d\tau,\ G_m(a_i;x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\Theta_i(t)-\Theta_i(\tau))}}\times$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4(\Theta_i(t)-\Theta_i(\tau))}\right)+(-1)^m\exp\left(-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4(\Theta_i(t)-\Theta_i(\tau))}\right)\right),$$

$m=1,2$, $\Theta_i(t)=\int_0^t a_i(\tau)d\tau$, $i=\overline{1,n}$. Диференціюючи (5) за x, покладаючи $x=0$ та використовуючи умову перевизначення (4), отримаємо рівняння

$$a_i(t)=\varkappa_i(t)\Big(g_{ix}(0,t)+\int_0^t d\tau\int_0^l G_{1x}(a_i;0,t,\xi,\tau)\sum_{j=1}^n c_{ij}(\xi,\tau)u_j(\xi,\tau)d\xi\Big)^{-1}, \tag{6}$$

$i=\overline{1,n}$, де функції $g_{ix}(0,t)$ визначаються за формулами

$$g_{ix}(0,t)=\int_0^l \varphi_i'(\xi)G_2(a_i;0,t,\xi,0)d\xi-\int_0^t \mu_i'(\tau)G_2(a_i;0,t,0,\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t \nu_i'(\tau)G_2(a_i;0,t,l,\tau)d\tau,\qquad i=\overline{1,n}.$$

Запишемо систему (5),(6) у вигляді

$$u_i(x,t)=P_{1i}(u_1,\dots,u_n,a_i)(x,t),\ \ a_i(t)=P_{2i}(u_1,\dots,u_n,a_i)(t). \tag{7}$$

Тепер сформулюємо лему, яка встановлює еквівалентність задачі (1) – (4) і системи операторних рівнянь (7).

Лема. *Розв'язок $(a_1(t),\dots,a_n(t),u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))$ задачі (1) – (4) існує тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок $a_i(t)\in C[0,T]$, $u_i(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, $a_i(t)>0$, $t\in[0,T]$, $i=\overline{1,n}$ системи рівнянь (7).*

Доведення. Необхідна умова існування розв'язку задачі (1) – (4) випливає із методу зведення даної задачі до системи рівнянь (7).

Для того, щоб встановити, що функції $a_i(t)\in C[0,T]$, $u_i(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, $a_i(t)>0$, $t\in[0,T]$, $i=\overline{1,n}$, які задовольняють систему рівнянь (7), є розв'язком задачі (1) – (4), достатньо показати, що при умовах (A), (B) розв'язок системи (7) матиме гладкість розв'язку вихідної задачі. З умов **(A), (B)** і $a_i(t) \in C[0,T],\ i=\overline{1,n}$ випливає, що $g_i(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$. При умові, що функції $a_i(t)$, $c_{ij}(x,t)$, $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$ є неперервними в замиканнях областей визначення, інтеграли

$$\int_0^t d\tau \int_0^l G_1(a_i; x,t,\xi,\tau) \sum_{j=1}^n c_{ij}(\xi,\tau) u_j(\xi,\tau) d\xi, \quad i=\overline{1,n}$$

будуть належати класові $C^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тоді з (5) отримуємо, що $u_i(x,t) \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$. Оскільки $c_{ij}(x,t)$, $u_i(x,t) \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$, то праві частини рівнянь системи (5) належать класові $C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$, і, отже, $u_i \in C^{2,1}(\Omega) \cup C^{1,0}(\overline{\Omega})$, $i=\overline{1,n}$. Лему доведено.

Для того, щоб встановити умови існування розв'язку системи (7), використаємо теорему Шаудера про нерухому точку [5]. Спочатку оцінимо функції $u_i(x,t),\ a_i(t),\ i=\overline{1,n}$.

Нехай виконуються такі умови:

Умова (C) $\varphi_i(x) \geqslant 0,\ x \in [0,l],\ \mu_i(t) \geqslant 0,\ \nu_i(t) \geqslant 0,\ t \in [0,T],\ c_{ij}(x,t) \geqslant 0,\ (x,t) \in \overline{\Omega},\ i,j=\overline{1,n}$.

Умова (D) $\varphi_i'(x) > 0,\ x \in [0,l],\ \mu_i'(t) \leqslant 0,\ \nu_i'(t) \geqslant 0,\ \varkappa_i(t) > 0,\ t \in [0,T],\ i=\overline{1,n}$.

На підставі умови **(C)** з (5) випливає, що

$$u_i(x,t) \geqslant 0, \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Розглянемо систему (6). При $0 \leqslant \xi \leqslant l,\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ справедливі нерівності

$$G_{1x}(a_i; 0,t,\xi,\tau) \geqslant 0, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

оскільки $G_1(a_i;x,t,\xi,\tau) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ і $G_1(a_i;0,t,\xi,\tau)=0$ при $0 \leqslant \xi \leqslant l,\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,\ i=\overline{1,n}$. Використовуючи (8),(9) і умови **(C), (D),** з (6) отримуємо

$$a_i(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \varkappa_i(t)}{\min\limits_{[0,l]} \varphi_i'(x)} \equiv A_{1i} < \infty, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

За допомогою (10) оцінимо зверху функції $u_i(x,t),\ i=\overline{1,n}$. Позначивши $m_i(t) = \max\limits_{[0,l]} u_i(x,t),\ i=\overline{1,n}$ та врахувавши нерівності

$$g_i(x,t) \leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i(x) + \max_{[0,T]} \nu_i(t) \times$$
$$\times \max_{[0,l]} \int_0^{A_{1i}T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|x+(2k+1)l|}{2\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+(2k+1)l)^2}{4\sigma}\right) d\sigma +$$
$$+ \max_{[0,T]} \mu_i(t) \max_{[0,l]} \int_0^{A_{1i}T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|x+2kl|}{2\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+2kl)^2}{4\sigma}\right) d\sigma, \quad i=\overline{1,n},$$

з (5) отримаємо

$$m_i(t) \leqslant L + L_1 \int_0^t \sum_{j=1}^n m_j(\tau) d\tau, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

де сталі L, L_1 не залежать від невідомих функцій. Підсумувавши по i ліві і праві частини в (11), отримаємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t) \leqslant n(L + L_1 \int_0^t \sum_{j=1}^{n} m_j(\tau)d\tau),$$

звідки, згідно з лемою Гронуолла, випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t) \leqslant nL\exp(nL_1T) \equiv M. \tag{12}$$

Встановимо деякі нерівності для того, щоб оцінити $a_i(t)$ знизу. Безпосередньо з вигляду функцій $g_{ix}(0,t)$, $i = \overline{1,n}$ маємо

$$g_{ix}(0,t) \leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i'(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi \min\limits_{[0,T]} a_i(t)}} \max_{[0,T]} \left(\int_0^t \frac{\nu_i'(t)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 l^2}{4A_{1i}(t-\tau)}\right) d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_0^t \frac{\mu_i'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 l^2}{A_{1i}(t-\tau)}\right) d\tau \right). \tag{13}$$

За допомогою нерівності

$$\int_0^l G_{1x}(a_i; 0, t, \xi, \tau)d\xi \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi(\Theta_i(t) - \Theta_i(\tau))}}$$

отримуємо оцінку

$$\int_0^t d\tau \int_0^l G_{1x}(a_i; 0, t, \xi, \tau) \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\xi, \tau) u_j(\xi, \tau) d\xi \leqslant L_2 \left(\min_{[0,T]} a_i(t)\right)^{-1/2}, \tag{14}$$

$i = \overline{1,n}$, з незалежною від $a_i(t), u_i(x,t)$ сталою L_2. На підставі (13),(14), з рівнянь (6) випливає нерівність

$$\min_{[0,T]} a_i(t) \geqslant \frac{C_{0i}}{C_{1i} + C_{2i}\left(\min\limits_{[0,T]} a_i(t)\right)^{-1/2}}, \quad i = \overline{1,n},$$

звідки одержуємо

$$\min_{[0,T]} a_i(t) \geqslant \frac{1}{4C_{1i}^2}\left(\sqrt{C_{2i}^2 + 4C_{0i}C_{1i}} - C_{2i}\right)^2 \equiv A_{0i} > 0, \ \ i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Зауважимо, що сталі $C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}$ залежать тільки від вихідних даних задачі (1) – (4).

З оцінок (8), (10), (12), (15) та умов **(A), (B)** випливає, що оператор $P = (P_{21}, \ldots, P_{2n}, P_{11}, \ldots, P_{1n})$ переводить опуклу замкнену множину $\mathcal{N} = \{(a_1(t), \ldots, a_n(t), u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t)) : a_i(t) \in C[0,T],\ u_i(x,t) \in C(\overline{\Omega}),\ 0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} u_j(x,t) \leqslant M,\ A_{0i} \leqslant a_i(t) \leqslant A_{1i},\ i = \overline{1,n}\}$ в себе. Для того, щоб застосувати теорему Шаудера, необхідно встановити, що множина $P\mathcal{N}$ є одностайно неперервною. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує $\delta > 0$ таке, що

$$|P_{1i}(u_1, \ldots, u_n, a_i)(x_2, t_2) - P_{1i}(u_1, \ldots, u_n, a_i)(x_1, t_1)| < \varepsilon, \tag{16}$$

$$|P_{2i}(u_1, \ldots, u_n, a_i)(t_2) - P_{2i}(u_1, \ldots, u_n, a_i)(t_1)| < \varepsilon \tag{17}$$

для всіх $(a_1(t), \ldots, a_n(t), u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t)) \in \mathcal{N}$, якщо $|x_2 - x_1| < \delta$, $|t_2 - t_1| < \delta$, $(x_j, t_j) \in \overline{\Omega}$, $j = 1, 2$.

Оскільки

$$\lim_{t \to 0} P_{1i}(u_1, \ldots, u_n, a_i)(x,t) = \varphi_i(x),\ x \in [0,l],\ \lim_{t \to 0} P_{2i}(u_1, \ldots, u_n, a_i)(t) = \frac{\varkappa_i(0)}{\varphi_i'(0)} > 0,$$

$i = \overline{1,n}$, для всіх $(a_1(t), \ldots, a_n(t), u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t)) \in \mathcal{N}$, то існує $t_0 > 0$ таке, що для довільних вектор-функцій $(a_1(t), \ldots, a_n(t), u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t)) \in \mathcal{N}$ справджуються нерівності (16), (17) якщо $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_0$.

Нехай тепер $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. Встановимо оцінки деяких виразів, які входять в (16),(17). Розглянемо різницю

$$R = \int_0^l \varphi_i(\xi)(G_1(a_i; x_2, t_2, \xi, 0) - G_1(a_i; x_1, t_1, \xi, 0))d\xi,$$

яку запишемо в такому вигляді

$$R = \int_0^l \varphi_i(\xi)(G_1(a_i; x_2, t_2, \xi, 0) - G_1(a_i; x_1, t_2, \xi, 0))d\xi +$$
$$+ \int_0^l \varphi_i(\xi)(G_1(a_i; x_1, t_2, \xi, 0) - G_1(a_i; x_1, t_1, \xi, 0))d\xi \equiv R_1 + R_2.$$

Подаючи інтеграл R_1 рівністю

$$R_1 = \int_0^l \varphi_i(\xi)d\xi \int_{x_1}^{x_2} G_{1z}(a_i; z, t_2, \xi, 0)dz,$$

отримаємо при $x_1 < x_2$

$$|R_1| \leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i(x) \int_{x_1}^{x_2} dz \int_0^l |G_{1z}(a_i; z, t, \xi, 0)|d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \max_{[0,l]} \varphi_i(x) \frac{1}{4\sqrt{\pi}(\Theta_i(t))^{3/2}} \int_{x_1}^{x_2} dz \int_0^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(|z - \xi + 2kl| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(z-\xi+2kl)^2}{4\Theta_i(t)}\right) + |z+\xi+2kl| \exp\left(-\frac{(z+\xi+2kl)^2}{4\Theta_i(t)}\right)\Bigg) d\xi.$$

Оскільки справджується нерівність

$$\frac{1}{4\Theta_i(t)} \int_0^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} |z-\xi+2kl| \exp\left(-\frac{(z-\xi+2kl)^2}{4\Theta_i(t)}\right) d\xi < 1, \quad z \in [0,l],$$

то існує $\delta_1 > 0$ таке, що

$$|R_1| \leqslant \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{\pi A_{0i} t_0}} \max_{[0,l]} \varphi_i(x) < \varepsilon/2, \quad \text{при } |x_2-x_1| < \delta_1.$$

Записуючи R_2 у вигляді

$$R_2 = \int_0^l \varphi_i(\xi) d\xi \int_{\Theta_i(t_1)}^{\Theta_i(t_2)} G_{1\sigma}(1; x_1, \sigma, \xi, 0) d\sigma,$$

отримаємо оцінку $|R_2| \leqslant C_3 |t_2 - t_1|$, де стала $C_3 > 0$ залежить тільки від t_0, T, A_{0i}, A_{1i}, $\max\limits_{[0,l]} \varphi_i(x)$. Візьмемо $\delta_2 = \varepsilon/2C_3$, тоді $|R_2| < \varepsilon/2$ при $|t_2 - t_1| < \delta_2$. Отже, взявши $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, отримаємо $|R| < \varepsilon$, якщо $|x_2 - x_1| < \delta$, $|t_2 - t_1| < \delta$.

Розглянемо вираз

$$J = \int_0^{t_2} a_i(\tau)\mu_i(\tau) G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) d\tau - \int_0^{t_1} a_i(\tau)\mu_i(\tau) \times$$
$$\times G_{1\xi}(a_i; x_1, t_1, 0, \tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} a_i(\tau)\mu_i(\tau) G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) d\tau + \int_0^{t_1} a_i(\tau) \times$$
$$\times \mu_i(\tau) \left(G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) - G_{1\xi}(a_i; x_1, t_1, 0, \tau)\right) d\tau \equiv J_1 + J_2.$$

Провівши заміну $\sigma = \Theta_i(t_2) - \Theta_i(\tau)$ в інтегралі J_1, одержимо

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} \mu_i(t) \max_{[0,l]} \int\limits_0^{A_{1i}|t_2-t_1|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|x_2+2kl|}{\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x_2+2kl)^2}{4\sigma}\right) d\sigma.$$

Виберемо $\delta_3 > 0$ таке, що $|J_1| < \varepsilon/3$ при $|t_2 - t_1| < \delta_3$. Перепишемо J_2 у вигляді $J_2 = J_{21} + J_{22}$, де

$$J_{21} = \int_0^{t_3} a_i(\tau)\mu_i(\tau) \left(G_{1\xi}(a_i; x_2, t_2, 0, \tau) - G_{1\xi}(a_i; x_1, t_1, 0, \tau)\right) d\tau,$$

$$J_{22} = \int_{t_3}^{t_1} a_i(\tau)\mu_i(\tau) \left(\int_{x_1}^{x_2} G_{1\xi z}(a_i; z, t_2, 0, \tau) dz + \int_{\Theta_i(t_1)-\Theta_i(\tau)}^{\Theta_i(t_2)-\Theta_i(\tau)} G_{1\xi\sigma}(1; x_1, \sigma, 0, \tau) d\sigma\right) d\tau$$

і $t_3 > 0$ таке, що $|J_{21}| < \varepsilon/3$ для будь-яких $(x_i, t_i) \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$. Використовуючи оцінку

$$|J_{22}| \leqslant C_4|x_2 - x_1| + C_5|t_2 - t_1|,$$

візьмемо $\delta_4 > 0$ таке, що $J_2 < \varepsilon$ при $|x_2 - x_1| < \delta_4$, $|t_2 - t_1| < \delta_4$. Тоді отримаємо $|J| < \varepsilon$, якщо $|x_2 - x_1| < \delta_0$, $|t_2 - t_1| < \delta_0$, $\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_4\}$. Зауважимо, що сталі C_4, C_5 не залежать від $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Оцінюючи аналогічно інші вирази в (16), (17), приходимо до висновку, що множина $P\mathcal{N}$ є одностайно неперервною. Згідно з теоремою Шаудера, розв'язок системи (6), (7) існує.

Покажемо тепер єдиність розв'язку задачі (1) – (4). Припустимо, що існує два різних розв'язки $(b_1, \dots, b_n, v_1, \dots, v_n)$, $(d_1, \dots, d_n, w_1, \dots, w_n)$ задачі (1) – (4). Тоді вектор-функція $(b_1 - d_1, \dots, b_n - d_n, v_1 - w_1, \dots, v_n - w_n,)$ задовольняє такі умови:

$$u_{it} = b_i(t)u_{ixx} + a_i(t)w_{ixx} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,t)u_j, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{19}$$

$$u_i(x, 0) = 0, \qquad x \in [0, l], \tag{20}$$

$$u_i(0, t) = u_i(l, t) = 0, \qquad t \in [0, T], \tag{21}$$

$$b_i(t)u_{ix}(0, t) + a_i(t)w_{ix}(0, t) = 0, \qquad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \tag{22}$$

де $u_i(x, t) = v_i(x, t) - w_i(x, t)$, $a_i(t) = b_i(t) - d_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Звівши пряму задачу (19) – (21) до системи інтегральних рівнянь

$$u_i(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G_1(b_i; x, t, \xi, \tau)(a_i(\tau)w_{i\xi\xi}(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\xi, \tau)u_j(\xi, \tau))d\xi, \quad i = \overline{1, n}, \tag{23}$$

та підставивши (23) в (22), отримаємо

$$a_i(t) = -\frac{b_i(t)d_i(t)}{\varkappa_i(t)} \int_0^t d\tau \int_0^l G_{1x}(b_i; 0, t, \xi, \tau)(a_i(\tau)w_{i\xi\xi}(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\xi, \tau)u_j(\xi, \tau))d\xi, \tag{24}$$

$i = \overline{1, n}$. З (23), (24) випливають нерівності

$$m_i(t) \leqslant K \int_0^t (|a_i(\tau)| + \sum_{j=1}^{n} m_j(\tau))d\tau, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{25}$$

$$|a_i(t)| \leqslant K \int_0^t (|a_i(\tau)| + \sum_{j=1}^{n} m_j(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{26}$$

де $m_i(t) = \max\limits_{[0,l]} |u_i(x, t)|$ і стала $K > 0$ не залежить від $u_i(x, t)$, $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Позначивши $p(t) = \sum_{j=1}^{n}(|a_j(\tau)| + m_j(\tau))$, з (25), (26) отримаємо

$$p(t) \leqslant nK \int_0^t \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{t - \tau}}\Big)p(\tau)d\tau,$$

звідки

$$p(t) \leqslant (nK + 2\sqrt{T}n^2K^2 + \pi n^2K^2) \int_0^t p(\tau)d\tau.$$

На підставі леми Гронуолла $p(t) \equiv 0$. Використовуючи означення функції $p(t)$, знаходимо $a_i(t) \equiv 0, u_i(x,t) \equiv 0, i = \overline{1,n}$.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) – (4).*

Аналогічно досліджуються задача (1) – (3) з умовами перевизначення

$$u_{ix}(0,t) = \varkappa_i(t), \qquad t \in [0,T], \qquad i = \overline{1,n},$$

та задача для системи (1) з початковими умовами (2), крайовими умовами

$$u_{ix}(0,t) = \mu_i(t), \quad u_{ix}(l,t) = \nu_i(t), \qquad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n},$$

і умовами перевизначення

$$u_i(0,t) = \varkappa_i(t), \qquad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n}.$$

Існування розв'язків вказаних задач встановлене на малому проміжку часу $[0, T_0]$, де $0 < T_0 \leqslant T$.

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.: Наука, 1967.– 736 с.
2. Jones B.F. *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part 1* // J. Math. Mech.– 1962.– Vol. 11, N 6.– P.907-918.
3. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. Препринт.– Київ, 1995.– 84 с.
4. Ахундов А.Я. *Обратная задача для системы параболических уравнений* // Дифференц. уравн.– 1988.– Т. 24, N 3.– С.520-521.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969.– 448 с.

Стаття надійшла до редколегії 07.03.97

УДК 517.927.25+512.928.5

ПРО АСИМПТОТИКУ ГЛОБАЛЬНИХ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СИЛЬНО НЕОДНОРІДНОЇ СТРУНИ

Ю. Д. Головатий, І. А. Головач

Holovatyj Yu.D., Holovach I.A. On asymptotics of global proper vibrations of a singular perturbed string. Spectral properties of a composite string with singular perturbed density are studied. It has been shown by O.A.Oleinik, such vibrating system is possessed of local proper oscillations, which are concentrated near to area of perturbation and corresponded to infinitely small proper frequencies. We enter a concept of the global forms of oscillations, which are simulated by discrete sequences of eigenfunctions of the perturbed problem. The full asymptotic expansions on a small discrete parameter $\varepsilon_k \to 0$ for such oscillations are constructed and justified.

1. Формулювання задачі. У працях [1-3] вивчено асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень та власних функцій найпростішої математичної моделі, яка виникає при дослідженні композитних середовищ

$$\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2}(x) + \lambda(\varepsilon)\rho_\varepsilon(m,x)u_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{1.1}$$

$$u_\varepsilon(a) = 0, \quad u_\varepsilon(b) = 0, \tag{1.2}$$

де $\lambda(\varepsilon)$ – спектральний параметр, а розподіл маси струни має вигляд

$$\rho_\varepsilon(m,x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{коли } x \in (a,-\varepsilon) \cup (\varepsilon, b); \\ \varepsilon^{-m} q(\frac{x}{\varepsilon}), & \text{коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases}$$

Тут ε – малий додатний параметр, m – дійсне число, функції ρ та q додатні на множинах (a,b) та $(-1,1)$ відповідно. Це модель двокомпонентного середовища, складові якого мають подібні пружні властивості, але суттєво відрізняються густиною. В точках розриву функції $\rho_\varepsilon(m,x)$ власна функція u_ε задовольняє умови спряження

$$[u_\varepsilon(x)]_{x=\pm\varepsilon} = [u'_\varepsilon(x)]_{x=\pm\varepsilon} = 0.$$

Доведено, що існує 5 випадків (щодо значень параметра m) поведінки власних елементів цієї задачі при $\varepsilon \to 0$ та побудовані повні асимптотичні розвинення власних значень та власних функцій. У такому формулюванні при певних значеннях m можна отримати усі класичні результати щодо спектральних властивостей неоднорідних одновимірних

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 35B25.

континуумів [4,5]. З іншого боку, ця модель описує і явища, характерні лише для композитних коливних систем. Так, у випадку $m > 2$ асимптотичні розвинення власних функцій підтверджують існування ефекту *локальних* коливань системи в околі області збурення, який відомий з експериментів. А саме, всі власні значення $\lambda(\varepsilon)$, які є неперервними функціями параметра ε, прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$ (див. рис.1), а головним членом асимптотики нормованих в просторі Соболєва $H_0^1(a,b)$ власних функцій $u_\varepsilon(x)$ є функції вигляду $\sqrt{\varepsilon}v(x/\varepsilon)$, які мають нескінченно малу норму в $L_2(a,b)$.

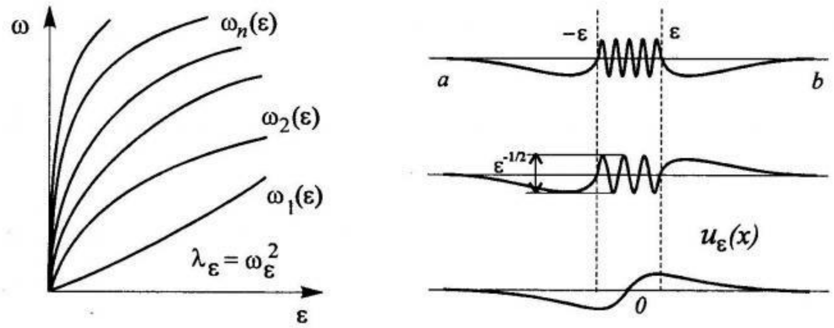


Рис.1

У цій праці ми покажемо, що крім локальних форм коливань, композитній струні властиві в певному сенсі глобальні власні коливання. Будемо говорити, що *дискретна послідовность власних значень $\{\lambda(\varepsilon_n)\}$ задачі (1.1),(1.2) та послідовність нормованих в $H_0^1(a,b)$ власних функцій $\{u(\varepsilon_n,x)\}$ моделюють глобальну форму коливань $v(x)$ з частотою $\omega_* \neq 0$, коли*

$$\lambda(\varepsilon_n) \to \omega_*^2, \quad u(\varepsilon_n,\cdot) \to v \text{ в } H_0^1(a,b) \qquad \text{при } \varepsilon_n \to 0,$$

де функція v відмінна від нуля.

Зауважимо, що цей феномен насправді має дискретну природу – таким формам коливань не відповідає жодне неперервне за параметром ε власне значення чи неперервний власний вектор.

2. Найпростіша модель: побудова явних розв'язків. Щоб зрозуміти природу глобальних коливань, розглянемо частковий випадок задачі (1.1),(1.2), коли $b = |a| = 1$, $\rho(x) \equiv 1$, $q = 1$, $m = 4$. Оскільки тепер задача (1.1),(1.2) володіє симетрією $x \mapsto -x$, то її власні функції є парними або непарними. Обмежимося аналізом парних власних функцій, які мають вигляд

$$u_\varepsilon(\omega_\varepsilon, x) = \begin{cases} \sin\omega_\varepsilon(1-|x|), & \text{коли } \varepsilon \leqslant |x| < 1; \\ \dfrac{\sin\omega_\varepsilon(1-\varepsilon)}{\cos\omega_\varepsilon\varepsilon^{-1}}\cos\dfrac{\omega_\varepsilon x}{\varepsilon^2}, & \text{коли } |x| < \varepsilon, \end{cases} \tag{2.1}$$

а числа ω_ε є коренями рівняння

$$\varepsilon^2 \operatorname{ctg}\frac{\omega}{\varepsilon} = \operatorname{tg}\omega(1-\varepsilon), \quad \omega \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Лема 2.1. *Для кожного* $\varepsilon \in (0,1)$ *рівняння (2.2) має зліченну послідовність коренів* $0 < \omega_1^\varepsilon < \omega_2^\varepsilon < \cdots < \omega_k^\varepsilon < \cdots \to \infty, \quad k \to \infty$. *Крім того,*

(i) величини ω_k^ε *є неперервними функціями параметра* ε *і прямують до нуля при* $\varepsilon \to 0$;

(ii) корені рівняння (2.2) утворюють $\pi\varepsilon$*-сітку на додатній півосі, тобто кожна точка півосі є точкою скупчення цих коренів при* $\varepsilon \to 0$.

Твердження леми легко отримати, проаналізувавши рівняння (2.2) графічно. Числа ω_k^ε є абсцисами точок перетину графіка тангенса, період якого близький до π, і густої сітки котангенсів з періодом $\pi\varepsilon$.

Нескінченно малі неперервні власні значення відповідають ситуації локальних коливань системи, і їх дослідження було проведене у працях, згаданих вище. Щоб знайти інші форми коливань, які, на противагу *локальним*, ми назвали *глобальними*, треба забути про впорядкованості та неперервності коренів рівняння (2.2).

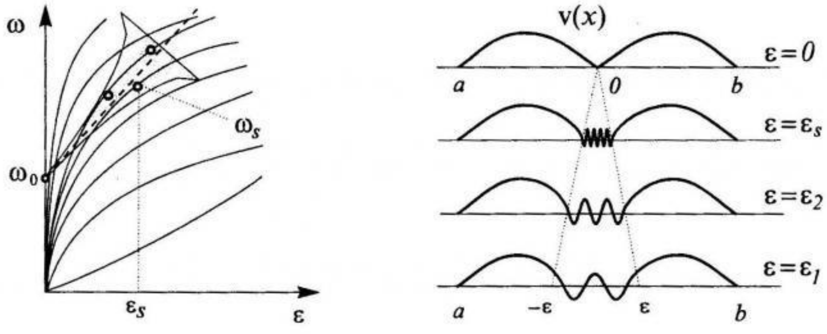


Рис.2

Нехай $H_0^1(-1,1)$ — простір Соболєва, отриманий поповненням класу функцій $C_0^\infty(-1,1)$ за нормою $\|v\| = (v', v')_{L_2(-1,1)}^{1/2}$. Покажемо, що існують такі дискретні послідовності частот $\omega(\varepsilon_s) \to \omega_* > 0$ при $\varepsilon_s \to 0$, для яких послідовності власних функцій $u_{\varepsilon_s}(\omega(\varepsilon_s), x)$ мають ненульову границю (а саме, $\sin \omega_*(1 - |x|)$) в просторі $H_0^1(-1,1)$.

Існування такої границі еквівалентне збіжності до нуля інтеграла

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{du_\varepsilon}{dx}\right)^2 dx = \frac{\omega_\varepsilon^2 \sin^2 \omega_\varepsilon (1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 \cos^2(\omega_\varepsilon \varepsilon^{-1})} \Big(1 + O(\varepsilon)\Big), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.3}$$

на послідовності ε_s. Очевидно, що необхідною умовою цього є рівність $\omega_* = \pi k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Згідно з лемою 2.1 для числа ω_* можна побудувати дискретну апроксимацію довільного характеру, зокрема, існує послідовність $\varepsilon_s \to 0$, якій відповідає послідовність частот $\omega_s = \pi k + \alpha \varepsilon_s + O(\varepsilon_s^2)$. Тоді

$$\sin^2 \omega_s (1 - \varepsilon_s) = \sin^2(\pi k + (\alpha - \pi k)\varepsilon_s + O(\varepsilon_s^2)) = O(\varepsilon_s^4), \quad \varepsilon_s \to 0,$$

якщо покласти $\alpha = \pi k$. З іншого боку, з умови, що числа ω_s є коренями рівняння (2.2) при $\varepsilon = \varepsilon_s$, маємо

$$\lim_{s\to\infty} \cos^2(\omega_s {\varepsilon_s}^{-1}) = \frac{\pi^2 k^2}{\pi^2 k^2 + 1}.$$

Отже, *в описаному частковому випадку система (1.1),(1.2) має глобальні форми власних коливань* $u_\varepsilon(x)$, *які близькі при* $\varepsilon \to 0$ *до функцій* $\sin \pi k(1-|x|)$, $k \in \mathbb{N}$. *Таким коливанням відповідають частоти* ω_ε, *розташовані в "параболічному" конусі в* $\mathbb{R}^2_{\varepsilon,\omega}$ *з вершиною в точці* $(0, \pi k)$ *та віссю* $\pi k(1+\varepsilon)$ *(рис.2).*

3. Побудова асимптотичних розвинень у загальному випадку. Алгоритм знаходження асимптотики глобальних власних коливань однаковий для всіх $m > 2$. Ми проведемо побудову для $m = 4$ і $q(\xi) = q^2 = \text{const}$.

Введемо позначення $\lambda_\varepsilon = \omega_\varepsilon^2$, $\xi = \varepsilon^{-1}x$, $\eta = \varepsilon^{-2}x$. Асимптотичні розвинення будемо шукати у вигляді

$$\omega_\varepsilon \sim \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \tag{3.1}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots, \text{ коли } x \in (a, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, b), \tag{3.2}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon^2 z_0(\sigma; \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) + \varepsilon^3 z_1(\sigma; \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) + \dots, \text{ коли } x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \tag{3.3}$$

де $\sigma = \varepsilon^{-1}$ – великий параметр. Ряди (3.1),(3.2) повинні справджувати незбурене рівняння (1.1) на інтервалах $(a, 0)$ та $(0, b)$

$$\Big[\frac{d^2}{dx^2} + (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2\rho(x)\Big](v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \dots) \sim$$
$$\sim (v_0'' + \omega_0^2\rho v_0) + \varepsilon(v_1'' + \omega_0^2\rho v_1 + 2\omega_0\omega_1\rho v_0) +$$
$$+ \varepsilon^2(v_2'' + \omega_0^2\rho v_2 + 2\omega_0\omega_1\rho v_1 + (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)\rho v_0) + \dots \sim 0,$$

а також крайові умови (1.2)

$$v_0(a) + \varepsilon v_1(a) + \varepsilon^2 v_2(a) + \dots \sim 0, \quad v_0(b) + \varepsilon v_1(b) + \varepsilon^2 v_2(b) + \dots \sim 0.$$

Щоб сформувати задачі для знаходження функцій v_k, потрібно також використати умови спряження рядів (3.2) та (3.3) в точках $x = \pm\varepsilon$ (або $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm\sigma$)

$$v_0(\pm\varepsilon) + \varepsilon v_1(\pm\varepsilon) + \varepsilon^2 v_2(\pm\varepsilon) + \dots \sim \varepsilon^2 z_0(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \varepsilon^3 z_1(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \dots.$$

Розвинувши величини $v_k(\pm\varepsilon)$ в ряд, остаточно отримаємо

$$v_0(\pm 0) + \varepsilon(v_1(\pm 0) \pm v_0'(\pm 0)) + \varepsilon^2(v_2(\pm 0) \pm v_1'(\pm 0) +$$
$$+ \frac{1}{2}v_0''(\pm 0) - z_0(\sigma; \pm 1, \pm\sigma)) + \dots \sim 0.$$

Аналогічні перетворення дають умову рівності формальних похідних рядів (3.2) та (3.3) в точках $x = -\varepsilon$ і $x = \varepsilon$:

$$\begin{aligned} v_0'(\pm 0) + \varepsilon(v_1'(\pm 0) \pm v_0''(\pm 0)) + \varepsilon^2(v_2'(\pm 0) \pm v_1''(\pm 0) + \frac{1}{2}v_0'''(\pm 0)) + \dots \sim \\ \sim \frac{\partial z_0}{\partial \eta}(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \varepsilon(\frac{\partial z_1}{\partial \eta}(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) + \frac{\partial z_0}{\partial \xi}(\sigma; \pm 1, \pm\sigma)) + \dots. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тут ми скористалися співвідношенням $\frac{d}{dx} = \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}$.

Будемо вимагати, щоб перші члени розвинення (3.2) справджували задачі

$$v_0''(x) + \omega_0^2\rho(x)v_0(x) = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad v_0(a) = v_0(0) = v_0(b) = 0, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} v_1''(x) + \omega_0^2\rho(x)v_1(x) = -2\omega_0\omega_1\rho(x)v_0(x), \quad x \in \Omega_0, \\ v_1(a) = 0, v_1(b) = 0, \quad v_1(-0) = v_0'(-0), v_1(+0) = -v_0'(+0), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} v_2'' + \omega_0^2\rho(x)v_2 = -2\omega_0\omega_1\rho(x)v_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)\rho(x)v_0, \quad x \in \Omega_0, \\ v_2(a) = 0, \quad v_2(b) = 0, \\ v_2(\pm 0) = z_0(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) \mp v_1'(\pm 0) - \frac{1}{2}v_0''(\pm 0), \end{cases} \tag{3.7}$$

де $\Omega_0 = (a, 0) \cup (0, b)$.

Нехай ω_0^2 – просте власне значення задачі (3.5), а v_0 – відповідна власна функція. Спектр триточкової задачі (3.5) є теоретико-множинним об'єднанням спектрів двоточкових задач на інтервалах $(a, 0)$ та $(0, b)$ відповідно. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що ω_0^2 – власне значення, пов'язане з відрізком $[0, b]$, а тоді

$$v_0(x) \equiv 0, \qquad x \in (a, 0). \tag{3.8}$$

Зауваження. *Очевидно, що є випадки, коли всі власні значення задачі (3.5) двократні (наприклад, коли $b = |a|$), а функція ρ – парна. Ми обмежемося побудовою асимптотичних розвинень глобальних коливань, які відповідають простим власним значенням задачі (3.5), вважаючи, що такі власні значення є.*

Задача (3.6) є "задачею на спектрі", а тому її розв'язок v_1 існує лише при виконанні умови

$$v_0'(+0)^2 + v_0'(-0)^2 = 2\omega_0\omega_1 \int_a^b \rho v_0^2\,dx,$$

яку ми отримали в результаті інтегрування по множині Ω_0 рівняння (3.6), домноженого на власну функцію v_0. Припустимо, що v_0 нормована умовою $(\rho v_0, v_0)_{L_2(a,b)} = 1$. Тоді наступний член ряду (3.1) задається формулою

$$\omega_1 = \frac{1}{2\omega_0}(v_0'(+0)^2 + v_0'(-0)^2) = \frac{1}{2\omega_0}v_0'(+0)^2.$$

Тут ми використали рівність (3.8), з якої випливає також і те, що функція v_1 тотожно дорівнює нулю на відрізку $[a, 0]$. Задача (3.6) має одновимірний многовид розв'язків, тому підпорядкуємо розв'язок v_1 умові ортогональності $(\rho v_1, v_0)_{L_2(a,b)} = 0$.

Крайові умови задачі (3.7) містять функцію z_0, а тому перейдемо до побудови внутрішнього розвинення (3.3). Підставимо цей ряд у рівняння (1.1) на інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$, вважаючи, що його коефіцієнти $z_k(\sigma; \xi, \eta)$ є функціями двох незалежних змінних ξ та η. Тоді в прямокутнику $\Pi_\sigma = \{(\xi,\eta) : |\xi| < 1, |\eta| < \sigma\}$ матимемо

$$\Big[(\varepsilon^{-4}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2\varepsilon^{-3}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}) + (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2\varepsilon^{-4}q^2\Big]\times$$
$$\times(\varepsilon^2 z_0(\sigma;\xi,\eta) + \varepsilon^3 z_1(\sigma;\xi,\eta) + \varepsilon^4 z_2(\sigma;\xi,\eta) + \dots) \sim$$
$$\sim \varepsilon^{-2}\Big(\frac{\partial^2 z_0}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_0\Big) + \varepsilon^{-1}\Big(2\frac{\partial^2 z_0}{\partial\xi\partial\eta} + 2\omega_0\omega_1 q^2 z_0 + \frac{\partial^2 z_1}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_1\Big) +$$
$$+(\frac{\partial^2 z_2}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_2 + 2\frac{\partial^2 z_1}{\partial\xi\partial\eta} + 2\omega_0\omega_1 q^2 z_1 + \frac{\partial^2 z_0}{\partial\eta^2} + (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1)q^2 z_0) + \dots \sim 0.$$

Врахувавши умови спряження (3.4), а також те, що v_0 і v_1 дорівнюють нулю для від'ємних значень аргумента, отримаємо задачі для функцій z_0 і z_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_0 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial\xi\partial\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 z_0 = 0, \end{cases} \quad (\xi,\eta) \in \Pi_\sigma, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial\eta}(\sigma; -1, -\sigma) = 0, \quad \frac{\partial z_0}{\partial\eta}(\sigma; 1, \sigma) = v_0'(+0); \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_1 = 0, \qquad (\xi,\eta) \in \Pi_\sigma, \\ \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial\xi\partial\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 z_1 = -\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial\xi^2} + (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1)q^2 z_0\Big), \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial\eta}(\sigma; -1, -\sigma) = -\frac{\partial z_0}{\partial\xi}(\sigma; -1, -\sigma), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial\eta}(\sigma; 1, \sigma) = -\frac{\partial z_0}{\partial\xi}(\sigma; 1, \sigma) + v_1'(+0) + v_0''(+0). \tag{3.13}$$

Ці системи рівнянь з частинними похідними, крайові умови для яких задаються лише в двох вершинах прямокутника Π_σ, вимагають додаткового дослідження. Хоча такі задачі не є коректними, ми сформулюємо певні умови їх розв'язності, які будуть достатніми для побудови ряду (3.3).

Лема 3.1. *Нехай виконуються умови: (i)* $\sigma \neq \dfrac{\pi k - 2q\omega_1}{2q\omega_0}$, $k \in \mathbb{N}$;
(ii) функція F допускає зображення

$$F(\sigma;\xi,\eta) = f_1(\sigma,\xi)\sin q(\omega_0\eta + \omega_1\xi) + f_2(\sigma,\xi)\cos q(\omega_0\eta + \omega_1\xi) \tag{3.14}$$

та неперервно диференційовна в Π_σ. Тоді існує єдиний розв'язок $Z(\sigma;\xi,\eta)$ задачі

$$Z_{\eta\eta} + \omega_0^2 q^2 Z = 0, \qquad Z_{\xi\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 Z = F(\sigma;\xi,\eta), \tag{3.15}$$

$$Z_\eta(\sigma; -1, -\sigma) = h_1(\sigma), \quad Z_\eta(\sigma; 1, \sigma) = h_2(\sigma), \tag{3.16}$$

який двічі неперервно диференційовний на прямокутнику Π_σ.

Доведення. Загальний розв'язок першого рівняння подамо у вигляді

$$Z(\sigma;\xi,\eta) = a_1(\sigma,\xi)\cos q(\omega_0\eta+\omega_1\xi) + a_2(\sigma,\xi)\sin q(\omega_0\eta+\omega_1\xi).$$

Підставляючи це зображення в друге рівняння (3.15) та крайові умови (3.16), отримаємо крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь з невідомим вектором $a_\sigma = (a_1(\sigma,\xi), a_2(\sigma,\xi))$:

$$\dot a_1 = -(\omega_0 q)^{-1} f_1(\sigma,\xi), \quad \dot a_2 = (\omega_0 q)^{-1} f_2(\sigma,\xi),; \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} a_1(\sigma,-1)\sin q\gamma(\sigma) + a_2(\sigma,-1)\cos q\gamma(\sigma) = (\omega_0 q)^{-1} h_1(\sigma), \\ a_1(\sigma,1)\sin q\gamma(\sigma) - a_2(\sigma,1)\cos q\gamma(\sigma) = -(\omega_0 q)^{-1} h_2(\sigma), \end{cases} \tag{3.18}$$

де $\xi \in (-1,1)$, $\gamma(\sigma) = (\omega_0\sigma + \omega_1)$, а крапкою позначена похідна за змінною ξ.

Оскільки значення вектора a_σ на кінцях відрізка пов'язані рівністю

$$a_\sigma(1) = a_\sigma(-1) + (\omega_0 q)^{-1}\int_{-1}^{1} f(\sigma,s)\,ds,$$

де $f = (-f_1, f_2)$, то умови (3.18) можна переписати так

$$B(\sigma)a_\sigma(-1) = g(\sigma), \tag{3.19}$$

де матриця $B(\sigma)$ та вектор $g(\sigma)$ мають вигляд

$$B(\sigma) = \begin{pmatrix} \sin q\gamma(\sigma) & \cos q\gamma(\sigma) \\ \sin q\gamma(\sigma) & -\cos q\gamma(\sigma) \end{pmatrix},$$

$$g(\sigma) = \frac{1}{\omega_0 q}\Big(h_1(\sigma), \sin q\gamma(\sigma)\int_{-1}^{1} f_1\,ds + \cos q\gamma(\sigma)\int_{-1}^{1} f_2\,ds - h_2(\sigma)\Big).$$

Якщо матриця $B(\sigma)$ невироджена, то задача (3.17),(3.19) є задачею Коші, а, отже, має єдиний розв'язок потрібної гладкості. Оскільки $\det B(\sigma) = -\sin 2q\gamma(\sigma)$, то, згідно з першою умовою леми, цей визначник не дорівнює нулю. Лему доведено.

Лема 3.2. *Нехай величини F, h_1 та h_2 не залежать від σ. Тоді можна вибрати таку послідовність $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, яка задовольняє першу умову леми 3.1, що розв'язок $Z(\sigma_n;\xi,\eta)$ задачі (3.15),(3.16) разом з числами $Z(\sigma_n;\pm1,\pm\sigma_n)$ не залежать від σ (тобто від n). Крім того, для всіх $n \in \mathbb{N}$ існує стала C, що*

$$|Z(\sigma_n;\xi,\eta)| \leqslant C, \qquad (\xi,\eta)\in\Pi_{\sigma_n}.$$

Доведення. Згідно з умовою леми в задачі (3.17),(3.19) лише матриця B залежить від σ. Нехай α та β – два відмінні від нуля числа і $\alpha^2+\beta^2=1$. Визначимо числа σ_n з рівнянь

$$\sin q\gamma(\sigma_n) = \alpha \quad \cos q\gamma(\sigma_n) = \beta.$$

Тоді матриця $B(\sigma_n)$ є сталою та невиродженою, $\det B(\sigma_n) = -2\alpha\beta$. Отже, розв'язок задачі (3.15),(3.16) набуває вигляду

$$Z(\sigma_n;\xi,\eta) = a_1(\xi)\cos q(\omega_0\eta+\omega_1\xi) + a_2(\xi)\sin q(\omega_0\eta+\omega_1\xi)$$

і є обмеженою функцією в прямокутнику Π_{σ_n}. Зокрема,

$$Z(\sigma_n;-1,-\sigma_n) = a_1(-1)\alpha - a_2(-1)\beta \quad Z(\sigma_n;1,\sigma_n) = a_1(1)\alpha + a_2(1)\beta.$$

Лему доведено.

Повернемося до побудови асимптотичних розвинень. Надалі вважаємо, що числа α та β, які визначають послідовність $\sigma_n \to +\infty$, зафіксовані. Позначимо цю послідовність $\Sigma_{\alpha\beta}$.

Зауваження. *Хоча вибір такої послідовності неоднозначний, це позначиться лише на членах асимптотичних рядів порядку ε^2 та вищого. Така неоднозначність спричинена природою явища, яке ми описуємо: для кожної пари $(\omega_0, v_0(x))$ існує континуальна кількість дискретних послідовностей власних функцій вихідної задачі, які апроксимують таку глобальну форму коливань; всі вони відповідають частотам, які лежать в тонкому конусі з віссю $\omega_0 + \omega_1\varepsilon$ (рис.2).*

Для $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$ задача (3.9),(3.10) задовольняє усі умови лем 3.1 та 3.2, а, отже, існує її єдиний розв'язок

$$z_0(\sigma;\xi,\eta) = -\frac{v_0'(+0)}{2q\omega_0}\Big(\frac{1}{\alpha}\cos q(\omega_0\eta+\omega_1\xi) - \frac{1}{\beta}\sin q(\omega_0\eta+\omega_1\xi)\Big),$$

який є нескінченно диференційовний.

З умови розв'язності задачі (3.7) визначимо наступний член ряду (3.1)

$$\omega_2 = (2\omega_0)^{-1}v_0'(+0)\big(v_1'(+0) + 1/2v_0''(+0) - z_0(\sigma;1,\sigma)\big) - (2\omega_0)^{-1}\omega_1^2.$$

Зауважимо, що права частина не залежить від σ, коли $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$.

Далі ми знаходимо функцію v_2, підпорядковану умові $(\rho v_2, v_0)_{L_2(a,b)} = 0$. Оскільки права частина другого рівняння (3.11) має структуру (3.14) і величина $(z_0)'_\xi(\sigma;\pm1;\pm\sigma)$ не залежить від σ, $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$, то задача (3.11)-(3.13) має єдиний гладкий розв'язок z_1, обмежений в Π_σ. Функція z_1 також матиме вигляд (3.14), а функція v_2 є першим членом розвинення (3.2), який вже не дорівнює тотожному нулю на $(a,0)$.

Тепер можна описати алгоритм побудови асимптотичних рядів (3.1)-(3.3) в цілому. Нехай вже знайдені коефіцієнти рядів $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{k+1}, v_0, v_1, \dots v_{k+1}$ та $z_0, z_1, \dots z_{k-1}$, причому функції v_i, $i = 1, \dots, k$, підпорядковані умовам $(\rho v_i, v_0)_{L_2(a,b)} = 0$, а z_j – гладкі, обмежені в Π_σ функції, які допускають зображення (3.14).

Крок 1. Для $\sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$ будується обмежений в Π_σ розв'язок z_k задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_k}{\partial\eta^2} + \omega_0^2 q^2 z_k = 0, & (\xi,\eta)\in\Pi_\sigma, \\ \dfrac{\partial^2 z_k}{\partial\xi\partial\eta} + \omega_0\omega_1 q^2 z_k = F_{k-1}, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial\eta}(\sigma;\pm1,\pm\sigma) = g_k^\pm - \frac{\partial z_{k-1}}{\partial\xi}(\sigma;\pm1,\pm\sigma), \tag{3.21}$$

де, як легко бачити, права частина рівняння та "кутові" умови

$$F_{k-1}(\sigma;\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 z_{k-1}}{\partial\xi^2} - q^2\sum_{s=2}^{k+1}\Big(\sum_{i=0}^{s}\omega_i\omega_{s-i}\Big)z_{k+s-1}\Big),$$

$$g_k^\pm = \sum_{j=0}^{k}\frac{(\pm1)^{k-j}}{(k-j)!}\,v_j^{(k-j+1)}(\pm0)$$

задовольняють вимоги лем 3.1, 3.2.

Крок 2. Знаходимо величину ω_{k+2} з рівності

$$\omega_{k+2} = \frac{v_0'(+0)}{2\omega_0}\Big(\sum_{j=0}^{k+1} \frac{v_j^{(k-j+2)}(+0)}{(k-j+2)!} - z_k(\sigma; 1, \sigma)\Big) - \frac{1}{2\omega_0}\sum_{j=1}^{k+1} \omega_j\omega_{k-j+2}, \tag{3.22}$$

яка є умовою розв'язності задачі

$$\frac{d^2 v_{k+2}}{dx^2} + \omega_0^2 \rho(x) v_{k+2} = -\sum_{s=1}^{k+2}\Big(\sum_{i=0}^{s} \omega_i\omega_{s-i}\Big)\rho(x) v_{k-s+2}, \ x \in \Omega_0, \tag{3.23}$$

$$v_{k+2}(a) = 0, \quad v_{k+2}(b) = 0, \tag{3.24}$$

$$v_{k+2}(\pm 0) = z_k(\sigma; \pm 1, \pm\sigma) - \sum_{s=0}^{k+1} \frac{(\pm 1)^{k-s+2}}{(k-s+2)!} v_s^{(k-s+2)}(\pm 0). \tag{3.25}$$

Формула (3.22) отримана з урахуванням умов ортогональності, накладених на розв'язки v_s. Величина $z_k(\sigma; 1, \sigma)$ не залежить від σ, якщо значення цього параметра беруться з множини $\Sigma_{\alpha\beta}$.

Крок 3. Розв'язуємо задачу (3.23)–(3.25), з міркувань єдиності підпорядкувавши її розв'язок v_{k+2} умові ортогональності

$$(\rho v_{k+2}, v_0)_{L_2(a,b)} = 0.$$

Побудову формальних асимтотичних рядів (3.1)–(3.3) завершено.

4. Обгрунтування асимптотичних розвинень. Проведемо обгрунтування побудованих розвинень звичним для самоспряжених задач методом. Введемо позначення

$$\omega_S(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots + \varepsilon^S \omega_S, \tag{4.1}$$

$$U_S(\varepsilon, x) = \begin{cases} v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots + \varepsilon^S v_S(x), & x \in (a, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, b); \\ \varepsilon^2 z_0(\sigma; \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) + \dots + \varepsilon^S z_{S-2}(\sigma; \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}), & x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases} \tag{4.2}$$

Підставивши ці суми у вихідну задачу, отримаємо

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} + \omega_S^2(\varepsilon)\rho_\varepsilon(x)\Big) U_S(\varepsilon, x) = F_{S+1}(\varepsilon, x), \quad x \in (a, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, b)$$

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} + \omega_S^2(\varepsilon)\rho_\varepsilon(x)\Big) U_S(\varepsilon, x) = G_{S-3}(\varepsilon, x) \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

$$U_S(\varepsilon, a) = U_S(\varepsilon, b) = 0,$$

$$[U_S(\varepsilon, x)]_{x=\pm\varepsilon} = h_{S+1}^{\pm}(\varepsilon), \quad \Big[\frac{dU_S}{dx}(\varepsilon, x)\Big]_{x=\pm\varepsilon} = r_{S-1}^{\pm}(\varepsilon),$$

де індекси величин у правих частинах вказують на порядок їх малості при $\varepsilon \to 0$, наприклад,

$$|F_{S+1}(\varepsilon, x)| \leqslant C_{S+1}\varepsilon^{S+1}, \qquad x \in \Omega_0, \quad \varepsilon^{-1} \in \Sigma_{\alpha\beta}.$$

Введемо сім'ю компактних самоспряжених операторів $A_\varepsilon : H_0^1(a,b) \to H_0^1(a,b)$, які породжені формами $a_\varepsilon(u,v) = (\rho_\varepsilon u, v)_{L_2(a,b)}$, тобто $(A_\varepsilon u, v)_{H_0^1} = a_\varepsilon(u,v)$. Тоді задача (1.1),(1.2) еквівалентна спектральному рівнянню

$$A_\varepsilon u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon^{-1} u_\varepsilon = 0.$$

За побудовою функція U_S є гладкою на інтервалі (a,b), за винятком точок $x = \pm\varepsilon$, в яких вона має розрив першого роду. Очевидно, що існує визначена на (a,b) функція $\varphi_S(\varepsilon, x)$ з властивостями:

(i) $\varphi_S(\varepsilon,x) \equiv 0, \quad x \in (-\varepsilon,\varepsilon) \quad \varphi_S(\varepsilon,a) = \varphi_S(\varepsilon,b) = 0$;

(ii) функція $V_S(\varepsilon,x) = U_S(\varepsilon,x) + \varphi_S(\varepsilon,x)$ належить класу $C^1(a,b)$;

(iii) $\max(|\varphi_S| + |\varphi_S'| + |\varphi_S''|) \leqslant C_S\varepsilon^{S-1}$ (тут похідні беруться в точках, де вони існують.)

Легко переконатися, що функція V_S справджує інтегральну тотожність для $\psi \in H_0^1(a,b)$

$$\int_a^b V_S'\psi'\,dx - \omega_S^2(\varepsilon)\int_a^b \rho_\varepsilon V_S\psi\,dx = -\int_a^b F_{S+1}\psi\,dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G_{S-3}\psi\,dx,$$

де функція F_{S+1} продовжена нулем на інтервал $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Звідси отримуємо

$$|(A_\varepsilon V_S - \omega_S^{-2}(\varepsilon)V_S, \psi)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_S}{\omega_S^2(\varepsilon)}\Big(\max_{x\in(a,b)}|F_{S+1}(\varepsilon,x)| + \varepsilon\max_{x\in(-\varepsilon,\varepsilon)}|G_{S-3}(\varepsilon,x)|\Big)\|\psi\|$$

тобто

$$\|(A_\varepsilon - \omega_S^{-2}(\varepsilon)E)V_S(\varepsilon,\cdot)\| \leqslant B_S\varepsilon^{S-2}.$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — скалярний добуток та норма в H_0^1. Зауважимо, що норма $\|V_S(\varepsilon,\cdot)\|$ обмежена і відокремлена від нуля при $\varepsilon \to 0$ і $\varepsilon^{-1} \in \Sigma_{\alpha\beta}$. Тоді, як відомо [6], існує таке власне значення $(\lambda(\varepsilon))^{-1}$ оператора A_ε, що

$$\left|\frac{1}{\lambda(\varepsilon)} - \frac{1}{\omega_S^2(\varepsilon)}\right| \leqslant B_S\varepsilon^{S-2}. \tag{4.3}$$

Зафіксуємо додатне число d і розглянемо на спектральній осі інтервал $I_{\varepsilon,d} = [\omega_S^{-2}(\varepsilon) - d, \omega_S^{-2}(\varepsilon) + d]$. Тоді також можна побудувати таку лінійну комбінацію V_ε^* власних функцій цього оператора, які відповідають власним значенням $(\lambda(\varepsilon))^{-1}$ з інтервала $I_{\varepsilon,d}$, що

$$\|V_\varepsilon^* - V_S\| \leqslant \frac{2B_S}{d}\varepsilon^{S-2}, \qquad \|V_\varepsilon^*\| = \|V_S\| \tag{4.4}$$

для $\varepsilon^{-1} \in \Sigma_{\alpha\beta}$.

Введемо позначення

$$\Lambda_S(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \cdots + \varepsilon^S\lambda_S, \quad \text{де } \lambda_k = \sum_{i=0}^{k}\omega_i\omega_{k-i}, \tag{4.5}$$

зокрема, $\lambda_0 = \omega_0^2$.

Теорема. *(i) Нехай при $\varepsilon_n \to 0$ послідовності власних значень $\{\lambda(\varepsilon_n)\}$ та власних функцій $\{u(\varepsilon_n, x)\}$ задачі (1.1),(1.2) моделюють глобальну форму коливань $v(x)$ з частотою ω_0. Тоді для всіх $m > 2$ число ω_0^2 є власним значенням задачі (3.5), а $v(x)$ – відповідною власною функцією.*

(ii) У випадку, коли $m = 4$, $q(\xi) = q^2$, ω_0^2 — просте власне значення задачі (3.5), а $\varepsilon_n^{-1} \in \Sigma_{\alpha\beta}$, існують послідовності $\{\lambda(\varepsilon_n)\}$ і $\{u(\varepsilon_n, x)\}$, що для всіх натуральних S справедливі оцінки

$$|\lambda(\varepsilon_n) - \Lambda_S(\varepsilon_n)| \leqslant c(S)\varepsilon_n^S, \tag{4.6}$$

$$\|u(\varepsilon_n, x) - V_S(\varepsilon_n, x))\| \leqslant C(S)\varepsilon_n^{S-2}. \tag{4.7}$$

Хоча вибір множини $\Sigma_{\alpha\beta}$ неоднозначний, всі послідовності частот $(\lambda(\varepsilon_n))^{1/2}$, які моделюють глобальні коливання, належать тонкому конусу в $\mathbb{R}_{\varepsilon,\omega}$ з вершиною в точці $(0, \omega_0)$ та віссю

$$\omega = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2\omega_0}(v'(-0)^2 + v'(+0)^2).$$

Тут v — власна функція задачі (3.5), нормована умовою $(\rho v, v)_{L_2(a,b)} = 1$.

Доведення. (i) Задачі (1.1),(1.2) відповідає інтегральна тотожність

$$\int_a^b u_\varepsilon' \varphi' \, dx - \lambda(\varepsilon)\Big(\int_a^{-\varepsilon} \rho u_\varepsilon \varphi \, dx + \int_\varepsilon^b \rho u_\varepsilon \varphi \, dx + \varepsilon^{-m} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(\frac{x}{\varepsilon}) u_\varepsilon \varphi \, dx\Big) = 0$$

для $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$. Підставимо в неї послідовності $\lambda(\varepsilon_n)$ та $u(\varepsilon_n, x)$, і перейдемо до границі при $\varepsilon_n \to 0$ на множині пробних функцій φ, які дорівнюють нулю в деякому околі початку координат. Оскільки для достатньо малих ε інтеграл з вагою $\varepsilon^{-m} q(x/\varepsilon)$ дорівнює нулю, то ми отримаємо

$$\int_a^b v' \varphi' \, dx - \omega_0^2 \int_a^b \rho v \varphi \, dx = 0 \tag{4.8}$$

на множині функцій φ, яка щільна в просторі $H_0^1(\Omega_0)$. Крім того, при $m > 1$ для власних функцій вихідної задачі є апріорна оцінка [3]

$$|u_\varepsilon(0)| \leqslant \frac{c}{\lambda(\varepsilon)} \varepsilon^\delta, \qquad \delta = \min\{m - 1, 1/2\},$$

де $\|u_\varepsilon\| = 1$. Отже, тоді $v(0) = 0$ і згідно з (4.8) функція v є власною функцією триточкової задачі (3.5), яка відповідає власному значенню ω_0^2.

Зауважимо, що проведені міркування справедливі і для $m \in (1, 2]$, однак в цьому випадку відсутні локальні форми коливань, а ω_0^2 та v є границями неперервних за ε власних елементів задачі (1.1),(1.2).

(ii) Згідно з (4.3) та (4.5) для $\varepsilon = \varepsilon_n$ маємо

$$|\lambda(\varepsilon) - \Lambda_S(\varepsilon)| \leqslant B_S \lambda(\varepsilon) \omega_S^2(\varepsilon) \varepsilon^{S-2} + |\omega_S^2(\varepsilon) - \Lambda_S(\varepsilon)| \leqslant C_S(\varepsilon^{S-2} + \varepsilon^{S+1}),$$

звідки

$$|\lambda(\varepsilon) - \Lambda_{S-2}(\varepsilon)| \leqslant C_S(\varepsilon^{S-2} + \varepsilon^{S+1}) + |\lambda_{S-1}|\varepsilon^{S-1} + |\lambda_S|\varepsilon^S \leqslant c(S-2)\varepsilon^{S-2}.$$

Нерівність (4.6) отримується заміною $S-2$ на S.

Для доведення оцінки (4.7) достатньо зауважити, що при малих ε інтервал $I_{\varepsilon,d}$ містить не більше однієї точки спектра оператора A_ε, оскільки сусідні точки розташовані на відстані порядку ε^{-2}. Це випливає із асимптотики $\lambda_k(\varepsilon) \sim \mu_k\varepsilon^{m-2}$, коли $\varepsilon \to 0$ і $m > 2$, неперервних за параметром ε власних значень вихідної задачі [3]. Тоді функція V_ε^* із нерівності (4.4) буде власною функцією задачі (1.1),(1.2). Теорему доведено.

1. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularily perturbed operators.* // Non-classical continuum mechanics. Lecture Notes series. Cambridge University Press. – 1987. – Vol. 122. – P.188-205.

2. Олейник О.А. *О собственных колебаниях тел с концентрированными массами* // Современные проблемы прикладной математики и математической физики.— М.: Наука, 1988.— С.101-128.

3. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. *О собственных колебаниях струны с присоединенной массой* // Сиб. мат. журн. 1988. Т.29, N5. С.71-91.

4. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Л.: Изд. АН СССР, 1932.

5. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. М.-Л.: Гос.изд.техн.-теорет.лит., 1950.

6. Вишик М.И., Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // УМН. – 1957. – Т.12, N5. – С.3–122.

7. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Труды Математ. ин–та им. В.А.Стеклова. – 1990. – Т.192. – С.42–60.

8. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний* // Труды Московского мат. о–ва. – 1992. – Т.54. – С.29–72.

9. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses* // Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag. – 1984. – P.346-368.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.97

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРРОНОВОГО КОРЕНЯ СІМ'Ї ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ

Я. І. Єлейко

Elejko Ja.I. Asymptotic properties of Perron root for the family of the branchy processes. The asymptotic expansion of Perron root for branchy process with demmerable set of tapes is found.

Будемо розглядати сім'ю гіллястих процесів із зліченною множиною типів T, дискретним часом та перетвореннями, залежними від віку. У нашому випадку параметр сім'ї ε є мале додатне число.

Для гіллястого процесу з параметром ε позначимо через $\xi_n^\varepsilon(i,j)$ число частинок типу j в момент часу n при умові, що в початковий момент часу була одна частинка типу i нульового віку, де $i,j \in T$. Тоді

$$\xi_n^\varepsilon(i,s) = \sum_{j\in S} \xi_n^\varepsilon(i,j) \qquad -$$

число частинок в момент часу n, типи яких належать множині $S \subset T$, при умові, що в початковий момент часу була одна частинка типу i нульового віку. Слід пам'ятати, що $\xi_n^\varepsilon(i,j), \xi_n^\varepsilon(i,s)$ – випадкові міри. Нехай τ – випадкова величина, яка є часом життя частинки.

Введемо число $\xi_\tau^\varepsilon(i,j)$ частинок-нащадків типу j за умови, що в початковий момент часу була частинка типу i нульового віку. Нехай

$$\xi_\tau^\varepsilon(i,s) = \sum_{j\in S} \xi_\tau^\varepsilon(i,j) \qquad -$$

число частинок-нащадків, типи яких належать $S \subset T$, за умови, що в початковий момент була одна частинка типу i нульового віку, $\xi_\tau^\varepsilon(i,j), \xi_\tau^\varepsilon(i,s)$ – випадкові міри.

Розглянемо сім'ю ядер

$$N_i^\varepsilon(s) = M\xi_\tau^\varepsilon(i,s) = \sum_{j\in S} M\xi_\tau^\varepsilon(i,j),$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60J105.

які є середнім числом нащадків, типи яких належать S для процесу з параметром ε, за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу i нульового віку, де M – знак математичного сподівання.

Із зображення $N_i^\varepsilon(s)$ видно, що дана сім'я ядер однозначно задається за допомогою зліченної матриці вимірності $T \times T$ вигляду

$$N^\varepsilon = (N_i^\varepsilon(j))_{i,j\in T}\,.$$

Згідно з нашими припущеннями всі елементи матриці N^ε є невід'ємними. Через m позначимо дійсний векторний нормований простір (банахів простір), який складається з векторів $g = g_i$, $i \in T$ з нормою $||g|| = \sup\limits_{i\in T} |g_i|$; E – дійсний простір векторів $l = l_i$, $i \in T$ з нормою $||l|| = \sup\limits_{i\in T} |l_i|$.

Для довільного вектора $g \in m$ і $l \in E$ є визначений скалярний добуток

$$(l, g) = \sum_{i\in T} g_i l_i,$$

який при фіксованих l можна вважати значенням функціоналу l на векторах g, тобто $l(g) = (l, g)$.

Введемо символи тензорного множення векторів

$$[g \times l] = (g_i l_j)_{i,j\in T}\,.$$

Матриця $[g \times l]$ володіє проекційними властивостями

$$[g \times l]_k = (l, k)g$$

для довільного вектора $k \in m$. Нехай існує границя

$$N_i(j) = \lim_{\varepsilon\to 0} N_i^\varepsilon(j)\,, \qquad \forall i, j \in T\,.$$

Крім того, вважатимемо, що

$$\sup_{i\in T} \sum_{j\in T} N_i(j) < \infty. \tag{1}$$

Основну роль надалі буде відігравати інтерпретація матриць як лінійних операторів в m.

Нехай задано матрицю $N = \{N_i(j)\}_{i,j\in T}$. Визначимо лінійний оператор N в m співвідношенням

$$Ng = u, \quad u_i = \sum_{j\in T} N_i(j) g_j, \quad i \in T\,.$$

Умова (1) задає норму лінійного оператора N і вказує на те, що $||N|| < \infty$. Звідси випливає, що оператор N переводить вектори з простору m у вектори з m.

Визначимо також оператор, який заданий на векторах простору E правилом

$$lN = \psi, \quad \psi_j = \sum_{i \in T} N_i(j) l_i \, .$$

Не важко помітити, що даний оператор є спряженим до оператора N; крім того, умова (1) забезпечує його обмеженість в просторі E.

Нехай число 1 є максимальним власним числом оператора N з правим додатним власним вектором $f = \{f_i, \, f_i \geqslant 0, i \in T\} \in m$ і лівим додатним власним вектором $\nu = \{\nu_j, \, \nu_j \geqslant 0, j \in T\} \in E$, такими, що $Nf = f$; $\nu N = \nu$. Крім того, власне число 1 є ізольованою точкою спектра. Не зменшуючи загальності, правий і лівий власні вектори виберемо такими, що $(\nu, f) = 1$.

Введемо оператор N^ε, який діє в просторі m:

$$N^\varepsilon g = \psi; \quad \psi_i = \sum_{j \in T} N_i^\varepsilon(j) g_j \, .$$

Нехай $N^\varepsilon \to N$ при $\varepsilon \to 0$ за нормою лінійних операторів в просторі m.

За теоремою про неперервність для ізольованих точок спектра [1] оператор N^ε має максимальне власне значення ρ_ε для достатньо малих значень ε і правий власний вектор $f_\varepsilon \in m$, для яких $N^\varepsilon f_\varepsilon = \rho_\varepsilon f_\varepsilon$.

Із згаданої теореми випливає також, що сім'я власних векторів f_ε рівномірно збігається до власного вектора f, і послідовність власних значень ρ_ε збігається до 1 при $\varepsilon \to 0$. Власні вектори f_ε можемо вибрати так, щоб виконувалась умова $(\nu, f_\varepsilon) = 1$. Умова $\rho_\varepsilon \to 1$ вказує на те, що сім'я гіллястих процесів є близькою у певному розумінні до критичних гіллястих процесів.

У праці [2] досліджено перехідні явища для математичного сподівання сім'ї гіллястих процесів $M\xi_n^\varepsilon(i, s)$ з довільним числом типів T при $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ та $n(\rho_\varepsilon - 1) \to c$, звідки бачимо, наскільки важливою є поведінка нескінченно малої $\rho_\varepsilon - 1$. Наша мета – дослідити асимптотику $\rho_\varepsilon - 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Вважатимемо оператор $N - I$ простим фредгольмовим, де I – одиничний оператор. Як відомо, для $N - I$ існує такий узагальнений обернений оператор V, який володіє властивостями:

$$(N - I)V = V(N - I) = \Pi - I,$$

причому проектор Π має вигляд $\Pi = [f \times \nu]$ і $\Pi g = (\nu, g) f, \quad g \in m$.

Для $\mu \in E$, $g \in m$ та нескінченновимірної матриці B введемо операції формулою

$$\langle \mu * B * g \rangle = (\mu; Bg) = (\mu B, g), \quad \langle \mu * g \rangle = (\mu, g).$$

Теорема 1. *Для довільного натурального n справедливе зображення*

$$\rho_\varepsilon - 1 = \sum_{k=1}^{n} \langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^k * f \rangle +$$

$$+ \langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^n * f_\varepsilon \rangle + o(\rho_\varepsilon - 1),$$

де оператори N^ε і N володіють всіма описаними вище властивостями, V – узагальнений обернений оператор для оператора $N-I$, f та n – правий та лівий власні вектори оператора N, що відповідають максимальному власному значенню 1. Крім того, $(\nu, f) = 1$, $(\nu, f_\varepsilon) = 1$.

Доведення. Маємо такі рівності

$$\rho_\varepsilon f_\varepsilon = N^\varepsilon f_\varepsilon = N f_\varepsilon + (N^\varepsilon - N) f_\varepsilon . \tag{2}$$

Знайдемо скалярний добуток вектора (2) та правого власного вектора ν. Отримаємо рівність вигляду

$$\rho_\varepsilon \langle \nu * f_\varepsilon \rangle = \langle \nu * N * f_\varepsilon \rangle + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle . \tag{3}$$

Використовуючи властивості оператора N, з (3) отримаємо таку рівність

$$\rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle . \tag{4}$$

Перепишемо (4) у вигляді

$$\rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f \rangle + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * (f_\varepsilon - f) \rangle . \tag{5}$$

Знайдемо зображення для різниці векторів $f_\varepsilon - f$. З цією метою формулу (2) перепишемо так

$$(\rho_\varepsilon - 1) f_\varepsilon = (N - I) f_\varepsilon + (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon . \tag{6}$$

Подіємо на вектор (6) узагальненим оберненим оператором V і скористаємося його властивостями. Отримаємо таку рівність

$$(\rho_\varepsilon - 1) V f_\varepsilon = V(N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon + V(N - I) f_\varepsilon = (\Pi - I)(f_\varepsilon - f) + V(N^\varepsilon - N) f_\varepsilon . \tag{7}$$

З формули (7) безпосередньо випливає рівність для різниці векторів

$$-(f_\varepsilon - f) = -(\rho_\varepsilon - 1) V f_\varepsilon + V(N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon . \tag{8}$$

Зробимо підстановку (8) у формулу (5). Це дає змогу виписати таку рівність для $\rho_\varepsilon - 1$:

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f \rangle - (\rho_\varepsilon - 1) \langle \nu * (N^\varepsilon - N) V * f_\varepsilon \rangle + \\ + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) V (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle . \end{aligned} \tag{9}$$

З формули (9) легко бачити, що при $\varepsilon \to 0$

$$\rho_\varepsilon - 1 = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f \rangle + o(\rho_\varepsilon - 1) + \langle \nu * (N^\varepsilon - N) V (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle . \tag{10}$$

Останній доданок формули (10) запишемо у вигляді суми

$$\langle \nu * (N^\varepsilon - N) V (N^\varepsilon - N) * f_\varepsilon \rangle =$$

$$= \langle \nu * (N^\varepsilon - N)V(N^\varepsilon - N) * f\rangle + \langle \nu * (N^\varepsilon - N)V(N^\varepsilon - N) * (f_\varepsilon - f)\rangle . \qquad (11)$$

Підставимо рівність (11) у формулу (10) і скористаємося (7). В результаті отримаємо

$$\rho_\varepsilon - 1 + o(\rho_\varepsilon - 1) = \langle \nu * (N^\varepsilon - N) * f\rangle + \langle \nu * (N^\varepsilon - N)V(N^\varepsilon - N) * f\rangle +$$
$$+ \left\langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^2 f\right\rangle + \left\langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^2 * f_\varepsilon\right\rangle . \qquad (12)$$

Скориставшись методом математичної індукції, неважко узагальнити формулу (12) для довільного натурального числа n. Отже,

$$\rho_\varepsilon - 1 + o(\rho_\varepsilon - 1) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^k * f\right\rangle + \langle \nu * (N^\varepsilon - N)(V(N^\varepsilon - N))^n * f_\varepsilon\rangle .$$

Теорему доведено.

Тепер будемо вважати, що оператор N^ε має зображення

$$N^\varepsilon = N + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon) B_i , \qquad (13)$$

де B_i – обмежені лінійні оператори, $\delta_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2 \ldots, n$ – шкала нескінченно малих величин, для яких $\delta_i(\varepsilon) = o(\delta_{i-1}(\varepsilon))$, тобто

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_i(\varepsilon)}{\delta_{i-1}(\varepsilon)} = 0, \quad i = 2, 3 \ldots n, \quad \delta_1(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Дві нескінченно малі $\alpha(\varepsilon)$ і $\beta(\varepsilon)$ називаються еквівалентними ($\alpha(\varepsilon) \approx \beta(\varepsilon)$), якщо $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)} = 1$. Позначимо

$$b_i = \langle \nu * B_i * f\rangle \quad i = 1, 2, \ldots n; \quad b_i^\varepsilon = \langle \nu * B_i * f_\varepsilon\rangle \quad i = 1, 2, \ldots n; \quad c_1 = \langle \nu * B_1 V B_1 * f\rangle .$$

Справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай* $b_j = 0$, $j = 1, \ldots r - 1$; $b_r \neq 0$; $r \leqslant n$; $c_1 \neq 0$. *Тоді*

$$\text{а) } \rho_\varepsilon - 1 \approx b_r \delta_r(\varepsilon), \quad \text{якщо } \delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_r(\varepsilon)),$$
$$\text{б) } \rho_\varepsilon - 1 \approx (\alpha c_1 + b_r)\delta_r(\varepsilon), \quad \text{якщо } \delta_1^2(\varepsilon) \approx \alpha \delta_r(\varepsilon),$$
$$\text{в) } \rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_1^2(\varepsilon) c_1, \quad \text{якщо } \delta_r(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon)).$$

Доведення. Використавши формулу (4) та зображення (13), отримаємо

$$\rho_\varepsilon - 1 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon) \langle \nu * B_i * f_\varepsilon\rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon) b_i^\varepsilon. \qquad (14)$$

У випадку $b_1 \neq 0$ з рівності (14) випливає, що $\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_1(\varepsilon) b_1$. Нехай тепер $b_1 = 0$. В даній ситуації очевидно, що $\rho_\varepsilon - 1 = o(\delta_1(\varepsilon))$. Перший доданок формули (14) можемо зобразити у вигляді

$$\delta_1(\varepsilon) \langle \nu * B_1 * (f_\varepsilon - f) \rangle ,$$

внаслідок чого маємо рівність

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1(\varepsilon) \langle \nu * B_1 * (f_\varepsilon - f) \rangle + \delta_2(\varepsilon) b_2^\varepsilon + \cdots + \delta_n(\varepsilon) b_n^\varepsilon . \tag{15}$$

Тепер зробимо підстановку (8) у (15) та скористаємося (13). Тоді отримаємо рівність вигляду

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon) \langle \nu * B_1 V B_1 * f_\varepsilon \rangle + \sum_{i=2}^{r} \delta_1(\varepsilon)\delta_i(\varepsilon) \langle \nu * B_1 V B_i * f_\varepsilon \rangle +$$
$$+ o(\delta_r(\varepsilon)\delta_1(\varepsilon)) - (\rho_\varepsilon - 1)\delta_1(\varepsilon) \langle \nu * B_1 V B_1 * f_\varepsilon \rangle + \delta_2(\varepsilon) b_2^\varepsilon + \cdots + \delta_n(\varepsilon) b_n^\varepsilon . \tag{16}$$

Вираз (16) можемо переписати так

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon) \langle \nu * B_1 V B_1 * f \rangle + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + \sum_{i=2}^{n} \delta_i(\varepsilon) b_i^\varepsilon . \tag{17}$$

Нехай r – перший номер i в сумі (17), для якого $b_i \neq 0$. У даному випадку (17) набуде вигляду

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon) \langle \nu * B_1 V B_1 * f \rangle + o(\delta_1^2(\varepsilon)) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{r-1} \delta_1(\varepsilon) \langle \nu * B_i * (f_\varepsilon - f) \rangle + o(\delta_r(\varepsilon)) + \delta_r(\varepsilon) \langle \nu * B_r * f \rangle .$$

З цієї рівності, використовуючи (8), (15) та властивості узагальненого оберненого оператора, отримаємо

$$\rho_\varepsilon - 1 = \delta_1^2(\varepsilon) \langle \nu * B_1 V B_1 * f \rangle + o(\delta_1^2(\varepsilon)) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{r-1} \delta_1(\varepsilon)\delta_i(\varepsilon) \langle \nu * B_i V B_1 * f \rangle + \delta_r(\varepsilon) \langle \nu * B_r * f \rangle + o(\delta_r(\varepsilon)) . \tag{18}$$

Отже, якщо стала $c_1 = \langle \nu * B_1 V B_1 * f \rangle \neq 0$, то вираз (18) запишеться у вигляді

$$\rho_\varepsilon - 1 = c_1 \delta_1^2(\varepsilon) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + b_r \delta_r(\varepsilon) + o(\delta_r(\varepsilon)) . \tag{19}$$

Тепер можливі такі випадки.

а) Нехай $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_r(\varepsilon))$. Тоді (19) запишеться у вигляді $\rho_\varepsilon - 1 = \delta_r(\varepsilon) b_r + o(\delta_r(\varepsilon))$. Остання рівність означає, що $\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_r(\varepsilon) b_r$.

б) Нехай $\delta_1^2(\varepsilon) \approx \alpha \delta_r(\varepsilon)$. Тоді з (19) випливає рівність $\rho_\varepsilon - 1 = \alpha \delta_r(\varepsilon) c_1 + \delta_r(\varepsilon) b_r + o(\delta_r(\varepsilon))$. Отримана рівність вказує на те, що маємо еквівалентність $\rho_\varepsilon - 1 \approx (\alpha c_1 + b_r)\delta_r(\varepsilon))$.

в) Нехай $\delta_r(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$. У даному випадку із (19) випливає, що $\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_1^2(\varepsilon) c_1$. Теорему доведено.

У випадку $c_1 = 0$ можна уточнити асимптотичне зображення $\rho_\varepsilon - 1$. Справедлива теорема.

Теорема 3. *Нехай*

$$\langle \nu * B_j * f \rangle = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, r-1; \quad \langle \nu * B_r * f \rangle \neq 0; \, \langle \nu * (B_1 V B_1) * f \rangle = 0;$$
$$\langle \nu * B_1 (V B_1)^2 * f \rangle \neq 0; \quad \langle \nu * (B_1 V B_2) * f \rangle + \langle \nu * (B_2 V B_1) * f \rangle = 0.$$

Тоді

$$\rho_\varepsilon - 1 \approx \delta_r(\varepsilon) \left[m_1 \langle \nu * (B_1 (V B_1)^2) * f \rangle + \right.$$
$$\left. + m_2 \langle \nu * (B_1 V B_2) * f \rangle + m_2 \langle \nu * (B_2 V B_1) * f \rangle + \langle \nu * B_r * f \rangle \right]$$

за умов $\delta_1^3(\varepsilon) \approx m_1 \delta_r(\varepsilon); \; m_2 \delta_r(\varepsilon) \approx \delta_1(\varepsilon) \delta_2(\varepsilon)$.

Доведення теореми в деякому сенсі є подібним до доведення теореми 2, тому ми його наводити не будемо.

1. Като Т. Теория линейных операторов. – М.:Мир, 1972. – 740 с.
2. Елейко Я.И. *Переходные явления для ветвящихся процессов с произвольным числом типов и дискретным временем*// Укр. мат. журн. – 1982. – Т.4, N2. – С.198-203.
3. Королюк В.С,Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 183 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.04.1997

УДК 539.3

ЛЕВИЦЬКИЙ (БАРАН) ВАСИЛЬ ПЕТРОВИЧ: ПІДСУМОК НАУКОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

В. М. Онишкевич, І. Т. Яськевич, В. П. Новосад

Onyshkevych V. M., Ivas'kevych I.T., Novosad V. P. Summary of the scientific activity of V.P.Levytsky (Baran). V.P.Levytsky was a professor of the Chair of Mechanics of Lviv State University named by I.Franko. His base scientific investigations connected with contact problems of theory of elasticity and thermoelasticity. In the paper scientific achievements of V.P.Levytskyi are shortly described and a list of his publications with 60 titles is presented.

20 січня 1997 року передчасно пішов з життя Василь Петрович Левицький, талановитий науковець і педагог, відомий вчений у галузі контактних задач теорії пружності й термопружності.

В.П.Левицький народився 15 лютого 1952 року в с. Нова Гребля Рогатинського району Івано-Франківської області в сім'і службовців. Після закінчення Бурштинської середньої школи N 1 в 1969 р. вступив до Львівського державного університету ім. І. Франка на механіко-математичний факультет, який закінчив з відзнакою у 1974 р. і став аспірантом кафедри механіки ЛДУ. Після закінчення аспірантури продовжив трудову діяльність в університеті, де працював інженером, молодшим науковим співробітником, а з 1980 року – асистентом. У 1982 році, захистивши дисертацію "Дослідження динамічних контактних задач термопружності для півпростору і шару" (науковий керівник – доктор технічних наук, професор Д.В.Грилицький), здобув науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. У 1985 році Левицького В.П. обрано доцентом кафедри механіки. Він читав лекції з теоретичної механіки, опору матеріалів, технічної механіки, а також підготував і викладав спецкурси "Числові методи в механіці деформівного твердого тіла", "Теорія пластичності", "Апроксимація і скінченні елементи". В останній час наполегливо працював над завершенням докторської дисертації.

Коло наукових проблем, які цікавили Василя Петровича, було широким і різноплановим. Вчений побудував ефективний наближений розв'язок нестаціонарної осесиметричної задачі термопружності для шаруватого середовища [1], розв'язав задачі про усталені коливання нагрітого штампа на поверхні півпростору і про коливання шару на жорсткій

1991 *Mathematics Subject Classification.* 7300.

гладкій основі під дією нормального навантаження [10]. З розв'язку динамічної контактної задачі для півпростору з теплоізольованою поверхнею [10] були зроблені важливі практичні висновки: збільшення частоти коливань штампа з плоскою основою спричиняє переміщення мінімуму амплітуди контактних тисків від центра основи штампа до її краю; амплітуда сили, прикладеної для підтримання заданого режиму руху штампа, незначно зменшується зі збільшенням його маси.

Поряд з конкретними крайовими задачами механіки твердого дефомівного тіла В.П.Левицький досліджував загальні питання єдиності й аналітичності розв'язків динамічних і статичних задач теорії пружності й термопружності. Відомо, що для визначення розв'язку крайової динамічної задачі необхідно вибрати певну умову випромінювання. У працях [4,5,8,19] В.П.Левицький разом з Д.В.Гриліцьким і Р.М.Мокриком показали, що найбільш загальною умовою випромінювання в крайових задачах для пружних середовищ з дисперсією є принцип причинності. Зокрема, він дає можливість визначати напрямок обходу кратних полюсів у інтегралах обернення. Було з'ясовано, що в разі застосування принципу причинності напрям обходу n-кратного полюса не збігається з контуром інтегрування, який дає принцип граничного поглинання. На підставі цього В.П.Левицький виявив, що за певних значень параметрів розв'язки, отримані на підставі принципу причинності та принципу поглинання, можуть відрізнятися [10]. Це дало можливість за допомогою принципу причинності виявити фізично нереальні моделі механіки суцільного середовища.

У праці [18], яку до речі сам автор вважав однією з своїх найкращих, було сформульовано та доведено теорему про максимум модуля в хвильових рівняннях.

Нехай в області G евклідового простору R^3 функція $\vec{W}$ задовольняє рівнянню

$$a\Delta\vec{W} + b \operatorname{grad} \operatorname{div}\vec{W} + \Lambda\vec{W} = 0.$$

Тоді для того, щоб всередині області величина функції не могла мати максимуму, достатньо виконання умови $\Lambda_1 < \Lambda_2 < 0$, де $\Lambda_1 = \frac{\Lambda}{a+b}$, $\Lambda_2 = \frac{\Lambda}{a}$.

На підставі цієї теореми було доведено низку теорем єдиності для розв'язків задач пружності, квазістатичної термопружності, незв'язної термопружності тощо [18].

Багато досліджень вчений присвятив вивченню питань неідеального теплового контакту тіл. Обгрунтовані в праці [22] формули

$$\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} - \lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} = k\omega r\sigma_{zz}, \;\; \lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} - \lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} - h(t^{(1)} - t^{(2)}) = 0,$$

які пов'язують стрибок теплового потоку на лінії дотику тіл з теплоутворенням і коефіцієнтом h теплопроникливості контакту, стали основою для багатьох подальших наукових робіт.

З використанням неідеального теплового контакту тіл через тонкий проміжковий шар була здійснена постановка задач термопружності з контактним теплоутворенням. В цій галузі знань В.П.Левицький був одним з найавторитетніших спеціалістів. Він розв'язав низку плоских і осесиметричних контактних задач про взаємодію жорсткого штампа і пружного півпростору з урахуванням теплообміну із зовнішнім середовищем, неідеальності теплового контакту та теплоутворення від тертя [31,32,33, 35,44,45,55], задачу про контакт двох циліндрів, що обертаються [30], та деякі одновимірні нестаціонарні задачі [24]. Цінні й практично важливі результати містяться також в тих роботах доц. Левицького, які присвячені вивченню зношування за термопружного контакту [21,36,37,38,51,54].

Поставивши і розв'язавши велику кількість нових контактних задач, науковець постійно звертав увагу на іхню математичну та фізичну коректність. Скажімо, у працях [31,42] виявлені області вхідних параметрів, що призводять до фізично реальних розв'язків стаціонарних контактних задач термопружності. Для плоскої контактної задачі з теплоутворенням [57] зроблено висновок про недопустимість диференціювання граничної умови на вертикальне переміщення під штампом.

Вагомим є внесок вченого в дослідження проблеми неповного механічного контакту як результату впливу температурних чинників. Можливість існування та розташування зон відокремлення контактних поверхонь найбільш грунтовно досліджено у [44, 59].

Працюючи над докторською дисертацією, В.П.Левицький знову повертається до активного дослідження нестаціонарних задач термопружності [56,58]. Серед нових проблем були такі:

1) загальні закономірності, що спостерігаються при встановленні режиму ковзання на початковому етапі контактної взаємодії;

2) перерозподіл теплових потоків під час контакту;

3) використання динамічних умов рівноваги тіл для моделювання термопружних процесів.

Важливе теоретико-пізнавальне значення має задача про перехід від тангенціального зміщення до ковзання в осесиметричній парі тертя [60]. У квазістатичній задачі термопружності було запропоновано для врахування зміни конфігурації зон зчеплення та ковзання-теплоутворення використати такі граничні умови:

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}(r,z,\tau)}{\partial z}|_{z=l} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}(r,z,\tau)}{\partial z}|_{z=l} = \left(\omega(\tau) r - \frac{\partial u_\theta(r,l,\tau)}{\partial \tau}\right) \tau_{z\theta}(r,l,\tau),\ R_1(\tau) < r < R,$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}(r,z,\tau)}{\partial z}|_{z=l} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}(r,z,\tau)}{\partial z}|_{z=l} = 0,\ 0 \leqslant r < R_1(\tau),$$

$$u_\theta(r,l,\tau) = \varphi(\tau) r\ 0 \leqslant r < R_1(\tau),\ \tau_{z\theta}(r,l,\tau) = f_0 \sigma_{zz}(r,l,\tau),\ R_1(\tau) < r < R,$$

де R - радіус контакту, $R_1(\tau)$ - внутрішній радіус ділянки ковзання-теплоутворення, який визначається умовою досягнення дотичними зусиллями значення, максимального для тертя спокою.

В.П.Левицький постійно працював над удосконаленням відомих і створенням нових методик розв'язування задач механіки деформівного твердого тіла. Він застосував метод зважених нев'язок до задач, що зводяться до систем парних інтегральних рівнянь [50,53], вдало адаптував метод прямих до контактних проблем та показав особливості його застосування [15,31], досяг істотних нових успіхів у практичному використанні інтегральних перетворень Фур'є, Ганкеля та Лапласа.

Науковий доробок доц.Левицького В.П. свідчить про високий рівень критичного мислення, глибоке розуміння поставлених математичних та механічних проблем, вміння перейти від загального до конкретного та навпаки (з цього приводу показовою є праця [59]).

Василь Петрович Левицький був учасником багатьох наукових конференцій та симпозіумів (в тому числі 5-и міжнародних). Він був членом Нью-Йоркської академії наук.

Наукову діяльність Василь Петрович поєднував з навчально-методичною роботою. Він опублікував 3 навчально-методичні розробки для студентів механіко-математичного факультету [20,39,47], керував курсовими та дипломними роботами студентів.

Особливу увагу вчений приділяв роботі з аспірантами. Він був не лише їх науковим керівником, але й порадником і товаришем. Під його керівництвом захищені три кандидатські дисертації.

В.П.Левицький був яскравою особистістю. Він поєднував у собі гострий розум і надзвичайну працьовитість, вимогливість і доброту, любов до науки й життя. Світлі спогади про Василя Петровича Левицького завжди осяватимуть життя його рідних, колег, друзів та учнів.

Список друкованих праць

1. Баран В.П. *Нестаціонарна осесиметрична задача термопружності для двошарової основи*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем.- 1977.-вип. 12.- С. 71-75.
2. Баран В.П., Грилицкий Д.В. *Смешанная осесимметричная задача стационарных термоупругих колебаний для двухслойной среды*// В кн.: Смеш. задачи мех. деформ. тела. Тез. докл. Всесоюз. конф. по смеш. задачам мех. деформ. тела (Ростов-на-Дону, 21-23 сент. 1977г.).- Ростов-на-Дону: УПЛ Ростов. ун-та, 1977.- ч.1.- С.8.
3. Грилицкий Д.В., Мокрик Р.И., Баран В.П. *Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для полупространства* // В кн.: IV науч. сов. по тепл. напряж. в элем. конструкций (Канев, 31 мая- 2 июня 1977 г.). Тезисы докладов.- Киев: Наук. думка, 1977.- С.35.
4. Мокрик Р.І., Баран В.П. *Про умову випромінювання в динамічних задачах теорії пружності*// Доп. АН УРСР.- 1977.- сер.А.- N 8.- С.713-716.
5. Баран В.П., Грилицкий Д.В., Мокрик Р.И. *К теории динамической термоупругости* // ПММ.- 1978.- Т.42, N 6.- С.1093-1098.
6. Баран В.П., Грилицкий Д.В., Мокрик Р.И. *Об условиях излучения в динамических задачах для сплошных сред* // В кн.: Всесоюзная конференция по механике сплошных сред: Аннотация докл.- Ташкент, Фан, 1979.- С.66.
7. Грилицкий Д.В., Баран В.П. *Динамическая контактная задача обобщённой термоупругости* // В кн.: Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов.- Ереван: Изд. АН АрмССР, 1979.- С.129-130.
8. Грилицкий Д.В., Баран В.П. *Условия излучения в динамической теории упругости и термоупругости*// Докл. АН УССР.- 1980.- сер. А.-N 7.- С.38-41.
9. Гурняк Г.В., Баран В.П. *Аналитические свойства и единственность решения задач дифракции для двусвязных областей* // В кн.: Волны и дифракция. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн.- М., 1981.- С.337-340.
10. Баран В.П. *Исследование динамических контактных задач термоупругости для полупространства и слоя*// Автореферат диссертации на соискание научной степени кандидата физ.-мат.наук.- Львов.- 1982.- 19 с.
11. Грилицкий Д.В., Баран В.П. *Динамическая контактная задача термоупругости для полупространства с теплоизолированной поверхностью*// В кн.: Теория упругости и вязкоупругости (Ереван, 22-25 ноября 1982 г.). Тезисы докладов.- Ереван: Изд. АрмССР, 1982.-С.21.-22.
12. Грилицкий Д.В., Баран В.П., Евтушенко А.А. *Сжатие двух упругих цилиндрических тел с учетом тепловыделения на участке контакта*// В кн.: II Всесоюзная конференция по теории упругости (Тбилиси, 8-10 декабря 1984 г.). Тезисы докладов.- Тбилиси: Мацниереба, 1984.- С.79-80.

13. Паздерський Ю.А., Юринець В.Є., Баран В.П, Євтушенко О.О. *До методу інтегрування систем диференціальних рівнянь хімічної кінетики*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем.-1985.-Вип.23.-С.89-94.
14. Баран В.П., Грилицкий Д.В. *Динамическая контактная задача для полупространства с теплоизолированной поверхностью* // В кн.: Механика деформированных тел и конструкций. -Ереван: Изд. АН Арм. ССР,1985.-С.10.
15. Баран В.П. *Применение метода прямых к решению контактных задач// В кн. III Всесоюзная конференция "Смешанные задачи механики деформированного тела" (Харьков, 3-6 июня 1985 г.). Тезисы докладов* –Харьков, 1985.-С.174-175.
16. Грилицкий Д.В., Баран В.П., Евтушенко А.А. *Задачи трения с тепловыделением для упругих цилиндрических тел*// В кн.: Трение, износ и смазочные материалы. Труды международной научной конференции (Ташкент, 22-26 мая).-М., 1985.-ч.1.-С.24-27.
17. Баран В.П., Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А. *Контактные задачи термоупругости для цилиндрических тел при неидеальном тепловом контакте*// В кн.: VI Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (Ташкент, 24-30 сентября 1986 г.). Тезисы докладов.-Ташкент, 1986.
18. Баран В.П. *Принцип максимума модуля для волновых уравнений линейной упругости* // В сб.:Математические методы и физико-механические поля.-1986. -Вып.24.-С. 25-28.
19. Сеньк С.Г., Божидарник В.В., Баран В.П. *Динамическая контактная задача термоупругости для полупространства* // Вестн. Львов. политех. ин-та. Диф. уравнения и их приложения.-Львов: Вища школа, 1986.-N 202.-С. 105-108.
20. Баран В.П. *Методичні вказівки до застосування ЕОМ при виконанні індивідуальних завдань з опору матеріалів для студентів спеціальності 2014-механіка*– Львів,1987.
21. Грилицкий Д.В.,Баран В.П.,Ниронович И.А. *Контактное взаимодействие цилиндра и сегментной накладки с учетом трения и износа*// В кн.:Совр. проблемы теории контактных взаимодействий. Материалы выездного заседания научного совета АН СССР по трению и смазкам.-Луцк,1987.-С.42-46.
22. Гриліцький Д.В., Баран В.П. *Про постановку контактних задач термопружності з врахуванням теплоутворення при неідеальному тепловому контакті тіл*// Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем.- 1987.-Вип.27.-С.10-13.
23. Грилицкий Д.В., Баран В.П. *Постановка и решение контактных задач с учетом тепловыделения и изнашивания* // В кн.: Механика неоднородных структур. Тезисы докладов. II Всесоюз. конференция (2-4 сентября).-Львов,1987.-Т.2.
24. Баран В.П.,Вардзаль А.Г.,Онышкевич В.М., Яськевич И.Т. *Квазистатическая контактная задача термоупругости для двух полубесконечных тел с учетом теплообразования на границе раздела* // В кн.: Выездное заседание по проблемам теории контактных взаимодействий (Ереван, 28 ноября-2 декабря 1988г). Тезисы докладов.-Ереван:Изд. АН АрмССР, 1988.-С.24-26.
25. Баран В.П., Онышкевич В.М. *Контактная задача с тепловыделением от трения для упругого цилиндра и жесткого полупространства*// В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Тезисы докладов. IV Всесоюзная конференция (26-29 сентября 1989 г.).-Одесса,1989.-ч.1.-С.37.
26. Грилицкий Д.В., Баран В.П. *Расчет температурного поля в торцевом уплотнителе с тепловыделением от трения*// Сб.: Математические методы и физико-механические поля. - 1989.- вып.30.-С.87-90.
27. Луцик М.И., Баран В.П., Шахно С.М., Кочубей Я.М. *Численное моделирование смешивания в суживающихся струйных потоках*// Сб.:Математическая физика и не-

линейная механи- ка.-1990.-Вып.13(47).-С.56-58.

28. Левицкий В.П., Онышкевич В.М. *Осесимметричное контактное взаимодействие жесткого цилиндра и упругого полупрост ранства* // В кн.: Проблемы контактного взаимодействия трения и износа (Ростов-на-Дону, 19-21 июня 1990 г.). Тезисы докладов выездной сессии.-Ростов-на-Дону,1990.-С.63.
29. Левицкий В.П., Онышкевич В.М. *Влияние неоднородностей поверхностей контактирующих тел на теплообразование*// В кн.: Механика неоднородных структур (17-19 сентября 1991 г.). Тезисы докладов III Всесоюзной конференции.-Львов, 1991.-ч.1.-С.187.
30. Дроздов Ю.Н., Грилицкий Д.В., Левицкий В.П. *Контакт пары вращающихся круговых цилиндров с учетом теплообразования от сил трения* // Трение и износ.-1991.-Т.12,N 6.-С. 974-980.
31. Левицкий В.П., Онышкевич В.М. *Теплопередача через жесткий диск, прижимаемый к упругому полупространству*// ПММ.-1992.-Т.56, N 3.-С.480-486.
32. Левицкий В.П., Онышкевич В.М. *Давление жесткого штампа с плоским основанием, нагретым до постоянной температуры, на упругое полупространство*// Прикладная механика.-1992.-Т.28, N 7.-С.43-50.
33. Levitskii V.P., Onyshkevich V.M. *Heat transfer through a rigid disk pressed into an elastic half-space*// J.Appl.Maths. Mechs.-1992.- V.56, N 3.- P.395-402.
34. Гриліцький Д.В., Левицький В.П., Євтушенко О.О. *Термопружні контактні задачі в трибології*// Тези доповідей I Міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків (18-20 травня 1993р.).-Львів,1993.-С.16-17.
35. Левицький В.П., Онишкевич В.М. *Дискретний контакт жорсткого циліндра з пружною основою при теплоутворенні на верхньому торці*// ФХММ.-1993.-Т.29, N 2.-С.96-102.
36. Левицький В.П., Яськевич І.Т. *Одномірні контактні задачі з теплоутворенням і зношуванням для циліндрів*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем.-1993.-Вип.38.-С.53-59.
37. Левицький В.П., Онишкевич В.М. *Осесиметрична контактна задача із зношуванням*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем.-1993.-Вип.38.-С.60-63.
38. Левицький В.П., Бурнаєв О.М. *Оптимізація гальмування з урахуванням зношування від тертя*// ФХММ.-1993.-Т.29, N 5.- С.91-94.
39. Левицький В.П. *Методичні вказівки, програма і контрольні завдання з теоретичної механіки (кінематика, статика)*// Львів, ЛДУ, 1993. - 20с.
40. Кирик Н.Д., Волошинский А.А., Левицкий В.П., Луцишин Р.М. *Моделирование упрочнения высокоскоростным трением ножей из низколегированных сталей*// Станки и инструменты деревоообрабатывающего производства. Межвузовский сборник научных трудов.-С.-Петербург,1993.-С.29-33.
41. Лапуць Я.С., Левицький В.П., Осінчук В.Г., Онишкевич В.М., Семен Б.В. *Прогнозування спортивних результатів на основі регресійного і факторного аналізу*// В кн.: Спорт і національне відродження.-Львів, 1993.-Ч.1.-С.238-241.
42. Левицкий В.П., Яськевич И.Т., Онышкевич В.М. *Тепловые эффекты в контактных задачах термоупругости*// Трение и износ.-1994.-Т.15,N 3.-С.358-365.
43. Левицький В.П., Юринець Р.В. *Фокусування в узагальненій і рухомій термопружності* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем.-1994.-Вип.40.-С.67-72.
44. Levytsky V.P. *Interaction of rigid cylinder with elastic half-space by heat generation on the contact area*// Int. J. Engng Sci.-1994.-V.32, N 11. -P.1693-1702.
45. Левицкий В.П., Новосад В.П., Онышкевич В.М. *Взаимодействие жесткого цилиндра с*

упругим полупространством при теплообразовании на площадке контакта// Прикладная механика.-1994.-Т.30, N 11.-С.26-31.

46. Левицький В.П., Онишкевич В.П., Холощак О.Г. *Контактні задачі термопружності з врахуванням фрикційного розігріву і зношування*// Тези доповідей IV Міжнародної конференції з механіки неоднорідних структур.-Тернопіль, 19-22 вересня 1995р.-С.64.
47. Левицький В.П., Опанасович В.К., Хомляк Л.В. *Методичні вказівки, програма і контрольні завдання з теоретичної механіки (динаміка)*–Львів. ЛДУ.-1995. 16с.
48. Левицький В.П., Юринець Р.В. *Математичне моделювання рухомих циліндрів з теплоутворенням*// Тези доповідей I Міжнародної науково-технічної конференції "Математичне моделювання в електротехніці і електроенергетиці".-Львів, 19-22 серпня 1995 р.
49. Левицький В.П., Новосад В.П., Юринець Р.В. *Деякі осесиметричні задачі з теплоутворенням від тертя*// Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях".-Львів, 1995.-Ч.3.-С.48-49.
50. Левицький В.П., Опанасович В.К., Яськевич І.Т. *Застосування методу зважених нев'язок до розв'язування парних інтегральних рівнянь*// Доп. НАН України.-1995.-N 7.-С.12-15.
51. Левицький В.П., Онишкевич В.М., Яськевич І.Т.*Плоска контактна задача з урахуванням зносу*// ФХММ.-1995.-Т.31,N 1.-С.39-47.
52. Левицький В.П., Юринець Р.В. *Фрикційна взаємодія осесиметричної пари вкладених труб з теплоутворенням* //Матеріали II Міжнародного симпозіуму "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій" (7-10 жовтня, 1996р.).-Львів-Дубляни, 1996.-С.331-334.
53. Левицький В.П., Новосад В.П. *Апроксимація за допомогою зважених нев'язок розв'язків осесиметричних задач із змішаними граничними умовами* // Доп. НАН України.-1996.-N 3.-С.50-56.
54. Левицький В.П., Онишкевич В.М. *Постановка контактних задач термопружності з урахуванням теплоутворення та зношування пар тертя*// В зб.:"Крайові задачі термомеханіки".-К.-1996.-С.180-185.
55. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. *Plane contact problem with heatgeneration account of friction*// Int. J. Engng Sci.-V.34, N 1.-P.101-112.
56. Левицький В.П., Новосад В.П. *Термопружне контактування осесиметричних тіл при змінному навантаженні*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем.-1996. -Вип.43.-С.45-51.
57. Левицкий В.П., Онышкевич В.М., Яськевич И.Т. *Плоская контактная задача термоупругости о давлении нагретого штампа*// МТТ.-1997.-N 1.-С.39-47.

Праці, прийняті до друку

58. Левицкий В.П., Новосад В.П. *Нестационарная контактная задача при наличии теплообразования (ПММ).*
59. Левицький В.П., Новосад В.П., Онишкевич О.М. *Теплопередача через бічну поверхню циліндра в пружний півпростір (Доповіді НАН України).*
60. Левицький В.П., Новосад В.П. *Взаємодія півпростору і штампа, що обертається, за часткового зчеплення контактних поверхонь (ФХММ).*

Стаття надійшла до редколегії 20.04.97

УДК 539.3

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ЦИЛІНДРА ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ МЕТОДОМ РОЗКЛАДУ ЗА ТЕНЗОРНИМИ ФУНКЦІЯМИ

І. Я. Банах

Banakh I.Ya. Solving the problem of stress-strain state of a cylinder under a complex charge using the method of decomposition by tensor functions. It is considered the stationary problem of linear elasticity theory for a cylinder under action of lateral and axial contractions and bending and torsional charges. The transition vector is given by its decomposition with respect to the base of tensor functions of increasing rank. The tensor decomposition coefficients satisfy a system of linear algebraic equations. The tensors of strain and stress are obtained as square functions of space coordinates. As partial cases, our results imply known solutions of certain boundary value problems.

При побудові моделей для дослідження і оптимізації стійкості руху (рівноваги) пружних систем, які перебувають під дією комбінованого навантаження, важливою проблемою залишається відшукання базових (незбурених) розв'язків відповідних рівнянь та дослідження їх стійкості. У праці [1] за лагранжевого підходу енергетичним методом побудовано математичну модель для розв'язування просторових задач нелінійної динамічної теорії пружності ізотропних тіл. При побудові моделі вектор переміщення подавався розкладом за базою тензорних функцій зростаючого рангу, шукані коефіцієнти якого були тензорними функціями відповідного рангу і залежними від часу. Для коефіцієнтів розкладу було отримано систему тензорних звичайних диференціальних рівнянь руху з відповідними початковими умовами. У даній праці на підставі запропонованої моделі розглянуто стаціонарну крайову задачу лінійної теорії пружності для прямого кругового циліндра, навантаженого по бічній поверхні при спільній дії стискуючих осьових зусиль, згину та кручення на крайових поперечних перерізах.

Нехай однорідний лінійно пружний прямий круговий циліндр K у відліковій γ_0-конфігурації займає область

$$X_0 = \left\{(\xi^1, \xi^2, \xi^3):\ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leqslant a^2, -\frac{h}{2} \leqslant \xi^3 \leqslant \frac{h}{2}\right\}.$$

Поверхню, яка обмежує цю область, подамо у вигляді $\partial X_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, де $\Sigma_1 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\ :\ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leqslant a^2, \xi^3 = h/2\}$, $\Sigma_2 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\ :\ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leqslant a^2,$ $\xi^3 = -h/2\}$ – верхня та нижня основи, а $\Sigma_3 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\ :\ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = a^2,$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C35.

$-h/2 \leqslant \xi^3 \leqslant h/2\}$ – бічна поверхня циліндра. При переході з відлікової до актуальної конфігурації зміною площ елементів граничної поверхні нехтуємо.

Припустимо, що на циліндр K діють стаціонарні поверхневі сили, які характеризуються вектором поверхневих зусиль

$$\vec{P}_{n_0} = \begin{cases} -(N_0 - \mu N_1 \xi^1 + \delta(\xi^1, \xi^2 - \frac{a}{2}) N_3)\vec{\ni}_3^0 - \mu N_2(\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0), & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_1, \\ (N_0 - \mu N_1 \xi^1 + \delta(\xi^1, \xi^2 - \frac{a}{2}) N_3)\vec{\ni}_3^0 + \mu N_2(\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0), & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_2, \\ F(\xi^3)(\xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0), & (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Sigma_3. \end{cases} \tag{1}$$

Тут N_0 – густина зусиль, рівномірно розподілених по граничних поперечних перерізах Σ_1, Σ_2; N_3 – інтенсивність сили, зосередженої в точці з координатами $\xi^1 = 0, \xi^2 = a/2$ на перерізах Σ_1, Σ_2; N_1, N_2 – кути згину та закручування, віднесені до одиниці довжини; $F(\xi^3) = f(\xi^3)/h$, де $f(\xi^3)$ – функція, що має зміст густини зусилля, прикладеного до бічної поверхні циліндра; $\delta(\xi^1, \xi^2 - a/2)$ – функція Дірака; μ – стала Ляме.

Розглянемо задачу про знаходження тензора напружень і тензора деформації у тілі K, яке перебуває під дією зовнішніх поверхневих зусиль (1). Для розв'язання сформульованої задачі скористаємося математичною моделлю, запропонованою в праці [1]. Вектор переміщення $\vec{u}$ з відлікової конфігурації в актуальну подамо у вигляді

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{N} \vec{R}_0^{n-1} \overset{n-1}{\cdot} \widehat{u}^{(n)}. \tag{2}$$

Тут $\vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^0$ – радіус-вектор точки (ξ^1, ξ^2, ξ^3) у відліковій конфігурації, $\widehat{u}^{(n)}$ $(n = \overline{1, N})$ – шукані сталі тензори рангу n, „$\overset{n-1}{\cdot}$" означає $(n-1)$-кратний внутрішній добуток тензорів, $\vec{R}_0^{n-1}$ – $(n-1)$-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе. Система рівнянь рівноваги для лінійно пружного тіла запишеться у вигляді [1]

$$\sum_{n=1}^{N} \widehat{u}^{(n)^T} \overset{n}{\cdot} \widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)} = \widehat{F}_1^{(i)} \qquad (i = \overline{1, N}), \tag{3}$$

де

$$\widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)} = \int_{X_0} \frac{\partial \vec{R}_0^{n-1}}{\partial \xi^m} \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes \frac{\partial \vec{R}_0^{i-1}}{\partial \xi^k} dV_0, \ \widehat{A}^{mk} = \lambda \vec{\ni}_0^m \otimes \vec{\ni}_0^k + \mu(\delta^{km} \widehat{I} + \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^m), \tag{4}$$

$$\widehat{F}_1^{(i)} = \int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0} \otimes \vec{R}_0^{i-1} d\Sigma_0. \tag{5}$$

У розвиненні вектора переміщення (2) обмежимося збереженням членів до четвертого порядку включно, тобто у формулі (2) покладемо $N = 4$. Оскільки $\partial \vec{R}_0^0 / \partial \xi^i = 0, \vec{R}_0^0 \equiv 1$, а початок координат перебуває в центрі мас циліндра, то з (4) отримаємо

$$\widehat{\mathcal{J}}^{(1+i)} = 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \ \widehat{\mathcal{J}}^{(2+3)} = \widehat{\mathcal{J}}^{(3+2)} = 0, \ \widehat{\mathcal{J}}^{(n+1)} = 0 \quad (n = \overline{1, 4}), \ \widehat{\mathcal{J}}^{(3+4)} = \widehat{\mathcal{J}}^{(4+3)} = 0.$$

Тому система рівнянь рівноваги (3) розпадеться на векторну тотожність $\widehat{F}_1^{(1)} \equiv 0$ $(i=1)$, яка означає рівність нулеві головного вектора зовнішніх сил, що діють на циліндр, систему двох тензорних рівнянь (i=2,4)

$$\widehat{u}^{(2)^T} \cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(2+2)} + \widehat{u}^{(4)^T} \cdot\cdot\cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(4+2)} = \widehat{F}_1^{(2)},\ \widehat{u}^{(2)^T} \cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(2+4)} + \widehat{u}^{(4)^T} \cdot\cdot\cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(4+4)} = \widehat{F}_1^{(4)} \quad (6)$$

стосовно тензора другого рангу $\widehat{u}^{(2)}$ і тензора четвертого рангу $\widehat{u}^{(4)}$ та тензорне рівняння

$$\widehat{u}^{(3)^T} \cdot\cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(3+3)} = \widehat{F}_1^{(3)} \quad (7)$$

стосовно тензора третього рангу $\widehat{u}^{(3)}$. Запишемо тензори $\widehat{u}^{(n)}$, $F_1^{(n)}$ $(n = \overline{1,4})$ у вигляді розкладу за поліадами векторів бази $\{\vec{\ni}_0^{\alpha}\}$

$$\begin{aligned} &\widehat{u}^{(1)} = u_\alpha \vec{\ni}_0^{\alpha},\ \ \widehat{u}^{(4)} = u_{\alpha\beta\gamma s} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma} \otimes \vec{\ni}_0^{s}, \\ &\widehat{u}^{(2)} = u_{\alpha\beta} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta},\ \ \widehat{u}^{(3)} = u_{\alpha\beta\gamma} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\widehat{F}_1^{(2)} = F_{\alpha\beta} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta},\ \ \widehat{F}_1^{(3)} = F_{\alpha\beta\gamma} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma},\ \ F_1^{(4)} = F_{\alpha\beta\gamma s} \vec{\ni}_0^{\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\gamma} \otimes \vec{\ni}_0^{s}. \quad (9)$$

Із формули (4) знаходимо :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{J}}^{(2+2)} =& V_0 \vec{\ni}_m^0 \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes \vec{\ni}_k^0, \\ \widehat{\mathcal{J}}^{(4+2)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta} (\vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_m^0) \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes \vec{\ni}_k^0, \\ \widehat{\mathcal{J}}^{(2+4)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta} \vec{\ni}_m^0 \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes (\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_k^0), \\ \widehat{\mathcal{J}}^{(4+4)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma s} (\vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_m^0) \otimes \\ & \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes (\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\gamma^0 \otimes \vec{\ni}_s^0 + \vec{\ni}_\gamma^0 \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_s^0 + \vec{\ni}_\gamma^0 \otimes \vec{\ni}_s^0 \otimes \vec{\ni}_k^0), \\ \widehat{\mathcal{J}}^{(3+3)} =& \mathcal{J}^{\alpha\beta} (\vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_\alpha^0 + \vec{\ni}_\alpha^0 \otimes \vec{\ni}_m^0) \otimes \widehat{A}^{mk} \otimes (\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_\beta^0 + \vec{\ni}_\beta^0 \otimes \vec{\ni}_k^0), \end{aligned} \quad (10)$$

де $\mathcal{J}^{\alpha\beta} = \frac{V_0}{4}\left[a^2(\delta_1^\alpha \delta_1^\beta + \delta_2^\alpha \delta_2^\beta) + \frac{h^2}{3}\delta_3^\alpha \delta_3^\beta\right]$,

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma s} = \frac{V_0}{8} \begin{cases} a^4, & \text{якщо всі індекси дорівнюють 1, або всі дорівнюють 2,} \\ \frac{a^4}{3}, & \text{якщо два індекси дорівнюють 1, а два інші – 2,} \\ \frac{a^2h^2}{6}, & \text{якщо два індекси дорівнюють 3, а два інші – 1 або 2,} \\ \frac{h^4}{10}, & \text{якщо всі індекси дорівнюють 3,} \\ 0, & \text{у всіх інших випадках,} \end{cases}$$

$V_0 = \pi a^2 h$ – об'єм циліндра у відліковій конфігурації. Якщо підставити (8), (9) і (10) в

(6) і (7) та виконати внутрішнє множення, то рівняння системи (6) запишуться так

$$
\begin{gathered}
T_{nk}^{mj}\big[4u_{mj}+a^2(u_{m11j}+u_{1m1j}+u_{11mj}+u_{m22j}+u_{2m2j}+u_{22mj})+\\
+\frac{h^2}{3}(u_{m33j}+u_{3m3j}+u_{33mj})\big]\vec{\exists}_0^n\otimes\vec{\exists}_0^k=\frac{4}{V_0}F_{nk}\vec{\exists}_0^n\otimes\vec{\exists}_0^k,\\
T_{nk}^{mj}\big\{a^2\big[2u_{mj}+a^2(u_{m11j}+u_{1m1j}+u_{11mj})+\frac{a^2}{3}(u_{m22j}+u_{2m2j}+u_{22mj})+\\
+\frac{h^2}{6}(u_{m33j}+u_{3m3j}+u_{33mj})\big](\delta_p^k\delta_q^1\delta_r^1+\delta_p^1\delta_q^k\delta_r^1+\delta_p^1\delta_q^1\delta_r^k)+\\
+a^2[2u_{mj}+a^2(u_{m22j}+u_{2m2j}+u_{22mj})+\frac{a^2}{3}(u_{m11j}+u_{1m1j}+u_{11mj})+\\
+\frac{h^2}{6}(u_{m33j}+u_{3m3j}+u_{33mj})](\delta_p^k\delta_q^2\delta_r^2+\delta_p^2\delta_q^k\delta_r^2+\delta_p^2\delta_q^2\delta_r^k)+\\
+h^2\big[\frac{2}{3}u_{mj}+\frac{a^2}{6}(u_{m11j}+u_{1m1j}+u_{11mj}+u_{m22j}+u_{2m2j}+u_{22mj})+\\
+\frac{h^2}{10}(u_{m33j}+u_{3m3j}+u_{33mj})\big](\delta_p^k\delta_q^3\delta_r^3+\delta_p^3\delta_q^k\delta_r^3+\delta_p^3\delta_q^3\delta_r^k)+\\
+\frac{a^4}{3}(u_{m12j}+u_{1m2j}+u_{12mj}+u_{m21j}+u_{2m1j}+u_{21mj})\times\\
\times(\delta_p^k\delta_q^1\delta_r^2+\delta_p^1\delta_q^k\delta_r^2+\delta_p^1\delta_q^2\delta_r^k+\delta_p^k\delta_q^2\delta_r^1+\delta_p^2\delta_q^k\delta_r^1+\delta_p^2\delta_q^1\delta_r^k)+\\
+\frac{a^2h^2}{6}(u_{m13j}+u_{1m3j}+u_{13mj}+u_{m31j}+u_{3m1j}+u_{31mj})\times\\
\times(\delta_p^k\delta_q^1\delta_r^3+\delta_p^1\delta_q^k\delta_r^3+\delta_p^1\delta_q^3\delta_r^k+\delta_p^k\delta_q^3\delta_r^1+\delta_p^3\delta_q^k\delta_r^1+\delta_p^3\delta_q^1\delta_r^k)+\\
+\frac{a^2h^2}{6}(u_{m23j}+u_{2m3j}+u_{23mj}+u_{m32j}+u_{3m2j}+u_{32mj})\times\\
\times(\delta_p^k\delta_q^2\delta_r^3+\delta_p^2\delta_q^k\delta_r^3+\delta_p^2\delta_q^3\delta_r^k+\delta_p^k\delta_q^3\delta_r^2+\delta_p^3\delta_q^k\delta_r^2+\delta_p^3\delta_q^2\delta_r^k)\big\}\times\\
\times\vec{\exists}_0^n\otimes\vec{\exists}_0^p\otimes\vec{\exists}_0^q\otimes\vec{\exists}_0^r=\frac{8}{V_0}F_{npqr}\vec{\exists}_0^n\otimes\vec{\exists}_0^p\otimes\vec{\exists}_0^q\otimes\vec{\exists}_0^r,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

а рівняння (7) набуде вигляду

$$
\begin{gathered}
T_{nk}^{mj}\big[\frac{h^2}{3}(u_{m3j}+u_{3mj})(\delta_p^k\delta_s^3+\delta_p^3\delta_s^k)+a^2(u_{m1j}+u_{1mj})(\delta_p^k\delta_s^1+\delta_p^1\delta_s^k)+\\
+a^2(u_{m2j}+u_{2mj})(\delta_p^k\delta_s^2+\delta_p^2\delta_s^k)\big]=\frac{4}{V_0}F_{nps}\vec{\exists}_0^n\otimes\vec{\exists}_0^p\otimes\vec{\exists}_0^s.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

У формулах (11), (12) введені позначення $T_{nk}^{mj}=\lambda\delta^{mj}\delta_{nk}+\mu(\delta_k^m\delta_n^j+\delta_k^j\delta_n^m)$.

Враховуючи позначення (8), вектор переміщення (2) можна записати

$$
\vec{u}=(u_s+\xi^\alpha u_{\alpha s}+\xi^\alpha\xi^\beta u_{\alpha\beta s}+\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma u_{\alpha\beta\gamma s})\vec{\exists}_0^s. \tag{13}
$$

Зауважимо, що в (13) для кожного s коефіцієнтом при одночлені $\xi^\alpha\xi^\beta$ $(\alpha\neq\beta)$ є сума $u_{\alpha\beta s}+u_{\beta\alpha s}$ двох компонент тензора $\widehat{u}^{(3)}$, а коефіцієтном при одночлені $\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma$ є сума

$u_{\alpha\beta\gamma s} + u_{\alpha\gamma\beta s} + u_{\gamma\alpha\beta s}$ трьох компонент тензора $\widehat{u}^{(4)}$ при $\alpha = \beta \neq \gamma$ і сума $u_{123s} + u_{132s} + u_{213s} + u_{231s} + u_{312s} + u_{321s}$ шести компонент тензора $\widehat{u}^{(4)}$, якщо індекси α, β, γ є різними. Врахувавши вигляд коефіцієнтів розвинення (13), структуру рівнянь (11), (12) і симетрію компонент $F_{\alpha\beta\gamma}$ тензора $\widehat{F}^{(3)}$ стосовно індексів β, γ та компонент $F_{\alpha\beta\gamma s}$ тензора $\widehat{F}^{(4)}$ стосовно індексів β, γ, s при будь-якому допустимому навантаженні, можна зробити висновок, що в загальному випадку система рівнянь (11) складається з 9+30 скалярних рівнянь, а рівняння (12) – з 18 скалярних рівнянь.

Знайдемо праві частини рівнянь (11), (12), які відповідають векторові поверхневих напружень (1). Із (5) отримаємо

$$\begin{gathered}
\widehat{F}_1^{(2)} = \pi a^3 D_2(\vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2) - (N_0\pi a^2 + N_3)h\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3, \\
\widehat{F}_1^{(3)} = \pi a^3 D_3(\vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2) + \\
+ \frac{\mu V_0 a^2}{4}\big[N_1(\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1) + N_2(-\vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 - \\
- \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1)\big] - \\
- \frac{N_3 a h}{2}(\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2), \\
\widehat{F}_1^{(4)} = \frac{\pi a^3}{4}\big[a^2 D_2(3(\vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2) + \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 + \\
+ \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^2 + \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \\
+ \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^2) + 4D_4(\vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \\
+ \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2)\big] - \\
- \frac{N_0 h a^2}{4}(\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 + \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^1 \otimes \vec{\ni}_0^3) - \\
- \frac{a^2 h}{4}(N_0 + N_3)\big[\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 + \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2 + \\
+ \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^2 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \frac{h^2}{a^2}\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^3\big]. \qquad (14)
\end{gathered}$$

Тут

$$D_2 = \int_{-h/2}^{h/2} F(\xi^3)d\xi^3, \;\; D_3 = \int_{-h/2}^{h/2} F(\xi^3)\xi^3 d\xi^3, \;\; D_4 = \int_{-h/2}^{h/2} F(\xi^3)(\xi^3)^2 d\xi^3. \qquad (15)$$

Введемо наступні позначення:

$$x_{i1} = u_{ii11} + u_{i1i1} + u_{1ii1}, \;\; y_{i2} = u_{ii22} + u_{i2i2} + u_{2ii2}, \;\; z_{i3} = u_{ii33} + u_{i3i3} + u_{3ii3}, \qquad (16)$$

$$a_{ij} = u_{ij1} + u_{ji1}, \;\; b_{ij} = u_{ij2} + u_{ji2}, \;\; c_{ij} = u_{ij3} + u_{ji3} \;\; (i \leqslant j). \qquad (17)$$

Якщо врахувати (14), (16) і (17), то систему рівнянь (11) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно ненульових змінних (16) і ненульових компонент тензора $\widehat{u}^{(2)}$:

$$
\begin{gathered}
\lambda[4(u_{11}+u_{22}+u_{33})+a^2(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{3}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[4u_{11}+a^2(x_{11}+x_{21})+\frac{h^2}{3}x_{31}]=\frac{4aD_2}{h};\\
\lambda[4(u_{11}+u_{22}+u_{33})+a^2(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{3}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[4u_{22}+a^2(y_{12}+y_{22})+\frac{h^2}{3}y_{32}]=\frac{4aD_2}{h};\\
\lambda[4(u_{11}+u_{22}+u_{33})+a^2(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{3}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[4u_{33}+a^2(z_{13}+z_{23})+\frac{h^2}{3}z_{33}]=-4(N_0+\frac{N_3}{\pi a^2});\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+3y_{12}+3z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{11}+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+x_{21})+\frac{h^2}{6}x_{31}]=\frac{2D_2a}{h};\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{11}+\frac{a^2}{3}(x_{11}+2y_{12}+5x_{21})+\frac{h^2}{6}x_{31}]=\frac{2D_2a}{h};\\
\lambda[\frac{2}{3}(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{6}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\frac{h^2}{10}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[\frac{2}{3}u_{11}+\frac{a^2}{6}(x_{11}+2z_{13}+x_{21}+2x_{31})+\frac{h^2}{10}x_{31}]=\frac{8aD_4}{h^3};\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+3y_{12}+3z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{22}+\frac{a^2}{3}(5y_{12}+2x_{21}+y_{22})+\frac{h^2}{6}y_{32}]=\frac{2D_2a}{h}; \qquad (18)\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\\
+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+2\mu[2u_{22}+\frac{a^2}{3}(y_{12}+3y_{22})+\frac{h^2}{6}y_{32}]=\frac{2D_2a}{h};\\
\lambda[\frac{2}{3}(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{6}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\frac{h^2}{10}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[\frac{2}{3}u_{22}+\frac{a^2}{6}(y_{12}+y_{22}+2z_{23}+2y_{32})+\frac{h^2}{10}y_{32}]=\frac{8aD_4}{h^3};\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(3x_{11}+3y_{12}+3z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[2u_{33}+\frac{a^2}{3}(3z_{13}+z_{23})+\frac{h^2}{6}(2z_{13}+2x_{31}+z_{33})]=-\frac{2}{\pi a^2}(N_0+N_3);\\
\lambda[2(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{3}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+3x_{21}+3y_{22}+3z_{23})+\frac{h^2}{6}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+\\
+2\mu[2u_{33}+\frac{a^2}{3}(z_{13}+3z_{23})+\frac{h^2}{6}(2z_{13}+2y_{32}+z_{33})]=-\frac{2}{\pi a^2}(N_0+N_3);
\end{gathered}
$$

$$\lambda[\frac{2}{3}(u_{11}+u_{22}+u_{33})+\frac{a^2}{6}(x_{11}+y_{12}+z_{13}+x_{21}+y_{22}+z_{23})+\frac{h^2}{10}(x_{31}+y_{32}+z_{33})]+$$
$$+2\mu[\frac{2}{3}u_{33}+\frac{a^2}{6}(z_{13}+z_{23})+\frac{h^2}{10}z_{33}]=-\frac{2}{3\pi a^2}(N_0+N_3),$$

а систему (12) — у вигляді лінійної системи скалярних рівнянь стосовно змінних (17)

$$(\lambda+2\mu)a_{11}+\lambda b_{12}+\lambda c_{13}=0,\ \lambda a_{11}+(\lambda+2\mu)b_{12}+\lambda c_{13}=0,\ \lambda a_{11}+\lambda b_{12}+$$
$$+(\lambda+2\mu)c_{13}=\mu N_1,\ a_{22}+b_{12}=0,\ a_{33}+c_{13}=0,\ (\lambda+2\mu)a_{12}+\lambda b_{22}+\lambda c_{23}=0,$$
$$\lambda a_{12}+(\lambda+2\mu)b_{22}+\lambda c_{23}=0,\ \lambda a_{12}+\lambda b_{22}+(\lambda+2\mu)c_{23}=-\frac{N_3}{a},\ a_{12}+b_{11}=0,$$
$$c_{23}+b_{33}=0,\ (\lambda+2\mu)a_{13}+\lambda b_{23}+\lambda c_{33}=\frac{12aD_3}{h^3}\ \lambda a_{13}+(\lambda+2\mu)b_{23}+\lambda c_{33}=\frac{12aD_3}{h^3},$$
$$\lambda a_{13}+\lambda b_{23}+(\lambda+2\mu)c_{33}=0,\ a_{13}+c_{11}=0,\ b_{23}+c_{22}=0,\ a^2(a_{23}+c_{12})+ \tag{19}$$
$$+\frac{h^2}{3}(a_{23}+b_{13})=-N_2a^2,\ a^2(b_{13}+c_{12})+\frac{h^2}{3}(a_{23}+b_{13})=N_2a^2,\ 2c_{12}+a_{23}+b_{13}=0.$$

Розв'язком систем лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь (18) і (19) будуть величини

$$u_{11}=s+t,\quad u_{22}=s-t,\quad u_{33}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\Big(N_0+\frac{N_3}{\pi a^2}\Big)-\frac{3N_3(\lambda+2\mu)}{4\pi B}(\beta+5h^2\lambda)-$$
$$-\frac{5ah}{2B}\Big[a^2(5\lambda^2+14\lambda\mu+12\mu^2)+h^2\lambda(\lambda+2\mu)\Big]D-\frac{a\lambda}{h\mu(3\lambda+2\mu)}D_2,$$
$$x_{11}=-\frac{N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}+\frac{3\beta}{B}\Big]-3q,\quad y_{22}=\frac{N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}-\frac{3\beta}{B}\Big]-3q,$$
$$x_{21}=\frac{3N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}-\frac{\beta}{B}\Big]-q,\quad y_{12}=-\frac{3N_3\lambda}{8\pi a^2}\Big[\frac{2\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\Big]-q,$$
$$x_{31}=-\frac{45N_3}{2\pi}\Big[\frac{\lambda+\mu}{A}+\frac{(\lambda+2\mu)^2}{B}\Big]-p,\quad y_{32}=\frac{45N_3}{2\pi}\Big[\frac{\lambda+\mu}{A}-\frac{(\lambda+2\mu)^2}{B}\Big]-p,$$
$$z_{13}=\frac{3N_3}{2\pi a^2}\Big[\frac{\alpha(\lambda+\mu)}{A}+\frac{\beta(\lambda+2\mu)}{B}\Big]+\frac{15ah(\lambda+2\mu)^2}{B}D, \tag{20}$$
$$z_{23}=\frac{3N_3}{2\pi a^2}\Big[\frac{\alpha(\lambda+\mu)}{A}-\frac{\beta(\lambda+2\mu)}{B}\Big]+\frac{15ah(\lambda+2\mu)^2}{B}D,$$
$$z_{33}=\frac{15N_3\lambda(\lambda+2\mu)}{\pi B}+\frac{30a\lambda}{Bh}\Big[2(\lambda+\mu)a^2+(\lambda+2\mu)h^2\Big]D,$$
$$a_{11}=-a_{22}=b_{12}=-\frac{\lambda N_1}{2(3\lambda+2\mu)},\quad a_{33}=-c_{13}=-\frac{N_1(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu},$$
$$a_{12}=-b_{11}=b_{22}=\frac{\lambda N_3}{a\mu(3\lambda+2\mu)},\quad a_{23}=-b_{13}=-N_2,$$
$$a_{13}=b_{23}=-c_{11}=-c_{22}=\frac{6D_3a(\lambda+2\mu)}{h^3\mu(3\lambda+2\mu)},\quad c_{12}=0,$$
$$b_{33}=-c_{23}=\frac{2N_3(\lambda+\mu)}{a\mu(3\lambda+2\mu)},\quad c_{33}=-\frac{12D_3a\lambda}{h^3\mu(3\lambda+2\mu)},$$

де

$$
\begin{aligned}
s =&\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Big(N_0+\frac{N_3}{\pi a^2}\Big)+\frac{3N_3}{8\pi B}\Big[\lambda\beta+5h^2(\lambda+2\mu)^2\Big]+\\
&+\frac{5ah(\lambda+2\mu)}{4B}\times\Big[(5\lambda+2\mu)a^2+(\lambda+2\mu)h^2\Big]D+\frac{a(\lambda+2\mu)}{2\mu h(3\lambda+2\mu)}D_2,\\
t =&\frac{15h^2N_3(\lambda+\mu)}{8\pi A},\qquad q=\frac{15ah\lambda(\lambda+2\mu)}{4B}D,\\
p =&\frac{15a(\lambda+2\mu)}{Bh}\Big[2(\lambda+\mu)a^2+(\lambda+2\mu)h^2\Big]D,\ D=D_2-\frac{12}{h^2}D_4.\\
\alpha =&15a^2+2h^2,\qquad \beta=15a^2(\lambda+2\mu)+2h^2(3\lambda+2\mu),\\
A =&\mu\big[15a^4(3\lambda+2\mu)+2a^2h^2(3\lambda+2\mu)+2h^4(\lambda+\mu)\big],\\
B =&2\mu\big[15a^4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)+2a^2h^2(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)+h^4(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)\big].
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Якщо врахувати позначення (16), (17), то, з точністю до доданків, які визначають переміщення циліндра як абсолютно твердого тіла, формула (13) для сформульованої задачі набуде вигляду

$$
\begin{aligned}
\vec{u}=&\Big[u_{11}\xi^1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}a_{ii}\xi^{i^2}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}a_{ij}\xi^i\xi^j+x_{11}\xi^{1^3}+x_{21}\xi^1\xi^{2^2}+x_{31}\xi^1\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_1^0+\\
&+\Big[u_{22}\xi^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}b_{ii}\xi^{i^2}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}b_{ij}\xi^i\xi^j+y_{12}\xi^{1^2}\xi^2+y_{22}\xi^{2^3}+y_{32}\xi^2\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_2^0+\\
&+\Big[u_{33}\xi^3+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}c_{ii}\xi^{i^2}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}c_{ij}\xi^i\xi^j+z_{13}\xi^{1^2}\xi^3+z_{23}\xi^{2^2}\xi^3+z_{33}\xi^{3^3}\Big]\vec{\ni}_3^0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Тепер можна знайти тензор деформації у всіх точках тіла K

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_0=&\frac{1}{2}(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}+\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^T)=\\
=&\Big[u_{11}+2a_{11}\xi^1+a_{12}\xi^2+a_{13}\xi^3+3x_{11}\xi^{1^2}+x_{21}\xi^{2^2}+x_{31}\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_1^0\otimes\vec{\ni}_1^0+\\
&+\Big[u_{22}+2a_{11}\xi^1+a_{12}\xi^2+a_{13}\xi^3+y_{12}\xi^{1^2}+3y_{22}\xi^{2^2}+y_{32}\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_2^0\otimes\vec{\ni}_2^0+\\
&+\Big[u_{33}+c_{13}\xi^1+c_{23}\xi^2+2c_{33}\xi^3+z_{13}\xi^{1^2}+z_{23}\xi^{2^2}+3z_{33}\xi^{3^2}\Big]\vec{\ni}_3^0\otimes\vec{\ni}_3^0+\\
&+(x_{21}+y_{12})\xi^1\xi^2(\vec{\ni}_1^0\otimes\vec{\ni}_2^0+\vec{\ni}_2^0\otimes\vec{\ni}_1^0)+\\
&+\frac{1}{2}\Big[-N_2\xi^2+2(x_{31}+z_{13})\xi^1\xi^3\Big](\vec{\ni}_1^0\otimes\vec{\ni}_3^0+\vec{\ni}_3^0\otimes\vec{\ni}_1^0)+\\
&+\frac{1}{2}\Big[N_2\xi^1+2(y_{32}+z_{23})\xi^2\xi^3\Big](\vec{\ni}_2^0\otimes\vec{\ni}_3^0+\vec{\ni}_3^0\otimes\vec{\ni}_2^0)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

і відповідний тензор напружень

$$\widehat{P} = \lambda \mathcal{I}_1(\widehat{\varepsilon}_0)\widehat{I} + 2\mu\widehat{\varepsilon}_0 =$$

$$= \Big\{(\lambda+2\mu)u_{11} + \lambda(u_{22}+u_{33}) + \Big[(\lambda+2\mu)2a_{11} + \lambda(2a_{11}+c_{13})\Big]\xi^1 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{12} +$$

$$+ \lambda(a_{12}+c_{23})\Big]\xi^2 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{13} + \lambda(a_{13}+2c_{33})\Big]\xi^3 + \Big[(\lambda+2\mu)3x_{11} + \lambda(y_{12}+z_{13})\Big]\xi^{1^2} +$$

$$+ \Big[(\lambda+2\mu)x_{21} + \lambda(3y_{22}+z_{23})\Big]\xi^{2^2} + \Big[(\lambda+2\mu)x_{31} + \lambda(y_{32}+3z_{33})\Big]\xi^{3^2}\Big\}\vec{\ni}_1^0 \otimes \vec{\ni}_1^0 +$$

$$+ \Big\{(\lambda+2\mu)u_{22} + \lambda(u_{11}+u_{33}) + \Big[(\lambda+2\mu)2a_{11} + \lambda(2a_{11}+c_{13})\Big]\xi^1 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{12} +$$

$$+ \lambda(a_{12}+c_{23})\Big]\xi^2 + \Big[(\lambda+2\mu)a_{13} + \lambda(a_{13}+2c_{33})\Big]\xi^3 + \Big[(\lambda+2\mu)y_{12} + \lambda(3x_{11}+z_{13})\Big]\xi^{1^2} +$$

$$+ \Big[(\lambda+2\mu)3y_{22} + \lambda(x_{21}+z_{23})\Big]\xi^{2^2} + \Big[(\lambda+2\mu)y_{32} + \lambda(x_{31}+3z_{33})\Big]\xi^{3^2}\Big\}\vec{\ni}_2^0 \otimes \vec{\ni}_2^0 +$$

$$+ \Big\{(\lambda+2\mu)u_{33} + \lambda(u_{11}+u_{22}) + \Big[(\lambda+2\mu)c_{13} + 4a_{11}\lambda\Big]\xi^1 + \Big[(\lambda+2\mu)c_{23} + 2a_{12}\lambda\Big]\xi^2 +$$

$$+ \Big[(\lambda+2\mu)2c_{33} + 2a_{13}\lambda\Big]\xi^3 + \Big[(\lambda+2\mu)z_{13} + \lambda(3x_{11}+y_{12})\Big]\xi^{1^2} +$$

$$+ \Big[(\lambda+2\mu)z_{23} + \lambda(x_{21}+3y_{22})\Big]\xi^{2^2} + \Big[(\lambda+2\mu)3z_{33} + \lambda(x_{31}+y_{32})\Big]\xi^{3^2}\Big\}\vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0 +$$

$$+ 2\mu(x_{21}+y_{12})\xi^1\xi^2(\vec{\ni}_1^0 \otimes \vec{\ni}_2^0 + \vec{\ni}_2^0 \otimes \vec{\ni}_1^0) + \mu\Big[-N_2\xi^2 + 2(x_{31}+z_{13})\xi^1\xi^3\Big] \times$$

$$\times (\vec{\ni}_1^0 \otimes \vec{\ni}_3^0 + \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_1^0) + \mu\Big[N_2\xi^1 + 2(y_{32}+z_{23})\xi^2\xi^3\Big](\vec{\ni}_2^0 \otimes \vec{\ni}_3^0 + \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_2^0). \quad (24)$$

Висновки

Як часткові випадки з формул (23) і (24) можна отримати відомі в літературі [2,3] точні розв'язки класичних задач стиску рівномірно розподіленими силами, згину та кручення вільного від силових навантажень на бічній поверхні прямого кругового циліндра. Як легко зауважити з (20), (21), точний розв'язок задачі про стиск ($N_1 = N_2 = N_3 = 0, F(\xi^3) = 0$) отримаємо, якщо у формулі (2) покладемо $N = 2$ і розв'яжемо тензорне рівняння

$$\widehat{u}^{(2)^T} \cdot\cdot\, \widehat{\mathcal{J}}^{(2+2)} = \widehat{F}_1^{(2)}.$$

Напружено-деформівний стан тіла K при цьому буде однорідним. Розв'язок задачі про згин або кручення циліндра ($N_0 = N_2 = N_3 = 0, F(\xi^3) = 0$ або $N_0 = N_1 = N_3 = 0, F(\xi^3) = 0$ відповідно) отримаємо, якщо у формулі (2) покладемо $N = 3$ і розв'яжемо тензорне рівняння

$$\widehat{u}^{(3)^T} \cdots\, \widehat{\mathcal{J}}^{(3+3)} = \widehat{F}_1^{(3)}.$$

Напружено-деформівний стан тіла K при цьому буде неоднорідним. Тензори напруження та деформації будуть лінійними функціями просторових координат.

Зосереджене поверхневе навантаження та навантаження, прикладене до бічної поверхні, викликають у тілі складний напружено-деформівний стан. Знайдений нами наближений розв'язок (23), (24) є квадратичною функцією просторових координат. Уточнення цього розв'язку пов'язане з необхідністю розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь вищого порядку.

Формули (23), (24) дають наближені розв'язки цілого класу задач про напружено-деформівний стан стиснутого по бічній поверхні кругового циліндра залежно від конкретизації функції $F(\xi^3)$. Зокрема, якщо $F(\xi^3) = -N_4$, то у формулах (20), (21) $D_2 = -N_4 h$, $D_3 = D_4 = 0$; якщо $F(\xi^3) = -N_4|\xi^3|$, то $D_2 = -N_4 h^2/4$, $D_3 = 0$, $D_4 = -N_4 h^4/32$; якщо $F(\xi^3) = -N_4 \xi^3$, то $D_2 = D_4 = 0$, $D_3 = -N_4 h^3/12$ (розв'язок відповідної задачі збігається з наведеним в [2]); якщо $F(\xi^3) = -N_4\Big[\delta(\xi^3 - h/2) + \delta(\xi^3 + h/2)\Big]$, то $D_2 = -2N_4$, $D_3 = 0$, $D_4 = -N_4 h^2/2$ (у всіх випадках $N_4 = \mathrm{const}$).

Конкретизацію функції $F(\xi^3)$ можна використати для того, щоб будувати наближені розв'язки задач у випадку задання на частині поверхні ∂X_0 компонент вектора переміщення.

Якщо при дослідженні стійкості рівноваги циліндра за базовий вибирати розв'язок (23), (24), то свободу вибору функції $F(\xi^3)$ можна використати для підвищення параметрів стійкості.

1. Вус І.Я., Доманський П.П. Математична модель просторового руху пружних тіл // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.- матем. – Вип. 45 – с. 154-161.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука. – 1980. – 512 с.
3. Тимошенко С.Г., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.1997

УДК 539.3

ПРО ЗГИН БАЛКИ З ЕЛІПТИЧНОЮ ЗАПРЕСОВКОЮ

Р. М. Луцишин

Lutsyshyn R.M. About the curving of a beam with a pressed elliptical disk. The work is devoted to researching of deform-strained station of a beam loaded by curving moments. An elliptical disk of the same material loaded by twisting moments is pressed in circular hole of the beam. The disk is in limit balance station under the twisting moments and frictional forces action. The task came to the determination of the strained functions and convenient engineering calculation formulas for analyzing of strained states along the contact line.

Нехай в круговий отвір радіуса R безмежної ізотропної балки (смуги), що згинається моментом M, запресоване еліптичне ядро з того ж матеріалу. Ексцентриситет еліпса вважатимемо малим, а його параметри такими, щоб в процесі деформації відбувався повний контакт деталей конструкції. У центрі запресовки прикладена зосереджена пара, момент якої m визначається з умови граничної рівноваги ядра під дією сил тертя

$$m = -R^2 \int_0^{2\pi} \tau_{r\phi} d\phi = -kR^2 \int_0^{2\pi} \sigma_r d\phi, \tag{1}$$

де k – коефіцієнт тертя.

Виберемо початок координат в центрі запресовки, вісь OY спрямуємо вздовж осі балки, вісь OX – вздовж лінії поперечного її перерізу, півосі еліпса – a і b, причому велика піввісь еліпса утворює з віссю OX кут δ.

Потрібно визначити функції напружень в даній конструкції, проаналізувати напружений стан вздовж лінії контакту деталей та умови їх повного контакту. Перетворенням $\zeta = Rz$ приведемо межу отвору в балці до кола γ одиничного радіуса в площині z. Півосі еліпса в площині z матимуть розміри $\dfrac{a}{R}$ і $\dfrac{b}{R}$.

Сформулюємо контактну умову для радіальних переміщень контурів деталей. Для цього знайдемо віддаль точки еліпса від його центра та скористаємось наближенням квадратного кореня за допомогою біноміального ряду

$$\triangle = \frac{\sqrt{A}}{2R}\sqrt{1 + \frac{B}{A}\Big(\Big(\frac{t}{e^{i\delta}}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{i\delta}}{t}\Big)^2\Big)} \approx \frac{\sqrt{A}}{2R}\Big(1 + \frac{B}{2A}\Big(\Big(\frac{t}{e^{i\delta}}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{i\delta}}{t}\Big)^2\Big)\Big), \tag{2}$$

де $A = (a-b)^2 + (a+b)^2\cos^2 2\delta$, $B = a^2 - b^2$, $t \in \gamma$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73K05.

Тоді умова контакту деталей набуде вигляду

$$v_r^+ - v_r^- = -\alpha + \beta\Big(\Big(\frac{t}{e^{i\delta}}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{i\delta}}{t}\Big)^2\Big),\ \alpha = \frac{\sqrt{A} - 2R}{2R},\ \beta = \frac{B}{4\sqrt{A}}. \tag{3}$$

Тут і надалі знак "+" означає, що величина відноситься до краю ядра, "−" – до краю отвору в балці.

Використовуючи впроваджені в [1] функції напружень, задача про напружено-деформівний стан конструкції зводиться до таких задач лінійного спряження

$$\Big[F(t) + H(t)\Big]^+ + \Big[F(t) + H(t)\Big]^- = 2f(t),\ \Big[F(t) - H(t)\Big]^+ - \Big[F(t) - H(t)\Big]^- = 0, \tag{4}$$

де $f(t) = \frac{1+ik}{t} R \int \sigma_r(t)dt, \sigma_r(t)$ - шукане контактне напруження. Розв'язок (4) з врахуванням навантажень, що діють на конструкцію, має вигляд

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} - A_1 + \frac{im}{2\pi R},\ |z| < 1, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} + \frac{MR}{8I}(z - \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z}),\ |z| > 1; \end{cases} \tag{5}$$

$$H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{MR}{8I}(z - \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z}),\ |z| < 1, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} + A_1 - \frac{im}{2\pi R},\ |z| > 1; \end{cases}$$

Тут I – момент інерції поперечного перерізу балки,

$$A_1 = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t} + \frac{im}{4\pi R}. \tag{6}$$

Різниця переміщень країв деталей зображається через функції напружень так

$$2\mu\Big[(v_r + iv_\phi)^+ - (v_r + iv_\phi)^-\Big] = \kappa\Big(F^+(\sigma) - F^-(\sigma)\Big) - \Big(H^+(\sigma) - H^-(\sigma)\Big),\ \sigma \in \gamma. \tag{7}$$

Задовольняючи умову контакту (4) функціями напружень (5), приходимо до такого сингулярного інтегрального рівняння стосовно шуканої функції $f(t)$

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t) - \frac{\sigma}{t}\bar{f}(\bar{t})}{t - \sigma} dt - 2A_1 + \frac{4\mu}{\kappa + 1}\Big(\alpha + \beta\Big(\Big(\frac{\sigma}{e^{i\delta}}\Big)^2 + \Big(\frac{e^{i\delta}}{\sigma}\Big)^2\Big) -$$

$$-\frac{MR}{8I}\left(\sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} - 3\sigma - \frac{3}{\sigma}\right) = 0, \quad \sigma \in \gamma. \tag{8}$$

Формула обертання цього рівняння має вигляд

$$f(\sigma)-\bar{f}(\bar{\sigma})=2D+\frac{4\mu\beta}{\kappa+1}\left(\left(\frac{e^{i\delta}}{\sigma}\right)^2-\left(\frac{\sigma}{e^{i\delta}}\right)^2\right)+-\frac{MR}{8I}\left(\sigma^3-\frac{1}{\sigma^3}+3\sigma-\frac{3}{\sigma}\right), \qquad (9)$$

$$D=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)}{t}dt-A_1+\frac{2\mu\alpha}{\kappa+1}.$$

Тоді, врахувавши вираз $f(t)=\frac{1+ik}{t}\int\sigma_r(t)dt$, приходимо до рівняння для знаходження контактного напруження

$$\frac{1+ik}{t}\int\sigma_r(t)dt+(1+ik)t\int\frac{\sigma_r(t)}{t^2}dt=$$
$$=\frac{2D}{R}+\frac{4\mu\beta}{(\kappa+1)R}\left(\left(\frac{e^{i\delta}}{t}\right)^2-\left(\frac{t}{e^{i\delta}}\right)^2\right)+\frac{MR}{8I}\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3t-\frac{3}{t}\right). \qquad (10)$$

Розв'язок цього рівняння визначає шукане контактне напруження і пов'язану з ним функцію $f(t)$

$$\sigma_r(t)=\frac{D}{ikR}-\frac{6\mu\beta}{(\kappa+1)R}\left(\frac{e^{2i\delta}}{(2+ik)t^2}+\frac{t^2}{e^{2i\delta}(2-ik)}\right)+\frac{MR}{2I}\left(\frac{t^3}{3-ik}+\frac{1}{(3+ik)t^3}\right), \qquad (11)$$

$$f(t)=(1+ik)\left[\frac{4\mu}{\kappa+1}\left(\frac{\beta}{2}\left(\frac{3e^{2i\delta}}{(2+ik)t^2}-\frac{t^2}{e^{2i\delta}(2-ik)}\right)-\alpha\right)+\frac{MR}{4I}\left(\frac{t^3}{2(3-ik)}-\frac{1}{(3+ik)t^2}\right)\right].$$

Підставляючи (11) в (5), отримуємо вирази для функцій напружень, що розв'язує, в принципі, поставлену задачу.

На підставі отриманого розв'язку можна проаналізувати напружений стан вздовж лінії контакту

$$\sigma_r(\phi)=\frac{MR}{(9+k^2)I}(3\cos3\phi-k\sin3\phi)-\frac{4\mu}{\kappa+1}(\alpha+$$
$$+\frac{3\beta}{4+k^2}((2\cos2\delta+k\sin2\delta)\cos2\phi+(2\sin2\delta-k\cos2\delta)\sin2\phi)), \qquad (12)$$
$$\sigma_\phi(\phi)^+=\frac{MR}{(9+k^2)I}((3-2k^2)\cos3\phi-7k\sin3\phi)-$$
$$-\frac{4\mu}{\kappa+1}\Big(\alpha+\frac{3\beta}{4+k^2}((2(1-k^2)\cos2\delta+5k\sin2\delta)\cos2\phi+$$
$$+(2(1-k^2)\sin2\delta-5k\cos2\delta)\sin2\phi)\Big),$$
$$\sigma_\phi(\phi)^-=\frac{MR}{(9+k^2)I}((3+2k^2)\cos3\phi+5k\sin3\phi)+$$
$$+\frac{4\mu}{\kappa+1}\Big(\alpha-\frac{3\beta}{4+k^2}((2(1+k^2)\cos2\delta-3k\sin2\delta)\cos2\phi+$$
$$+(2(1+k^2)\sin2\delta+3k\cos2\delta)\sin2\phi)\Big).$$

Умова повного контакту $\sigma_r(\phi) \leqslant 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$. У випадку $\delta = 0$ (симетричне розміщення ядра) ця умова набуває вигляду

$$\frac{MR}{(9+k^2)I}(3\cos 3\phi - k\sin 3\phi) \leqslant \frac{4\mu}{\kappa+1}\left(\alpha + \frac{3\beta}{4+k^2}(2\cos 2\phi - k\sin 2\phi)\right) \tag{13}$$

Перевірку треба здійснювати в стаціонарних точках ϕ^*, які є розв'язками рівняння

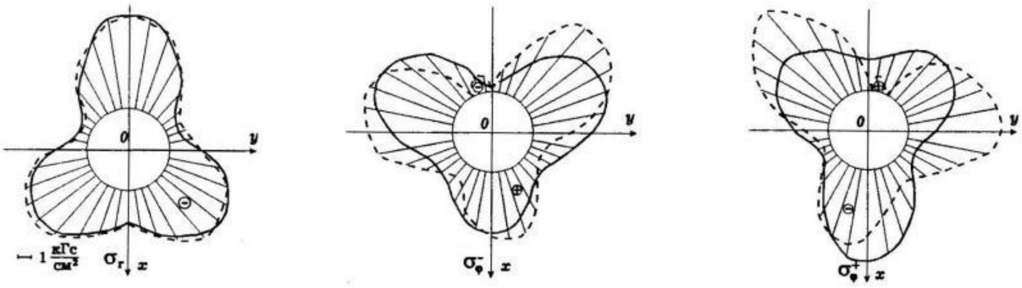
$$\frac{8\mu\beta}{(4+k^2)(\kappa+1)}(2\sin 2\phi + k\cos 2\phi) = \frac{MR}{(9+k^2)I}(3\sin 3\phi + k\cos 3\phi). \tag{14}$$

У випадку відсутності тертя ($k = 0$) стаціонарні точки шукаються за формулами

$$\phi^*_\pm = \arccos\left(\frac{2\mu\beta I}{MR(\kappa+1)}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{M^2R^2(\kappa+1)^2}{4\mu^2\beta^2 I^2}}\right)\right),$$

причому максимальне значення функції $\sigma_r(\phi)$ легко знайти шляхом порівняння значень цієї функції у точках ϕ^*_+ і ϕ^*_-.

Як приклад, розглянемо випадок симетричного розміщення диска відносно осей балки ($\delta = 0$). Пружні властивості матеріалу $\mu = 2 \times 10^6$ *кгс/см*^{2}, $k = 2$. Відношення згинаючого моменту, прикладеного до балки, до моменту інерції її поперечного перерізу $\dfrac{M}{I} = 18 \times 10^4$ *кгс/см*^{4}. Отвір у балці $R = 1$ см, півосі диска $a = 1,05$ см $b = 1,02$ см. При цих даних проведено аналіз напруженого стану вздовж лінії контакту, результати якого подані такими епюрами ($k = 0$ – суцільна лінія, $k = 0,5$ – штрихова лінія).



1. Гриліцький Д. В., Луцишин Р. М. Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов. – К., Вища школа, 1975.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.97

УДК 539.377

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

М. І. Бугрій

Bugriy M.I. The method of solving of axially-symmetric problems of optimization of the thermoelastic state of cylindric shells. Thermoelastic state of the thick-walled cylindric shells at their force loading and heating is considered. The mathematical formulation and the method of a solution of optimization problems are proposed. The energy functional of the shell elastic deformation is taken as the criterion of the optimization. The intensities of force loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. These functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type. The exact solution of optimization problem is built for the partial case of loading.

У даній праці зроблено математичну постановку і розглянуто схему розв'язування статичної задачі оптимізації про визначення осесиметричного температурного поля і поверхневого силового навантаження в скінченній циліндричній оболонці, які при певних умовах викликають оптимально низький рівень термопружного стану оболонки.

Нехай вільна на краях кругова ізотропна циліндрична оболонка сталої товщини $2h$, радіусом R, довжиною $2z_0$, віднесена до змішаної криволінійної системи координат (z, φ, γ) [1], перебуває під дією осесиметричного температурного поля $t(z, \gamma)$ і зовнішнього нормального поверхневого силового навантаження

$$f(z,\gamma) = \begin{cases} f_{3\gamma}^{(+)}(z), \ \gamma = h, \ -z_0 < z < z_0, \\ f_{3\gamma}^{(-)}(z), \ \gamma = -h, \ -z_0 < z < z_0. \end{cases} \tag{1}$$

Тоді у базові співвідношення для визначення відповідного осесиметричного термопружного стану оболонки входитимуть [2]:

співвідношення Коші

$$e_{zz}(z,\gamma) = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \ e_{\varphi\varphi}(z,\gamma) = \frac{u_\gamma}{R+\gamma}, \ e_{\gamma\gamma}(z,\gamma) = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma},$$
$$e_{z\gamma}(z,\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right), \ e_{z\varphi}(z,\gamma) \equiv 0, \ e_{\gamma\varphi}(z,\gamma) \equiv 0; \tag{2}$$

закон Гука в переміщеннях

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 73K40; Secondary 49R99.

$$\sigma_{zz}(z,\gamma) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\gamma z}(z,\gamma) = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right), \ \sigma_{\gamma\varphi}(z,\gamma) \equiv 0, \ \sigma_{z\varphi}(z,\gamma) \equiv 0; \tag{3}$$

рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{u_z}{R+\gamma}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{u_z}{(R+\gamma)^2}\right] = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\partial t}{\partial z}, \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \gamma} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial t}{\partial \gamma}$$

та рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{(R+\gamma)}\frac{\partial t}{\partial \gamma} + \frac{Q}{\lambda} = 0 \tag{5}$$

в області $(\Omega) = \{(z,\gamma) : -z_0 < z < z_0, -h < \gamma < h\}$, а також такі механічні

$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma(\pm z_0,\gamma)}{R+\gamma}\right) = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}t(\pm z_0,\gamma),$$
$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial u_z(z,\pm h)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma(z,\pm h)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h)}{\partial \gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h)}{\partial z} + \frac{u_\gamma(z,\pm h)}{R\pm h}\right) = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}t(z,\pm h) +$$
$$+ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}f_{3\gamma}^{(\mp)}(z) \tag{6}$$

та теплові

$$\left[\frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm H(t - t_\gamma^{(\pm)})\right]\Big|_{\gamma=\pm h} = 0, \quad \left[\frac{\partial t}{\partial z} \pm H(t - t_z^{(\pm)})\right]\Big|_{z=\pm z_0} = 0, \tag{7}$$

граничні умови на межі $\gamma = \pm h$, $z = \pm z_0$ області (Ω).

Тут G — модуль зсуву; E — модуль пружності; ν — коефіцієнт Пуассона; α_t — коефіцієнт лінійного теплового розширення; λ — коефіцієнт теплопровідності; H — відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхні оболонки; $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ — відмінні від нуля компоненти вектора переміщень; $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$ — інтенсивність зовнішнього силового навантаження на поверхнях $\gamma = \pm h$ оболонки; $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$ — температура зовнішнього середовища на межі області (Ω); $Q(z,\gamma)$ — питома густина розподілу внутрішніх джерел тепла в області оболонки; $e_{zz}(z,\gamma)$, $e_{\varphi\varphi}(z,\gamma)$, $e_{\gamma\gamma}(z,\gamma)$, $e_{z\gamma}(z,\gamma)$ і $\sigma_{zz}(z,\gamma)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma)$, $\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma)$, $\sigma_{z\gamma}(z,\gamma)$ — відмінні від нуля компоненти тензора деформацій і напружень відповідно.

Наведені вище співвідношення (2) – (7) дозволяють однозначно визначити температурне поле $t(z,\gamma)$ і відповідний термопружний стан оболонки при заданому зовнішньому тепловому і силовому навантаженні, тобто при заданих функціях $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$, $Q(z,\gamma)$, $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$. Якщо ж ці функції прийняти за функції керування термопружним станом оболонки, то ми приходимо до розгляду відповідних задач оптимізації, розв'язування яких, як відомо [1], пов'язане з вибором критерію оптимізації і конкретизацією множини допустимих функцій.

Обмежимося розглядом задачі оптимізації, коли на функції $Q(z,\gamma)$, $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$ не накладаються додаткові умови. У такому формулювання співвідношення (5),(7) можна розглядати, як формули для визначення цих функцій при відомій температурі $t(z,\gamma)$, а функціями керування в задачі оптимізації стають функції розподілу температури $t(z,\gamma)$ і інтенсивності зовнішнього силового навантаження $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$.

За критерій оптимізації приймемо функціонал енергії пружної деформації оболонки [1]

$$W[u_z,u_\gamma]=\frac{\pi}{E}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\sigma_{zz}^2+\sigma_{\varphi\varphi}^2+\sigma_{\gamma\gamma}^2-2\nu(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma}+\sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{zz})+\right.$$
$$\left.+2(1+\nu)\sigma_{\gamma z}^2\right](R+\gamma)\,dz\,d\gamma, \tag{8}$$

записаний через переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ за допомогою співвідношень (3).

Нехай функції керування термопружним станом оболонки задовольняють додаткові обмеження інтегрального типу

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z)P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+h)\,dz = B_m^{(1)},\ (m=\overline{0,m_0}),$$
$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z)P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)(R-h)\,dz = B_n^{(2)},\ (n=\overline{0,n_0}); \tag{9}$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h} t(z,\gamma)P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz = T_{kl},\quad (k=\overline{0,k_0}),\ (l=\overline{0,l_0}), \tag{10}$$

де $B_m^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, T_{kl} — задані параметри; $P_j(\cdot)$ — поліноми Лежандра.

Тепер задачу оптимізації термопружного стану оболонки сформулюємо так: серед функцій $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$, $t(z,\gamma)$, двічі неперервно диференційовних в області (Ω) і неперервно диференційовних на границі цієї області, знайти екстремалі функціоналу (8), які задовольняють умови (4),(6),(9),(10).

Сформульовану задачу на умовний екстремум розв'язуємо методами варіаційного числення з використанням множників Лагранжа [3]. Відшукання оптимальних розв'язків у цьому випадку зводиться до розв'язування двох незалежних задач

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial \gamma} + \frac{u_z^*}{R+\gamma}\right) + \frac{u_z^*}{(R+\gamma)^2}\right] = 0,\\
\frac{\partial^2 u_\gamma^*}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z \partial \gamma} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right) = 0, \qquad (11)\\
\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{R+\gamma}\right) = 0,\\
\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} = 0,\ \ \frac{\partial u_z^*(z,\pm h)}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma^*(z,\pm h)}{\partial z} = 0,\\
u_\gamma^*(z,h) + Z_m^{(1)*} P_m\left(\frac{z}{z_0}\right) = 0,\ \ (m = \overline{0,m_0}),\\
u_\gamma^*(z,-h) + Z_n^{(2)*} P_n\left(\frac{z}{z_0}\right) = 0,\ \ (n = \overline{0,n_0}), \qquad (12)\\
G\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u_\gamma^*(z,h)}{\partial \gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z^*(z,h)}{\partial z} + \frac{u_\gamma^*(z,h)}{(R+h)}\right)\right] P_m\left(\frac{z}{z_0}\right) dz =\\
= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R+h)} B_m^{(1)},\ \ (m = \overline{0,m_0}),\\
G\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u_\gamma^*(z,-h)}{\partial \gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z^*(z,-h)}{\partial z} + \frac{u_\gamma^*(z,-h)}{(R-h)}\right)\right] P_n\left(\frac{z}{z_0}\right) dz =\\
= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R-h)} B_n^{(2)},\ \ (n = \overline{0,n_0}); \qquad (13)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial \gamma} + \frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}\right) + \frac{3}{4}\left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial v_z^*}{\partial \gamma} + \frac{v_z^*}{R+\gamma}\right) + \right.\\
\left. + \frac{v_z^*}{(R+\gamma)^2}\right] = \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)}\Phi_{kl}^* P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)\frac{d}{dz}P_l\left(\frac{z}{z_0}\right),\\
\frac{\partial^2 v_\gamma^*}{\partial z^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z \partial \gamma} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial \gamma} + \frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}\right) = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\Phi_{kl}^* P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\frac{d}{d\gamma}P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right), \qquad (14)\\
\frac{\partial v_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{v_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{R+\gamma}\right) = \frac{(\pm 1)^l(1+\nu)}{2(1-2\nu)}\Phi_{kl}^* P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right),\\
\frac{\partial v_z^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial \gamma} + \frac{\partial v_\gamma^*(\pm z_0,\gamma)}{\partial z} = 0,\ \ \frac{\partial v_z^*(z,\pm h)}{\partial \gamma} + \frac{\partial v_\gamma^*(z,\pm h)}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial v_\gamma^*(z,\pm h)}{\partial \gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z^*(z,\pm h)}{\partial z} + \frac{v_\gamma^*(z,\pm h)}{R\pm h}\right) = \frac{(\pm 1)^k(1+\nu)}{2(1-2\nu)}\Phi_{kl}^* P_l\left(\frac{z}{z_0}\right), \qquad (15)
\end{gathered}
$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial v_z^*}{\partial z}+\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}+\Phi_{rs}^*P_r\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_s\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz=$$
$$=3\alpha_tT_{kl},\quad (k,r=\overline{0,k_0}),\ \ (l,s=\overline{0,l_0}) \tag{16}$$

стосовно множників Лагранжа $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, $Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$, Φ_{kl}^*, $(k=\overline{0,k_0})$, $(l=\overline{0,l_0})$ та допоміжних функцій $v_z^*(z,\gamma)$, $v_\gamma^*(z,\gamma)$, через які виражаються оптимальні переміщення

$$u_z(z,\gamma)=v_z^*(z,\gamma)+u_z^*(z,\gamma),\ \ u_\gamma(z,\gamma)=v_\gamma^*(z,\gamma)+u_\gamma^*(z,\gamma), \tag{17}$$

і температура

$$t(z,\gamma)=\frac{1}{3\alpha_t}\left[\frac{\partial v_z^*}{\partial z}+\frac{\partial v_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{v_\gamma^*}{R+\gamma}+\Phi_{kl}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]. \tag{18}$$

Зауважимо, що у співвідношеннях (12),(14),(15) за індексами k, l, m, n, а у співвідношенні (16) — за індексами r, s проводиться підсумовування.

Розв'язавши задачі (11) — (13), (14) — (16), знайдемо функції $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, $v_z^*(z,\gamma)$, $v_\gamma^*(z,\gamma)$. Із співвідношень (17),(18) визначаємо переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ і температуру $t(z,\gamma)$, із співвідношень (2),(3) — оптимальний термопружний стан оболонки, а із співвідношень (6) — відповідне йому оптимальне поверхневе силове навантаження оболонки. Крім того, використавши співвідношення (5), (7), знайдемо функції $Q(z,\gamma)$, $t_\gamma^{(\pm)}(z)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma)$, що характеризують умови нагріву оболонки, які відповідають оптимальному температурному полю $t(z,\gamma)$.

Зауважимо, що граничні задачі (11), (12) і (14), (15) за своєю структурою аналогічні осесиметричній граничній задачі термопружності в переміщеннях, розв'язок якої, як відомо, існує і він єдиний в класі гладких функцій. У цьому зв'язку легко показати [4], що існує єдиний розв'язок задачі оптимізації, яку розглядаємо, і цей розв'язок можна побудувати в замкненій формі. З цією метою розв'язок систем рівнянь (11), (14) стосовно функцій $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$ і $v_z^*(z,\gamma)$, $v_\gamma^*(z,\gamma)$ будемо шукати у вигляді

$$u_z^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}u_z^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{1,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!},$$
$$u_\gamma^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}u_\gamma^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{3,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!}; \tag{19}$$

$$v_z^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}v_z^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\psi_{1,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!},$$
$$v_\gamma^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}v_\gamma^{*(0)}(\xi,\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\psi_{3,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!}. \tag{20}$$

Тут $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $\psi_{1,s}(\gamma)$, $\psi_{3,s}(\gamma)$, $(s = \overline{1, i+1})$, – невідомі функції; $i = \max\{m_0, n_0\} - 1$, а m_0, n_0 вказують на кількість інтегральних обмежень (9) в задачі оптимізації;

$$u_z^{*(0)}(z,\gamma) = C_3^* - \frac{2\nu z}{1-\nu} C_1^*, \;\; u_\gamma^{*(0)}(z,\gamma) = (R+\gamma)C_1^* + \frac{C_2^*}{(R+\gamma)}, \tag{21}$$

$$v_z^{*(0)}(z,\gamma) = \tilde{C}_3^* + z\tilde{C}_1^*, \;\; v_\gamma^{*(0)}(z,\gamma) = (R+\gamma)\tilde{C}_1^* + \frac{\tilde{C}_2^*}{(R+\gamma)}, \tag{22}$$

де C_1^*, C_2^*, C_3^*, $\tilde{C}_1^*$, $\tilde{C}_2^*$, $\tilde{C}_3^*$ — довільні сталі.

Підставляючи вирази (19), (20) в рівняння (11), (14) відповідно, отримуємо дві системи звичайних диференціальних рівнянь щодо невідомих функцій $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $\psi_{1,s}(\gamma)$, $\psi_{3,s}(\gamma)$, $(s = \overline{1, i+1})$. Набір довільних сталих, що отримується при розв'язуванні цих систем, а також сукупність множників Лагранжа $Z_m^{(1)*}$, $(m = \overline{0, m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n = \overline{0, n_0})$, Φ_{kl}^*, $(k = \overline{0, k_0})$, $(l = \overline{0, l_0})$ дозволяють задовольнити граничні умови (12), (15), інтегральні умови (13) на поверхні оболонки, а також інтегральні умови (16) в області (Ω).

Запишемо загальний вигляд розв'язків систем (11), (14), наприклад, при $m_0 = n_0 = k_0 = 2$, $l_0 = 0$. У цьому випадку отримаємо, що

$$\begin{gathered}
u_z^*(z,\gamma) = C_1^* \left[\frac{2\nu}{1-\nu} \left(\frac{(z+z_0)^3}{3} - \frac{z(z+z_0)^2}{2} \right) - \frac{(z+z_0)(R+\gamma)^2}{2} - \right. \\
\left. - \frac{\nu z_0 (R+\gamma)^2}{1-2\nu} \right] + C_3^* \left[\frac{(z+z_0)^2}{2} - \frac{(1-\nu)(R+\gamma)^2}{2(1-2\nu)} \right] + \\
+ C_4^*(z+z_0) \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + (z+z_0)C_5^* - \frac{(R+\gamma)^2}{2(1-2\nu)} C_6^* + C_8^* \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + C_9^*, \\
u_\gamma^*(z,\gamma) = C_1^* \left[\frac{(R+\gamma)(z+z_0)^2}{2} + \frac{\nu(R+\gamma)^3}{8(1-\nu)} \right] + C_2^* \left[\frac{(z+z_0)^2}{2(R+\gamma)} - \right. \\
\left. - \frac{(1-2\nu)(R+\gamma)}{4(1-\nu)} \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) \right] - \frac{(R+\gamma)C_4^*}{4(1-\nu)} \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + \\
+ (z+z_0)(R+\gamma)C_6^* + \frac{z+z_0}{R+\gamma} C_7^* + (R+\gamma)C_{10}^* + \frac{C_{11}^*}{R+\gamma}; \\
v_z^*(z,\gamma) = \tilde{C}_1^* \left[\frac{z(z+z_0)^2}{2} - \frac{(z+z_0)^3}{3} + \frac{z_0(R+\gamma)^2}{3} - \frac{(z+z_0)(R+\gamma)^2}{2} \right] + \\
+ \tilde{C}_3^* \left[\frac{(z+z_0)^2}{2} - \frac{(R+\gamma)^2}{3} \right] + \tilde{C}_4^*(z+z_0) \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + (z+z_0)\tilde{C}_5^* - \\
- \frac{(R+\gamma)^2}{6} \tilde{C}_6^* + \tilde{C}_8^* \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + \tilde{C}_9^* + \frac{z(1+\nu)}{2(1-2\nu)} \Phi_{00}^*, \\
v_\gamma^*(z,\gamma) = \tilde{C}_1^* \left[\frac{(R+\gamma)(z+z_0)^2}{2} - \frac{(R+\gamma)^3}{16} \right] + \tilde{C}_2^* \left[\frac{(z+z_0)^2}{2(R+\gamma)} - \right. \\
\left. - \frac{3(R+\gamma)}{8} \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) \right] - \tilde{C}_4^* \frac{(R+\gamma)}{8} \ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) +
\end{gathered} \tag{23}$$

$$+(z+z_0)(R+\gamma)\tilde{C}_6^* + \frac{z+z_0}{R+\gamma}\tilde{C}_7^* + (R+\gamma)\tilde{C}_{10}^* +$$
$$+\frac{\tilde{C}_{11}^*}{R+\gamma} + \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)}\left[\left(\frac{(R+\gamma)^2}{3h} - \frac{R(R+\gamma)}{2h}\right)\Phi_{10}^* +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3(R+\gamma)^3}{8h^2} - \frac{R(R+\gamma)^2}{h^2} + \frac{(3R^2-h^2)(R+\gamma)}{4h^2}\right)\Phi_{20}^*\right]. \tag{24}$$

Використавши тепер (17), (18), знайдемо оптимальні переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$ і температуру

$$t(z,\gamma) = \frac{1}{3\alpha_t}\left\{\tilde{C}_1^*\left[\frac{(z+z_0)(3z+z_0)}{2} - \frac{3(R+\gamma)^2}{4}\right] - \tilde{C}_2^*\left[\frac{3}{4}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + \frac{3}{8}\right] +\right.$$
$$+(z+z_0)\tilde{C}_3^* + \tilde{C}_5^* + \tilde{C}_4^*\left[\frac{3}{4}\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) - \frac{1}{8}\right] + 2(z+z_0)\tilde{C}_6^* +$$
$$\left.+2\tilde{C}_{10}^* + \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^* + \frac{\gamma}{h}\Phi_{10}^* + \frac{3\gamma^2-h^2}{2h^2}\Phi_{20}^*\right]\right\}, \tag{25}$$

Оптимальний термопружний стан оболонки описується функціями (2), (3). Відповідне йому поверхневе силове навантаження визначаємо із співвідношення (6), згідно з яким

$$f_{3\gamma}^{(\mp)}(z) = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left[\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h)}{\partial\gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h)}{\partial z} + \frac{u_\gamma(z,\pm h)}{R\pm h}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t(z,\pm h).$$

Крім того, співвідношення (5),(7) дозволяють визначити умови нагріву оболонки, що відповідають оптимальному температурному полю (25), а саме, питому потужність внутрішніх джерел тепла

$$Q(z,\gamma) = -\frac{\lambda(1-\nu)}{2\alpha_t h(1-2\nu)(R+\gamma)}\left[\Phi_{10}^* + \frac{3(R+2\gamma)}{h}\Phi_{20}^*\right],$$

температуру зовнішнього середовища

$$t_\gamma^{(\pm)}(z) = \frac{1}{3\alpha_t}\left\{\tilde{C}_1^*\left[\frac{(z+z_0)(3z+z_0)}{2} - \frac{3(R\pm h)^2}{4} \mp \frac{3(R\pm h)}{2H}\right] -\right.$$
$$-\frac{3\tilde{C}_2^*}{4}\left[\ln\left(1\pm\frac{h}{R}\right) \pm \frac{1}{H(R\pm h)} + \frac{1}{2}\right] + (z+z_0)\tilde{C}_3^* + \tilde{C}_5^* +$$
$$+\frac{3\tilde{C}_4^*}{4}\left[\ln\left(1\pm\frac{h}{R}\right) \pm \frac{1}{H(R\pm h)} - \frac{1}{6}\right] + 2(z+z_0)\tilde{C}_6^* + 2\tilde{C}_{10}^* +$$
$$\left.+\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^* \pm \left(1+\frac{1}{Hh}\right)\Phi_{10}^* + \left(1+\frac{3}{RH}\right)\right]\right\};$$

$$t_z^{(+)}(\gamma) = \frac{1}{3\alpha_t}\left\{\tilde{C}_1^*\left[4z_0^2 + \frac{5z_0}{H} - \frac{3(R+\gamma)^2}{4}\right] - \frac{3\tilde{C}_2^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right) + \frac{1}{2}\right] +\right.$$

$$+\left(2z_0+\frac{1}{H}\right)\tilde{C}_3^*+\frac{3\tilde{C}_4^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)-\frac{1}{6}\right]+\tilde{C}_5^*+2\left(2z_0+\frac{1}{H}\right)\tilde{C}_6^*+$$
$$+2\tilde{C}_{10}^*+\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^*+\frac{\gamma}{h}\Phi_{10}^*+\frac{3\gamma^2-h^2}{2h^2}\Phi_{02}^*\right]\Bigg\},$$
$$t_z^{(-)}(\gamma)=\frac{1}{3\alpha_t}\Bigg\{\tilde{C}_1^*\left[\frac{z_0}{H}-\frac{3(R+\gamma)^2}{4}\right]-\frac{3\tilde{C}_2^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+\frac{1}{2}\right]-$$
$$-\frac{\tilde{C}_3^*}{H}+\frac{3\tilde{C}_4^*}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)-\frac{1}{6}\right]+\tilde{C}_5^*-\frac{2}{H}\tilde{C}_6^*+$$
$$+2\tilde{C}_{10}^*+\frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)}\left[\Phi_{00}^*+\frac{\gamma}{h}\Phi_{10}^*+\frac{3\gamma^2-h^2}{2h^2}\Phi_{02}^*\right]\Bigg\}.$$

на бічних поверхнях оболонки при $\gamma=\pm h$ і на краях оболонки при $z=\pm z_0$. При цьому довільні сталі $\tilde{C}_i^*$ та сталі множники Лагранжа Φ_{kl}^* однозначно визначаються з граничних умов (15) та інтегральних умов (16), якщо параметри T_{00}, T_{10}, T_{20} з (16) пов'язані співвідношеннями

$$T_{10}=\frac{h[(1+\nu)(10z_0^2+30R^2+7h^2)+3(1-\nu)(5R^2-h^2)]}{15R(1+\nu)(2z_0^2+3R^2+2h^2)}T_{00},$$
$$T_{20}=\frac{(1+\nu)(4z_0^2+4R^2+h^2)+6(1-\nu)R^2}{2(1+\nu)(2z_0^2+3R^2+2h^2)}T_{00}-\frac{3R}{h}T_{10},$$

а довільні сталі C_i^* та сталі множники Лагранжа $Z_m^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$ з точністю до крайових ефектів принципу Сен-Венана однозначно визначаються з граничних умов (12) та інтегральних умов (13). Якщо ж у співвідношеннях (13) покласти $m_0=n_0=1$, то запропонована вище методика дозволяє побудувати точний розв'язок задачі (11) – (13).

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К.: Наукова думка, 1979. – 364 с.
2. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наукова думка, 1978. – 320 с.
3. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980. – 285 с.
4. Бугрій М.І. *Оптимізація схем силового навантаження та нагріву товстостінних термопружних оболонок* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. – 1997. – Вип. 47. – С.102-106.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.97

УДК 539.3

ПРО ВРАХУВАННЯ ІНЕРЦІЇ ДЕФОРМАЦІЇ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ТЕРМОМЕХАНІЦІ

Т. С. Нагірний

Nagirny T.S. On the consideration of stress inertia in generalized thermomechanics. With use of methods of nonequilibrium thermodynamics and continuum mechanics the new approach to describe thermomechanic processes in solids is proposed. One takes into account the stress inertia. The energy of motion is defined in space of mechanical and thermal impulses. In the correspondence with it the equations of total energy and motion are modified. As an example the vibration of a layer is studied.

При розрахунку параметрів надійності, міцності та довговічності елементів конструкцій та приладів, що перебувають в умовах інтенсивного зовнішнього навантаження, важливого значення набувають питання адекватності відповідних математичних моделей. Такі моделі мають, зокрема, відображати характер навантаження і в тому випадку, коли воно носить швидкісний характер, повинні враховувати інерційність усіх форм руху, що розглядаються в моделі.

У даній праці, використовуючи методи термодинаміки нерівноважних процесів та механіки суцільного середовища, запропоновано підхід до врахування інерційності деформаційного, механічного поступального та теплового рухів.

Розглянемо деформівне тверде тіло, яке перебуває під дією силового навантаження в умовах теплообміну із зовнішнім середовищем. За визначальні приймаємо процеси деформування та теплопровідності. Означимо питому внутрішню енергію U у просторі базових параметрів стану, за які приймемо ентропію S та тензор деформації $\hat{e}$, а питому енергію руху K у просторі імпульсів механічного поступального $\vec{k}_v$ та деформаційного $\hat{k}_e$ рухів, а також імпульсу потоку ентропії $\vec{k}_s$ [1-5]

$$U = U(S, \hat{e}), \quad K = K(\vec{k}_v, \vec{k}_s, \hat{k}_e; U), \quad K(0,0,0;U) = 0. \tag{1}$$

Тут параметрична залежність K від U відображає положення про те, що рух розглядається на базі рівноважного стану.

За параметри, спряжені до $S, \hat{e}$, приймаємо абсолютну температуру T та тензор напруження Коші $\hat{\sigma}$, а за параметри, спряжені до імпульсів $\vec{k}_v, \vec{k}_s, \hat{k}_e$, - відповідно $\vec{v}$ - вектор швидкості, $\vec{j}_s$ - вектор потоку ентропії та $\hat{\varepsilon}$ - тензор швидкості деформації.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A10.

Робота виконана при частковій фінансовій підтримці ФФД ДКНТП України

Згідно з означенням (1) та вибором базових і спряжених параметрів для лінійної частини приростів dU, dK приймемо [3,5]

$$dU = TdS + \hat{\sigma} : d\hat{e}, \qquad dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v + \vec{j}_s \cdot d\vec{k}_s + \hat{\varepsilon} : d\hat{k}_e. \tag{2}$$

Наслідком (2) є рівняння ситуації у вигляді

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \hat{e}}, \qquad \vec{v} = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_v}, \quad \vec{j}_s = \frac{\partial K}{\partial \vec{k}_s}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\partial K}{\partial \hat{k}_e}. \tag{3}$$

Рівняння (3) при заданих енергіях U, K дають явний вираз залежності спряжених параметрів стану $T, \hat{\sigma}$ від базових $S, \hat{e}$ та потоків $\vec{v}, \vec{j}_s, \hat{\varepsilon}$ від імпульсів $\vec{k}_v, \vec{k}_s, \hat{k}_e$.

Співвідношенням

$$L = K - \vec{v} \cdot \vec{k}_v - \vec{j}_s \cdot \vec{k}_s - \hat{\varepsilon} : \hat{k}_e \tag{4}$$

введемо у розгляд енергію руху L, означену в просторі потоків

$$L = L(\vec{v}, \vec{j}_s, \hat{\varepsilon}; U), \qquad L(0,0,0;U) = 0. \tag{5}$$

Для лінійної частини її приросту відповідно до (2), (4) справедлива така диференціальна 1-форма

$$dL = -\vec{k}_v \cdot d\vec{v} - \vec{k}_s \cdot d\vec{j}_s - \hat{k}_e : d\hat{\varepsilon}. \tag{6}$$

При потенціальному описі наслідком (6) є такі визначальні рівняння для імпульсів:

$$\vec{k}_v = -\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \qquad \vec{k}_s = -\frac{\partial L}{\partial \vec{j}_s}, \qquad \hat{k}_e = -\frac{\partial L}{\partial \hat{\varepsilon}}. \tag{7}$$

Введення у вираз для приросту енергії руху dK доданку $\hat{\varepsilon} : d\hat{k}_e$ модифікує рівняння балансу енергії E ($E = K + U$). У локальній формі, в наближенні геометричної лінійності та при нехтуванні конвективною складовою похідної за часом τ, воно має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial K}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\hat{\sigma} + \frac{\partial \hat{k}_e}{\partial \tau} \right) \cdot \vec{v} - T\vec{j}_s \right]. \tag{8}$$

Тут $\vec{\nabla}$ - вектор-оператор Гамільтона.

Поряд з (8) термомеханічні процеси мають задовольняти рівнянню балансу ентропії

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \sigma_s, \tag{9}$$

де σ_s - виробництво ентропії, яке згідно з другим законом термодинаміки є невід'ємною величиною ($\sigma_s \geqslant 0$).

Враховуючи (2), (3), (9), рівняння (8) перетворюємо до вигляду

$$\left(\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \right) \cdot \vec{v} + \left(\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T \right) \cdot \vec{j}_s + T\sigma_s = 0. \tag{10}$$

За умови недисипативності механічного руху на підставі даного рівняння запишемо

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} - \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \hat{k}_e)}{\partial \tau} - \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \tag{11}$$

$$T\sigma_s = -\left(\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T\right) \cdot \vec{j}_s. \tag{12}$$

Якщо знехтувати імпульсом деформації ($\hat{k}_e = 0$), то рівняння (11) стає рівнянням балансу імпульсу механічного поступального руху класичної механіки деформівного твердого тіла.

Вираз для виробництва ентропії σ_s є базовим при формулюванні кінетичних рівнянь моделі. Якщо прийняти, що причиною виникнення термодинамічного потоку $\vec{j}_s$ є сила

$$-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \vec{\nabla} T\right),$$

то згідно з теорією Онзагера, в лінійному наближенні для ізотропного тіла, отримуємо рівняння

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \vec{k}_s}{\partial \tau} + \lambda_s \vec{j}_s + \frac{\vec{\nabla} T}{T} = 0, \tag{13}$$

(λ_s - кінетичний коефіцієнт), яке можна трактувати як рівняння балансу імпульсу потоку ентропії.

Якщо залежність між імпульсом $\vec{k}_s$ та вектором потоку ентропії $\vec{j}_s$ прийняти лінійною

$$\vec{k}_s = d_s \vec{j}_s, \tag{14}$$

то рівняння (13) набуває вигляду

$$\frac{d_s}{T}\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \tau} + b_s \vec{j}_s + \frac{\vec{\nabla} T}{T} = 0, \qquad b_s = \lambda_s + \frac{1}{T}\frac{\partial d_s}{\partial \tau}. \tag{15}$$

Зауважимо, що при $d_s = 0$ останнє рівняння є кінетичним рівнянням класичної термопружності.

Оскільки вектор потоку ентропії $\vec{j}_s$ пов'язаний з вектором теплового потоку $\vec{j}_q$ співвідношенням $\vec{j}_q = T\vec{j}_s$, то при

$$d_s = \frac{\tau_r T}{\lambda}, \qquad \lambda_s = \frac{1}{\lambda} \tag{16}$$

рівняння (15) можна перетворити до

$$\tau_r \frac{\partial \vec{j}_q}{\partial \tau} + \vec{j}_q + \lambda \vec{\nabla} T = 0, \tag{17}$$

де τ_r - час релаксації теплового потоку, який для металів має порядок $10^{-11}c$; λ - коефіцієнт теплопровідності. Рівняння (17) є одним з базових положень узагальненої термомеханіки [6-7] і носить назву узагальненого закону теплопровідності.

Дослідження змін, викликаних врахуванням інерції деформації при описі локальної ситуації порівняно з класичною моделлю термопружного тіла, проведемо за ізотермічних умов на прикладі пружного шару при динамічному навантаженні. У зв'язку з цим розглянемо шар (область $0 < x < l$) у прямокутній декартовій системі координат (x, y, z), поверхня $x = l$ якого нерухома, а на поверхні $x = 0$ задано перпендикулярні до неі переміщення за гармонічним законом з амплітудою u_a та частотою ω. Рівняння балансу механічних імпульсів (11) для лінійної залежності між $\hat{k}_e$ та $\hat{\varepsilon}$ набуває вигляду

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(u - d_e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{18}$$

де u - x-компонента вектора переміщення $\vec{u}$; c_1 - швидкість поздовжної хвилі у безмежному середовищі; d_e - стала матеріалу.

Для амплітуди $u(x)$ коливань шару $u(x,\tau) = u(x)\exp(i\omega\tau)$ з рівняння (18) та граничних умов

$$u(l,\tau) = 0, \qquad u(0,\tau) = u_a\exp(i\omega\tau)$$

отримуємо

$$u(x) = u_a\frac{\sin(k(l-x))}{\sin(kl)},$$

де $k^2 = \omega^2/(c_1^2 - d_e\omega^2)$. Бачимо, що врахування інерції деформації приводить до зміни власних частот ω_n коливань шару

$$\omega_n = \frac{\pi n c_1}{l}\left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}d_e\right)^{-1/2}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots .$$

З підвищенням порядку резонансу (значення n) вплив інерції деформації на власні частоти зростає. При цьому, при прямуванні n до безмежності ω_n прямує до величини $c_1/\sqrt{d_e}$, яка не залежить від товщини шару.

1. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.:Мир, 1973. - 280 с.
2. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. – М.:Мир, 1964. - 456 с.
3. Burak Ya., Nagirny T. *Mathematical modelling of the nonequilibrium processes in locally nonhomogeneous thermoelastic systems.* // Zeshutu naukowe politechniki Rzheshowskiej, Mechanika.-1996. -No.157, z.48, - P.21-28.
4. Burak Ya., Nagirny T. *Thermodynamical aspects of vibrational acceleration of nonequilibrium processes.* // XYI Symp. Vibration in Physical Systems, Poland, Poznan, 1994. Abstract.- P.26-28.
5. Бурак Я.И., Нагирный Т.С. *Математическое моделирование локально- градиентных процессов в инерционных термомеханических системах.* // Прикл. механика, 1992, т.28, N.12.-С.3-23.
6. Лыков А.И. Теория теплопроводности. - М.:Высшая школа, 1967.- 600 с.
7. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. - К.: Наукова думка, 1976.-312 с.

Стаття надійшла до редакції 12.05.1997

УДК 519.48

Тушницкий И.Я. Структура регулярных колец с конечным количеством максимальных идеалов//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.5–11.

В этой статье показано, что регулярное по Нейману дуокольцо с конечным числом максимальных идеалов является прямой суммой тел, причем количество тел в разложении кольца равно количеству максимальных идеалов даного кольца.
Библиогр. 8 назв.

УДК 517.535.4

Чижиков И.Э. Дефекты мероморфных в полуплоскости функций//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.12–16.

В данной работе построен пример мероморфной в полуплоскости $\{w : \mathrm{Im} w < 0\}$ функции произвольного положительного порядка по Цудзи, которая имеет заданные дефектные значения. Дефекты этой функции удовлетворяют условию $\delta^*(a_n, f) \geqslant \frac{\delta_n}{2}$, где последовательность $(\delta_n) : \sum_n \delta_n$ задана.
Библиогр. 2 назв.

УДК 517.524

Молнар Н.П., Манзий О.С. Разложение гипергеометрических функций Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в ветвящиеся цепные дроби//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.17–26.

Используя рекуррентные соотношения для гипергеометрических функций Лауричеллы $F_D^{(N)}$, построено разложение отношения этих функций в ветвящуюся цепную дробь. Исследуется сходимость полученного разложение с действительными параметрами.
Библиогр. 8 назв.

УДК 517.95

Олискевич М.А. Устойчивость решения смешанной задачи для системы с тремя независимыми переменными с периодическими краевыми условиями//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.27–34.

В работе рассматривается смешанная задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. С помощью вспомогательной параболической системы второго порядка получено существование решения. Доказана также теорема об устойчивости по Ляпунову стационарного решения начальной задачи.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.95

Бокало Н.М., Сикорский В.М. Задача без начальных условий для слабо нелинейных параболических уравнений, сильно вырождающихся в начальный момент времени //Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.35–43.

Изучаются слабо нелинейные параболические уравнения, которые заданы в неограниченных по пространственным переменным областях и сильно вырождаются в начальный момент времени. Для этих уравнений рассматриваются задачи без начальных условий со смешанными граничными условиями. Получены классы единственности обобщенных решений этих задач. Доказано существование обобщенных решений рассматриваемых задач в классах единственности, когда правые части принадлежат соответствующим классам функций.
Библиогр. 9 назв.

УДК 517.95

Колинько М. Е., Лавренюк С. П. Единственность решения одной нелинейной псевдопараболической системы//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.44–49.

В статье рассмотрена смешанная задача для одной нелинейной псевдопараболической системы с однородными краевыми условиями Дирихле. Задача изучается в ограниченной цилиндрической области. Получены некоторые достаточные условия существования обобщенного решения указанной задачи.
Библиогр. 9 назв.

УДК 517.956

Берегова Г.И. Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.50–59.

В прямоугольнике $P_T = \{(x,t) : 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассматривается обратная задача для строго гиперболического уравнения при неизвестной правой части. Дополнительная информация о решении задачи задается в интегральной форме. С помощью метода характеристик доказываются теоремы существования и единственности решения задачи для малых t.
Библиогр. 13 назв.

УДК 517.956.3

Говда Ю.И. Условия корректности некоторых краевых задач для одной системы уравнений гиперболического типа//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.60–67.

Рассмотрены некоторые краевые задачи для системы уравнений гиперболического типа, к которой может быть сведена система уравнений механики локально-градиентного упругого тела. Доказана теорема об однозначной разрешимости более общего операторного уравнения, на основании которой сформулированы условия корректности краевых задач для исходной системы уравнений.
Библиогр. 4 назв.

УДК 518:517.948

Дорошенко Н.В., Кичура С.М. Единственность решения осесимметричной задачи синтеза електронно-оптических систем//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.68–70.

В работе изучена обратная задача Дирихле для уравнения Лапласа с известной геометрией граничных поверхностей. К такой задаче сводится задача находжения оптимального распределения потенциалов на электродах, реализующих заданное розпределенте потенциала электростатического поля на оси симметрии.
Библиогр. 2 назв.

УДК 517.945

Березницкая И.Б., Дребот А.И., Иванчов Н.И., Макар Ю.Н. Обратная задача для уравнения теплопроводности с интегральным переопределением//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.71–79.

В работе рассмотрена обратная задача для уравнения теплопроводности с неизвестным зависящим от времени старшим коэффициентом. Условия переопределения заданы в виде линейной комбинации краевого условия и интеграла от решения.
Библиогр. 8 назв.

УДК 517.95

Ковальчук С. Н. Об обратных задачах для параболической системы дифференциальных уравнений //Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.80–87.

Рассматриваются обратные задачи для параболической системы дифференциальных уравнений. Неизвестные коэффициенты при старших производных в системе зависят только от времени. Устанавливаются условия существования и единственности решений этих задач.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.927.25+512.928.5

Головатый Ю.Д., Головач И.А. Об асимптотике глобальных собственных колебаний сильно неоднородной струны//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.88–99.

В работе изучаются спектральные свойства композитной струны с сильными возмущениями плотности. Как показано О.А. Олейник, такая колебательная система обладает *локальными собственными колебаниями*, которые сосредоточены вблизи области возмущения и отвечают бесконечно малым при $\varepsilon_k \to 0$ собственным частотам. Нами введено понятие *глобальных форм колебаний*, которые моделируются дискретными последовательностями собственных функций возмущенной задачи. Для таких колебаний построены и обоснованы полные асимптотические разложения по малому дискретному параметру $\varepsilon_k \to 0$.
Библиогр. 9 назв.

УДК 519.21

Елейко Я. И. Ассимптотические свойства Перронового корня семейства ветвящихся процессов//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.100–106.

В статье рассмотрено семейство ветвящихся процессов со счетным множеством типов, дискретным временем и преобразованиями, зависящими от возраста. Найдено ассимптотическое разложение Перронового корня.
Библиогр. 3 назв.

УДК 539.3

Онышкевич В.М., Яськевич И.Т., Новосад В.П. Левицкий (Баран) Василий Петрович : итог научной деятельности//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.107–113.

В.П.Левицкий работал доцентом кафедры механики Львовского государственного университета им. И. Франка. Его основные научные исследования посвящены контактным задачам теории упругости и термоупругости. В статье коротко описаны научные достижения В.П.Левицкого и приведен список его публикаций из 60 наименований.
Библиогр. 60 назв.

УДК 539.3
Банах И.Я. Построение решения задачи о напряженно-деформированном состоянии цилиндра при сложной нагрузке методом разложения по тензорным функциям//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.114–123.

Рассмотрена стационарная задача линейной теории упругости для сжатого по боковой поверхности прямого кругового цилиндра при общем воздействии сжимающих осевых нагрузок, изгиба и кручения. Вектор перемещения подается разложением по заданному базису тензорных функций возрастающего ранга. Тензорные коэффициенты разложения удовлетворяют систему линейных алгебраических уравнений. Получены тензоры деформации и напряжения в виде квадратических функций пространственных координат. Как частные случаи получены известные в литературе решения некоторых краевых задач.
Библиогр. 3 назв.

УДК 539.3

Луцишин Р.М. Об изгибе балки с эллиптической запрессовкой//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.124–127.

В работе решена задача об исследовании напряженно-деформированного состояния полосы (балки), нагруженной изгибающими моментами, в круговое отверстие которой запрессован эллиптический диск из того же материала, нагруженный крутящим моментом. Диск находится в предельном равновесном состоянии под действием крутящего момента и сил трения. Контакт диска и края отверстия предполагается полным. Задача сведена к определению функций напряжения и удобным для инженерного расчета формулам для анализа напряженного состояния вдоль линии контакта. Сформулированы условия полного контакта деталей конструкции.
Библиогр. 1 назв.

УДК 539.377
Бугрий Н.И. Об одном методе построения решений осесимметричных задач оптимизации термоупругого состояния цилиндрических оболочек//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.128–135.

Формулируется математическая постановка и предлагается методика решения задачи оптимизации термоупругого состояния толстостенных цилиндрических оболочек при их силовом нагружении и нагреве. В качестве критерия оптимизации принимается функционал энергии упругой деформации оболочки, а функций управления – интенсивность силовой нагрузки и температура. Функции управления удовлетворяют дополнительным интегральным ограничениям моментного типа. Для частного случая нагружения оболочки строится точное решение задачи оптимизации.
Библиогр. 4 назв.

УДК 539.3
Нагирный Т.С. Об учете инерции деформации в обобщенной термомеханике//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.— 1997.— Вып.48.— С.136–139.

С использованием методов неравновесной термодинамики и механики сплошной среды предложен подход к описанию термомеханических процессов в деформируемых телах с учетом инерции деформации. Энергия движения определена в пространстве механических и энтропийного импульсов. В соответствии с этим модифицированы уравнения полной энергии и движения. В качестве примера рассмотрено колебание упругого слоя.
Библиогр. 7 назв.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити нові результати автора з повним їх доведенням. Не рекомендується робити великі огляди вже опублікованих результатів. Посилання на неопубліковані роботи не допускаються.

2. Текст статті повинен бути підготовлений на комп'ютері українською або англійською мовами. До редакції подається:

– два екземпляри статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

– анотації англійською та російською мовами, які повинні містити прізвище автора та назву статті;

– електронний варіант статті та анотацій на дискеті 3,5", яка буде повернена автору (тексти можна надіслати за адресою *holovaty@yahoo.com*)

– довідка про автора (співавторів), в якій треба вказати ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Обсяг статті не повинен перевищувати 12 сторінок при розмірі шрифтів 12pt. На першій сторінці вказується номер УДК.

3. Вимоги до набору:

– текст статті створюється в одній з версій TEX'у (формати Plain-TEX, AMS-TEX чи LATEX). Рекомендуємо використовувати стильовий файл amsppt.sty; тексти, набрані в редакторах ChiWriter та Word не приймаються;

– номери формул ставляться з правого боку; нумерувати треба лише формули, на які є посилання;

– в посиланнях на теорему з монографії вказуєть сторінка, на якій вона знаходиться.

4. Рисунки до статті подаються у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунку чи його номер не входять у зображення і створюються засобами TEX'у. Реальний розмір графічного зображення вибирається з міркувань, що воно буде друкуватися на принтері з розділювальною здатністю 600 dpi.

5. Література подається загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті. Подаємо зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів і т. п.):

1. Грабович А.І. Назва. – К.: Наукова думка. 1985. – 306 с. *або*
   Грабович А.І. Назва: В 2-х т.– К.: Наукова думка, 1985.–Т.1.–306 с.
2. Кравчук О.М. *Назва*: // Мат. сб.–1985.–2, №2 2.–С.4–20.
3. Михайленко Г.Д. Назва.– М., 1993.– 9 с.– (Препринт/НАН Украіни. ІППММ; N80.1).
4. Коваленко О. В. Назва: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977, – 30 с.
5. Сенів С.М. *Назва.*–К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, №2020-1995.
6. Муравський В.К. *Назва* // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доповідей. (Київ, 27 сер.–2 вер. 1994 р.).– Київ, 1994.–С. 540–551.