УДК 315.6

ПРО ПРИВЕДЕНУ ГРУПУ УАЙТХЕДА ДЛЯ ТІЛ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Л.Л. Стахів

Stakhiv L.L. On the reduced Whithehead group for skew fields over pseudolocal fields. Let D be a finite dimensional skew field over a complete with respect to a discrete valuation field with a pseudofinite residue field. It is proved that the reduced Whithehead group $SK_1(D)$ is trivial.

Псевдолокальним полем ми називаємо повне стосовно дискретного нормування поле з псевдоскінченним [1] полем класів лишків.

Нехай K — псевдолокальне поле, k — поле класів лишків поля K, v — нормування поля K. Через O_K, P_K, U_K позначимо, відповідно, кільце цілих, ідеал нормування та групу одиниць поля K. Для скінченного розширення L/K поля K відповідні об'єкти поля L позначимо O_L, P_L, U_L. Якщо L/K — розширення Галуа, то $\mathrm{Gal}(L/K)$ означає його групу Галуа, l — поле класів лишків поля L. Через π (відповідно Π) позначаємо уніформізуючий елемент поля K (відповідно L). Для $a \in O_K$ (відповідно $a \in O_L$) через $\bar{a}$ позначимо $a(\bmod P_K)$ (відповідно $a(\bmod P_L)$).

Якщо $a \in L$, то $N_{L/K}(x)$ і $Tr_{L/K}(a)$ означають його норму і слід. Нехай D — скінченновимірне тіло над K . Якщо P — його максимальне підполе, то існує ізоморфізм

$$\varphi\colon D \otimes_K P \cong M_n(P).$$

Відображення $Nrd_{D/K}(x) = \det \varphi(x \otimes 1)$ називають редукованою нормою

$$D^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} SL_1(D) = \{x \in D^* \mid Nrd_{D/K}(x) = 1\}.$$

Нехай w — продовження нормування v до нормування тіла D. Тоді

$$O_D = \{x \in D \mid w(x) \geqslant 0\} \text{ — кільце цілих тіла } D,$$
$$B_D = \{x \in D \mid w(x) > 0\} \text{ — ідеал нормування } w.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 12E15, 20F36.

В.П. Платонов і В.І. Янчевський у праці [1] довели, що $D^{(1)} = [D^*, D^*]$ для скінченновимірних тіл D над повними дискретно нормованими полями з досконалими полями класів лишків когомологічної розмірності 1.

Мета цієї праці — одержати більш простий варіант доведення аналогічного результату для скінченновимірних тіл над псевдолокальними полями, використовуючи фільтрацію групи одиниць у підполях тіла D.

Теорема. *Якщо D — скінченновимірне тіло над псевдолокальним полем K, то*

$$SK_1(D) = SL_1(D)/[D^*, D^*] = 0.$$

Сформулюємо необхідні для доведення цієї теореми факти у вигляді декількох лем.

Лема 1. *Нехай D — скінченновимірне тіло над загальним локальним полем K [3]. Тоді:*
1) Існує максимальне нерозгалужене підполе L в D;
2) Індекс тіла D дорівнює його експоненті.

Доведення. 1) Відомо, що максимальні нерозгалужені підполя існують навіть у тілах над повними дискретними полями з досконалими полями класів лишків [3]. У випадку, коли поле лишків k — квазіскінченне, цей факт можна довести так. Оскільки група Бауера поля k дорівнює нулю [3], то тіло лишків $l = O_D/B_D$ є полем, $l = k(a)$ для деякого $a \in l$. Поле $L = K(b)$, де $b \in D$, $\bar{b} = a$, є максимальним нерозгалуженим підполем тіла D.

2) Припустимо, що індекс тіла D дорівнює n. Тоді $[L : K] = n$, де L максимальне нерозгалужене підполе тіла D. Нехай σ — твірна групи $\mathrm{Gal}(l/k) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$. За теоремою Сколема-Нетер автоморфізм σ продовжується до внутрішнього автоморфізму тіла D, тобто існує $g \in D$ такий, що $\sigma(x) = gxg^{-1}$ для будь-якого $x \in D$. Нехай w — нормування тіла D, що продовжує v і $w(g) = m/n$. Тоді при ізоморфізмі $inv_K\colon \mathrm{Br}\, K \to Q/Z$ [5] тіло D переходить у елемент $m/n(\mod Z)$. Справді, нехай Π — уніформізуючий елемент тіла D. Розглянемо автоморфізм $x \mapsto \Pi x \Pi^{-1}$ тіла D. Він індукує ізоморфізм максимальних нерозгалужених полів, а отже, автоморфізм σ_Π поля лишків l тіла D. Легко бачити, що кожен автоморфізм поля лишків є степенем автоморфізму σ_Π, бо внутрішній автоморфізм $\Pi^m ux(\Pi^m u)^{-1}$ алгебри D індукує автоморфізм σ_Π^m поля лишків (тут використовуємо той факт, що за теоремою Сколема-Нетер кожний автоморфізм поля лишків продовжується до деякого внутрішнього автоморфізму тіла D). Тому σ_Π є твірною циклічної групи $\mathrm{Gal}(l/k)$. Але σ теж є твірною цієї групи. Звідси маємо $(m, n) = 1$, що означає, що індекс тіла D збігається з його експонентою.

Лема 2. *[4] Нехай L — нерозгалужене розширення загального локального поля K. Тоді $U_K = N_{L/K}(U_L)$.*

Доведення. Для зручності читача і, враховуючи, що книга [4] не є легкодоступною, наведемо доведення цього твердження за Артіном-Тейтом [4].

Розглянемо канонічні фільтрації груп одиниць:

$$U_K = U_K^{(0)}, \quad U_K^{(i)} = 1 + P_K^i, \quad U_L^{(i)} = 1 + P_L^i \text{ для } i \geqslant 1.$$

Маємо

$$U_K/U_K^{(1)} \simeq k^*, \quad U_K^{(i)}/U_K^{(i+1)} \simeq k^+, \quad i \geqslant 1, \tag{1}$$

де перший ізоморфізм індукований редукцією за модулем $P_K\colon a \mapsto a \pmod{P}_K$, а другий визначений за допомогою співставлення $1 + \pi^i a \mapsto a \pmod{P}_K$.

Аналогічно для поля L:

$$U_L/U_L^{(1)} \simeq l^*, \quad U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)} \simeq l^+, \quad i \geqslant 1. \tag{2}$$

Оскільки L/K — нерозгалужене розширення, то π є уніформізуючим елементом в L. Якщо $a \in U_L$, то

$$\overline{N_{L/K}(a)} = \overline{\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(a)} = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(l/k)} \tau(\overline{a}) = N_{l/k}(\overline{a}).$$

Отже, $N_{L/K}$ індукує гомоморфізм $U_L/U_L^{(1)} \mapsto U_K/U_K^{(1)}$, який при ізоморфізмі (1) переходить у $N_{l/k}$. Для будь-яких $i \geqslant 1$ і $a \in O_L$:

$$N_{L/K}(1 + \pi^i a) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(1 + \pi^i a) = 1 + \pi^i \operatorname{Tr}_{L/K} a \pmod{P_L^{(i+1)}}. \tag{3}$$

Звідси випливає, що $N_{L/K}$ індукує гомоморфізми $U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)} \mapsto U_K^{(i)}/U_K^{(i+1)}$, які при ізоморфізмі (2) переходять у слід $\mathrm{Tr}_{l/k}$.

Нехай $u \in U_K$. Для $\overline{u}(\mod P_K)$ виберемо $c_0 \in U_L$ так, щоб $\overline{N(c_0)} = \overline{u}$. Це можливо, оскільки гомоморфізм $N_{l/k}\colon l^* \to k^*$ сюр'єктивний [3]. Позначимо $u_0 = N(c_0)$. Розглянемо

$$u_1 = u/u_0 = 1 + \pi a \in U_K^{(1)}.$$

Знайдемо $c_1 = 1 + \pi\alpha_1 \in U_L^{(1)}$ (де $\alpha_1 \in O_L$) за рахунок вибору α_1 так, щоб

$$N(c_1) \equiv u_1 \pmod{\pi^2}.$$

Оскільки

$$N(c_1) \equiv (1 + \pi \operatorname{Tr} \alpha_1) \pmod{\pi^2},$$

і слід сюр'єктивний [3], то такий вибір елемента α_1 можливий.

Припустимо, що ми знайшли $u_i \in U_K^{(i)}$ і $c_i \in U_L^{(i)}$ такі, що $u_i = u_{i-1}/N(c_{i-1})$, $N(c_i) \equiv u_i \pmod{\pi^{i+1}}$ для всіх $i < n$. Повторюючи міркування, за допомогою яких ми одержали c_1 і u_1, знаходимо $c_n = 1 + \pi^n \alpha_n$ за рахунок вибору α_n так, що $u_n = u_{n-1}/N(c_{n-1})$.

Розглянемо тепер послідовність $N(c_0), \ldots, N(c_0 \ldots c_n), \ldots$. Вона фундаментальна, а тому збігається до деякого елемента $N(c) \in K$. Переходячи до границі в рівності $u = u_{n+1}N(c_0 \ldots c_n)$ отримаємо $u = N(c)$.

Лема 3. *Нехай L/K — розширення з індексом галуження e. Тоді $N_{L/K}(U_L^{(i)}) \subset U_K^{(j)}$ для будь-якого цілого $i \geqslant 1$, де j — мінімальне з цілих чисел, не менших ніж i/e.*

Доведення цієї леми, яке можна знайти, наприклад, у [5] для випадку локальних полів, дослівно переноситься і на випадок псевдолокальних полів.

Лема 4. *Нехай l/k скінченне розширення псевдоскінченного поля k. Якщо $N_{l/k}(a) = 1$ для $a \in l$, то існує $b \in l$, $N_{l/k}(b) = 1$ таке, що $l = k(ab)$.*

Доведення. Якщо k — скінченне поле, то твердження леми справедливе (див. наприклад [5, ст. 42]). Покажемо, що його можна сформулювати на мові логіки першого порядку.

Нехай l —будь-яке скінченне розширення поля k степеня n. Нехай $e_1 \dots e_n$ — будь-яка база l/k. Кожний елемент $a \in l$ записується у вигляді $a_1e_1 + \dots + a_ne_n$, а елемент a' поля l запишемо у вигляді $a'_1e_1 + \dots + a'_ne_n$, де $a_i, a'_i \in k$. Елементи $c \in k$ ми ототожнюємо з елементами виду $ce_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n$. Додавання елементів a і a' визначається очевидно, а для множення маємо:

$$aa' = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \sum_{j=1}^{n} a'_je_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_ia'_je_ie_j = \sum_{i,l=1}^{n} a_ia'_j \sum_{k=1}^{n} y_{ij}^k e_k = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_ia'_jy_{ji}^k e_k.$$

Оскільки l — розширення поля k, то дані операції додавання і множення повинні задовольняти всі аксіоми поля. Записавши аксіоми поля, ми одержимо деякі співвідношення між y_{ij}^k. Кон'юнкцію всіх цих співвідношень позначимо через $D_n(\overline{y})$ ($D_n(\overline{y})$ — предикат від n^3 змінних, що описує скінченні розширення степеня n поля k). Тоді $\forall\overline{y}D(\overline{y})$ — означає "для кожного розширення поля степеня n". Кожен елемент з поля l ототожнюється з набором $a_1, \dots, a_n$. Легко зрозуміти, що норма $N(a)$ є визначником матриці регулярного відображення, яке елемент x переводить в ax. Цей визначник є деяким многочленом від y_{ij}^k та $a_1, \dots, a_n$. Тому вираз $N(a) = 1$ є предикатом від $a_1, \dots, a_n$ та y_{ij}^k. Приєднання елемента $d = ab$ до поля k дає поле l, якщо елементи 1, ab, $(ab)^2, \dots, (ab)^{n-1}$ лінійно незалежні над k. Лінійна незалежність означає, що визначник матриці, рядками якої є координати елементів $1, ab, \dots, (ab)^{n-1}$ в базі $e_1, \dots, e_n$, відмінний від 0. Цей визначник є многочленом від координат $a_1, \dots, a_n$ елемента a, координат $b_1, \dots, b_n$ елемента b та структурних констант y_{ij}^k. Позначимо цей многочлен $F(\overline{y}, \overline{a}, \overline{b})$. Тоді твердження леми можна записати у вигляді елементарного висловлення:

$$\forall\overline{y}\forall\overline{a}\left[[D(\overline{y}) \wedge N(\overline{a}) = 1] \to [\exists\overline{b}(N(\overline{b}) = 1) \wedge (F(\overline{y}, \overline{a}, \overline{b}) \neq 0)]\right].$$

Оскільки це висловлення вірне для всіх скінченних полів, то за [1] воно справедливе і для псевдоскінченних полів.

Доведення наступної леми, яке можна знайти в [5], не використовує специфіку поля лишків поля L.

Лема 5. *Нехай L — максимальне нерозгалужене підполе тіла D, $L^1 = L \cap D^{(1)}$. Кожний елемент з L^1 є комутатором елементів з D^*.*

Тепер ми можемо довести теорему, використовуючи ті ж міркування, що і в класичному випадку [5]. Щоб звернути увагу на місця, де потрібно модифікувати класичне доведення, тобто застосувати леми 1-4, відтворимо ці міркування. Очевидно, досить довести включення $D^{(1)} \subset [D^*, D^*]$.

Нехай $x \in D^{(1)}$, тоді $\overline{x}$ лежить в групі $l^{(1)} = \{a \in l^* \mid N_{l/k}(a) = 1\}$. Справді, x можна подати у вигляді $x = ab$, де $a \in U_L$, $b \in 1 + B_D$. Тоді $\overline{x} = \overline{a}$. З іншого боку,

$$N_{L/K}(a) = Nrd_{D/K}(a) = Nrd_{D/K}(b^{-1}) = N_{M/K}(b)^{-1}$$

для максимального підполя $M \subset D$ такого, що $b \in M$. Але

$$b \in (1 + B_D) \cap M = 1 + B_M,$$

тому, згідно з лемою 3,

$$N_{M/K}(b^{-1}) \in 1 + P_K,$$

де P_K — ідеал нормування в K. Тому

$$N_{l/k}(\overline{a}) = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi^i(\overline{a}) = \overline{\prod_{i=0}^{n-1} \varphi^i(a)} = \overline{N_{L/K}(a)} = 1,$$

де φ — твірна групи $\mathrm{Gal}(l/k)$. За лемою 4 існує $z \in l^{(1)}$ такий, що $l = k(\overline{x}z)$. А за теоремою Гільберта 90 $z = \varphi(s)/s$ для деякого $s \in l^*$, де φ — твірна групи $\mathrm{Gal}(l/k)$. Тоді, якщо $u \in U_L$ має властивість $\overline{u} = s$, то $y = \varphi(u)/u$ і $z = \overline{y}$. Зауважимо, що розширення $R = K(xy)$ є максимальним нерозгалуженим підполем в D, бо

$$n \geqslant [R : K] \geqslant [k(\overline{xy}) : k] = [l : k] = n.$$

Звідси

$$[R : K] = [k(\overline{xy}) : k] = n.$$

Таким чином, $[R : K] = [L : K]$ і за теоремою Сколема-Нетер $R = sLs^{-1}$ для деякого $s \in D^*$.

Враховуючи що $N_{L/K}(L^*) = UK^{*n}$ (лема 2) і те, що $(v(Nrd_{D/K}(g)), n) = 1$, як це випливає з доведення леми 1, ми бачимо, що існують $i \in Z$ і $c \in L$ такі, що

$$Nrd_{D/K}(s) = Nrd_{D/K}(g^i c).$$

Поклавши $t = s(g^i c)^{-1}$, отримаємо за вибором g (див. лему 1)

$$R = tg^i cLc^{-1} g^{-i} t^{-1} = tLt^{-1},$$

$Nrd_{D/K}(t) = 1$ і $x \in Ry^{-1} \subset t^{-1}L^{(1)}tL^{(1)}$. Звідси $x = t^{-1}atb$ для $a, b \in L^{(1)}$. Використовуючи лему 5, маємо $x = t^{-1}ata^{-1}(ab) = (t^{-1}ata^{-1})(c^{-1}d^{-1}cd)$ для деяких $c, d \in D^*$.

Наслідок. *Нехай D — скінченновимірне тіло над псевдолокальним полем K. Тоді кожний елемент тіла D, що має приведену норму 1, є добутком не більше двох комутаторів.*

1. Ax J. *The elementary theory of finite field*// Ann. Math. – 1968, – Vol.88, N 2. – P.239-271.
2. Платонов В.П., Янчевский В.I. *О гипотезе Хардера* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т.221, N 4. – С.784-787.
3. Serre J.P. Corps locaux. – Paris, Hermann, – 1962.
4. Artin E., Tate J. Class field theory. – Harvard. – 1961.
5. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические групы и теория чисел. – М., Наука. – 1991.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.1997