УДК 512.552.12

МІНІМАЛЬНІ ЦІЛКОМ ПРОСТІ ІДЕАЛИ ДУО-КІЛЕЦЬ БЕЗУ

А.І.Гаталевич

Gatalevich A.I. On minimal completely prime ideals of Bezout duo rings. Throughout, rings are duo rings with unit: every right ideal is a left ideal and conversely. We study the minimal completely prime spectrum of ring R, in order to obtain information about $Q_{Cl}(R)$, the classical ring of quotients of R. We prove that every Bezout ring with a finite number of minimal completely prime ideals is an elementary divisor ring if and only if for every completely prime ideal P factor ring R/P is an elementary divisor ring.

Дослідження спектру комутативних кілець проводилося багатьма авторами, зокрема, Джерісоном і Хенріксеном [1], Матлісом [2], Хатсоном [3] й іншими. У цій праці вивчено мінімальні цілком прості ідеали дуо-кільця з метою одержання інформації про його класичне кільце дробів і для описання властивостей цього кільця. Зокрема, досліджено вплив спектру дуо-кілець Безу на можливість діагональної редукції матриць. Один з результатів встановлює, що дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли всі фактор-кільця за цілком простими ідеалами є кільцями елементарних дільників.

Всі розглянуті кільця є асоціативними з одиницею ($1 \neq 0$). Кільце R називається правим кільцем Безу, якщо довільний скінченно-породжений правий ідеал R є головним. Скажемо, що дві матриці A і B над кільцем R є еквівалентними, якщо існують такі зворотні матриці P і Q над кільцем R відповідних розмірів, що $B = PAQ$. Матриця A володіє діагональною редукцією, якщо вона еквівалентна діагональній матриці $diag(d_{11}, d_{22}, \dots)$, з властивістю $Rd_{i+1,i+1}R \subseteq d_{i,i}R \cap Rd_{i,i}$ (під діагональною матрицею розуміємо прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі). Якщо довільні (1×2) і (2×1) матриці над R володіють діагональною редукцією, тоді кільце R називають відповідно лівим, чи правим кільцем Ерміта. Ліве і праве кільце Ерміта називається кільцем Ерміта. Якщо над кільцем R довільна матриця володіє діагональною редукцією, то R називається кільцем елементарних дільників. Очевидно, що кільце елементарних дільників є кільцем Ерміта, яке, в свою чергу, є кільцем Безу.

Дуо-кільцем називається кільце, в якому будь-який правий, чи лівий ідеал є двобічним. Кільце називається правим кільцем Голді, якщо воно задовольняє умовам максимальності дляануляторних правих ідеалів і прямих сум правих ідеалів [4]. Кільце R називається регулярним, якщо для довільного $a \in R$ існує таке $x \in R$, що $axa = a$. Регулярне кільце є кільцем Безу і в комутативному випадку є кільцем елементарних дільників [5]. Регулярне дуо-кільце називається абелево регулярним. Кільце називається редукованим, якщо в ньому немає ненульових нільпотентних елементів.

Кільце R називається кільцем нормування, якщо для довільних елементів $a, b \in R$: $RaR \subseteq Rb \cap bR$, або $RbR \subseteq Ra \cap aR$ [6].

Кільце R назвемо адекватним справа в нулі, якщо R – кільце Безу і для будь-яких $a, b \in R$ існують такі $r, s \in R$, що

1) $a = rs$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

2) $rR + bR = R$;

3) для довільного незворотного лівого дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ – властивий (слід зауважити, що елемент a може бути, зокрема, і нулем).

Комутативні адекватні кільця вивчались Гілманом і Хенріксоном [5], Капланським [6], Хелмером [7], Ларсеном, Левісом, Шоресом [8], Комарницьким [9, 10], Забавським [10].

Двобічний ідеал I кільця R називається цілком простим, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з того, що $ab \in I$ завжди випливає, що $a \in I$ або $b \in I$ [11].

Цілком простий ідеал I кільця R називається мінімальним, якщо довільний ідеал P такий, що $P \subset I$ не є цілком простим.

Використовуватимемо такі позначення: $\min R$ – множина всіх цілком простих ідеалів; $U(R)$ – група одиниць; $Q_{Cl}(R)$ – класичне кільце дробів; $N(R)$ – первинний радикал кільця R. Через $Ann^r_R X (Ann^l_R X)$ позначатимемо відповідно правий і лівий анулятори множини X.

Твердження 1. *Нехай R – редуковане дуо-кільце, і $\{P_\alpha\}$ – множина всіх його мінімальних цілком простих ідеалів. Тоді:*

1) R_{P_α} – тіло дробів кільця R/P_α;

2) $\cup_\alpha P_\alpha$ – множина всіх дільників нуля R.

Доведення. 1) Нехай $O_\alpha = \{r \in R | ur = 0$ для деякого $u \in R - P_\alpha\}$. Тоді O_α – ідеал кільця і $O_\alpha \subset P_\alpha$. Оскільки $P_\alpha R_{P_\alpha}$ – єдиний цілком простий ідеал кільця R_{P_α}, то кожний елемент ідеала $P_\alpha R_{P_\alpha}$ є нільпотентним. Для кожного $p \in P_\alpha$, існують такі $u \in R - P_\alpha, n > 0$, що $up^n = 0$. З низки рівностей $(up)^n = upup \dots up = upp \dots p\bar{u} = up^n\bar{u}$ випливає, що $(up)^n = 0$, а тому $up = 0$. Звідси $O_\alpha = P_\alpha$ і $P_\alpha R_{P_\alpha} = 0$. Тому R_{P_α} є тілом дробів кільця R/P_α.

2) З щойно наведених міркувань і рівності $O_\alpha = P_\alpha$ випливає, що кожний елемент множини $\cup_\alpha P_\alpha$ є дільником нуля. Навпаки, нехай $x \in R, x \neq 0$ – дільник нуля. Тоді існує $y \in R, y \neq 0$, для якого $xy = 0$. Оскільки $\cap_\alpha P_\alpha = 0$, то знайдеться ідеал P_β, який не містить y. Отже, $x \in P_\beta$. Твердження доведене.

Твердження 2. *Нехай R – редуковане дуо-кільце. Тоді справедливі твердження:*

1) Цілком простий правий ідеал P кільця R є мінімальним тоді і тільки тоді, коли для довільного $x \in P : Ann^r_R x \not\subset P$.

2) Скінченно-породжений правий ідеал J кільця R міститься в мінімальному цілком простому ідеалі тоді і тільки тоді, коли $Ann^r_R J \neq 0$.

3) Якщо $x \in R$ і $y \in Ann^l_R x$, то $Ann^r_R(xR + yR) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x - y$ не є дільником нуля.

Доведення. 1) Оскільки P – мінімальний цілком простий ідеал кільця R і $x \in P$, то з твердження 1 випливає існування такого $u \in R - P$, що $ux = 0$, або $x\bar{u} = 0$, де u задовольняє умову $ux = x\bar{u}$. Навпаки, припустимо, що для будь-якого $x \in P$ виконується $Ann^r_R x \not\subset P$. Нехай існує такий цілком простий ідеал P_1 кільця R, що $P_1 \subsetneq P$. Тоді можна знайти елемент $x \in P - P_1$, для якого $Ann^r_R x \subset P_1 \subset P$. Отримана суперечність показує, що P – мінімальний.

2) Нехай $J = a_1R + \dots + a_nR = Ra_1 + \dots + Ra_n$ – скінченнопороджений правий ідеал кільця R, а $I = Ann^r_R J$. Нехай $J \subset P$. Тоді існують такі елементи $u_i \in R - P$, що $a_iu_i = 0, i = 1, \dots, n$. Нехай $u = u_1u_2 \dots u_n, u \notin P$. Якщо $r \in J$, то $r = r_1a_1 + \dots + r_na_n$. Звідси

$$ru = r_1a_1u_1u_2 \dots u_n + r_2a_2u_2u'_1u_3 \dots u_n + \dots + r_na_nu_n\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} = 0,$$

де $u'_1, \dots, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}$ такі елементи, що $u_1u_2 \dots u_n = u_2u'_1u_3 \dots u_n = u_n\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} = 0$ (вони існують, оскільки R – дуо-кільце). Цим встановлено, що $u \in I$.

Навпаки припустимо, що $I \neq 0$. Тоді існує мінімальний цілком простий ідеал P, для якого $I \not\subset P$. Тепер з п.1) випливає, що $J \subset P$.

3) Нехай $Ann^r_R(xR + yR) = 0$ і $(x - y)t = 0$ для деякого $t \in R$. Тоді $xt = yt, ytx = yty$. Але $ytx = yxt' = 0$, де елемент t' існує, оскільки R – дуо-кільце. Звідси $yty = ytyt =$

$(yt)^2 = (xt)^2 = 0$. Оскільки R – редуковане, то $yt = xt = 0$. Отже, $t \in Ann^r_R(Rx + Ry) = Ann^r_R(xR + yR) = 0$. Таким чином, $x - y$ не є дільником нуля. Навпаки, нехай $t \in Ann^r_R(xR + yR)$. Тоді $(x - y)t = 0, xt = yt$, $yxt = y^2t = 0$, а отже $t = 0$. Твердження доведене.

Твердження 3. *Дуо-кільце R є регулярним тоді і тільки тоді, коли воно редуковане і кожний цілком простий ідеал є мінімальним.*

Доведення. Розглянемо регулярне кільце R і його ідеал I. Якщо $x \in R$ такий, що $x^n \in I, n > 0$, то $xR = eR$, де e – ідемпотент. Звідси $e = xm, e = e^n = (xm)^n = x^n\bar{m}$. Тому $e \in I$ і $x \in I$. Взявши $I = 0$, отримуємо, що R – редуковане кільце. Якщо $I = P$ – цілком простий ідеал, то $1 - e \in Ann^r_Rx$, $1 - e \notin P$, і твердження 2 показує, що ідеал P – мінімальний. Навпаки, нехай R – редуковане кільце і кожний цілком простий правий ідеал є мінімальним. Нехай $x \in R, x \neq 0, I = Ann^r_Rx$. Тоді $xR \cap I = 0$ і ідеал $xR + I$ не міститься в жодному мінімальному цілком простому правому ідеалі. Тому $xR + I = R$, тобто $R = xR \oplus I$. Отже, R – регулярне кільце. Твердження доведене.

Твердження 4. *Нехай R – редуковане дуо-кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) $Q_{Cl}(R)$ – регулярне;

2) Якщо довільний правий ідеал кільця R міститься в об'єднанні мінімальних цілком простих ідеалів, то він міститься в одному з них;

3) Якщо J – скінченно-породжений правий ідеал кільця R, то існують такі $b \in J, a \in Ann^l_RJ$, що $a + b$ не є дільником нуля;

4) Якщо $b \in R$, то існує $a \in Ann^l_R$ такий, що $Ann^r_R(Ra + Rb) = 0$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) Нехай $I \subset \cup_\alpha P_\alpha$. Тоді (див. твердження 1) кожний елемент множини I є дільником нуля. Отже, $IQ_{Cl}(R) \neq Q_{Cl}(R)$, $iIQ_{Cl}(R) \subset \mathcal{P}$, де $\mathcal{P}$ – максимальний правий ідеал кільця $Q_{Cl}(R)$ і $I \subset \mathcal{P} \cap R$. З твердження 3 випливає, що $\mathcal{P}$ – мінімальний цілком простий ідеал кільця $Q_{Cl}(R)$. Звідси маємо, що $\mathcal{P} \cap R$ – мінімальний цілком простий ідеал кільця R.

2) $\Rightarrow$ 3) Нехай $J = b_1R + \cdots + b_nR, I = Ann^r_RJ$. Припустимо, що не існує таких елементів $b \in J, a \in I$, щоб $a + b$ – не був дільником нуля. Тоді $I + J \subset \cup_\alpha P_\alpha$, де P_α – мінімальні цілком прості ідеали. Далі виберемо мінімальний цілком простий ідеал P, для якого $I + J \subset P$. Згідно з твердженням 2 існують елементи $c_i \in Ann^r_Rb_i\backslash P$. Тоді $c = c_1c_2 \ldots c_n$ і $c \in I\backslash P$. Отримана суперечність доводить імплікацію.

3) $\Rightarrow$ 4) Це наслідок твердження 2.

4) $\Rightarrow$ 1) Нехай $q \in Q_{Cl}(R)$. Тоді $Q_{Cl}(R)q = Q_{Cl}(R)b$ для деякого $b \in R$. Нехай $a \in Ann^l_R$ і $Ann^r_R(Ra + Rb) = 0$. З твердження 2 отримуємо, що $b - a$ не є дільником нуля. Тому $Q_{Cl}(R)b + Q_{Cl}(R)a = Q_{Cl}(R)$. Оскільки $Q_{Cl}(R)$ – редуковане, то $Q_{Cl}(R)b \cap Q_{Cl}(R)a = 0$. Звідси $Q_{Cl}(R) = Q_{Cl}(R)a + Q_{Cl}(R)b$. Отже, $Q_{Cl}(R)$ – регулярне. Твердження доведено.

Теорема 5. *Нехай R – редуковане дуо-кільце зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів – $\{P_1, \ldots, P_n\}$. Тоді:*

1) $Q_{Cl}(R) \cong R_{P_1} \oplus \cdots \oplus R_{P_n}$, де R_{P_i} – тіла дробів кілець R/P_i, $i = 1, \ldots, n$.

2) $Q_{Cl}(R)$ – абелеве регулярне кільце.

Доведення. Нехай $S = R - \cup_{i=1}^n P_i$. Тоді $\{(P_1)_S, \ldots, (P_n)_S\}$ – множина всіх мінімальних цілком простих ідеалів кільця R_S і $(R_S)_{(P_i)_S} \cong R_{P_i}, i = 1, \ldots, n$. Нехай $O_i = \{r \in R | ur = 0\}$ для деякого $u \in R - P_i$. З твердження 1 маємо $O_i = P_i$. Завдяки цьому $R/O_i = R_{P_i}, i = 1, \ldots, n, O_i + O_j = R, i \neq j$. Оскільки R – редуковане, то $\cap_{i=1}^n P_i = \cap_{i=1}^n O_i = 0$. Отже,

$$Q_{Cl}(R) = R_S \cong R/O_1 \oplus \cdots \oplus R/O_n = R_{P_1} \oplus \cdots \oplus R_{P_n}.$$

У даному розкладі R_{P_i} – тіла дробів для кілець R/P_i. Таким чином, $Q_{Cl}(R)$ – абелеве регулярне кільце. Теорему доведено.

Теорема 6. *Нехай R - редуковане дуо-кільце Безу, яке є правим кільцем Голді. Тоді довільний мінімальний цілком простий ідеал кільця R є головним і породжується ідемпотентом.*

Доведення. Завдяки обмеженням, накладенним на R, класичне кільце дробів $Q_{Cl}(R)$ є артіновим регулярним кільцем зі скінченним числом мінімальних цілком простих правих ідеалів. Нехай P – мінімальний цілком простий ідеал кільця R. Розглянемо ідеал $P_Q = \{p/s \mid p \in P\}$. Очевидно, що P_Q – цілком простий ідеал кільця $Q_{Cl}(R)$. Тому існує такий ідемпотент $e \in Q_{Cl}(R)$, що $P_Q = eQ_{Cl}(R)$. Оскільки R – дистрибутивне кільце, то $e \in R$ [12, л. 1.10]. Для довільного $p \in P$ отримуємо $p = er$, де r – регулярний елемент. Звідси $ep = eer = er = p$ і $P \subset eR$. Оскільки $e \in P$, то $eR \subset P$. Отже, $P = eR$. Теорему доведено.

Теорема 7. *Нехай R – дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів. Тоді $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, де кожне R_i є кільцем Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом.*

Доведення. Нехай $P_1, \dots, P_n$ – всі мінімальні цілком прості ідеали. Оскільки R – дистрибутивне кільце, то $P_i + P_j = R$, коли $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Оскільки $N(R) = \cap_{i=1}^{n} P_i$, то бачимо, що $R/N(R) = R/P_1 \oplus \cdots \oplus R/P_n$. Тому існують такі попарно ортогональні ідемпотенти $\bar{e}_i \in R/P_i$, що $\bar{e}_1 + \cdots + \bar{e}_n = \bar{1}$, де $\bar{1}$ – одиниця кільця $R/P(R)$. Піднявши ідемпотенти за модулем $N(R)$, переконуємось в існуванні попарно ортогональних ідемпотентів $e_1, \dots, e_n \in R$, для яких елемент $1 - (e_1 + \cdots + e_n)$ є ідемпотентом з $N(R)$. Це можливо лише у випадку, коли $e_1 + \cdots + e_n = 1$ [13]. Звідси випливає, що $R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$. Кільця e_iR (як гомоморфні образи кілець Безу) є кільцями Безу. Окрім цього, ці кільця є кільцями з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом. Теорему доведено.

Тепер сформулюємо два наслідки.

Наслідок 1. *Дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів є кільцем Ерміта.*

Наслідок 2. *Напівлокальне дуо-кільце Безу є кільцем Ерміта.*

Дані наслідки дають відповідь на питання, які поставлені Хенріксеном в [14, пит.3, с.162] для випадку дуо-кілець (у комутативному випадку це показано в роботі [8]).

Твердження 8. *Дуо-кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли $R/N(R)$ є кільцем елементарних дільників*

Доведення. Оскільки гомоморфний образ кільця елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, то необхідність очевидна. Достатньо лише розглянути випадок коли $R/N(R)$ – кільце елементарних дільників. У [5, тв.6] встановлено, що R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільних таких $a, b, c \in R$, таких, що $aR + bR + cR = R$, існують елементи $p, q \in R$, для яких $(ap + bq)R + cqR = R$. Оскільки $R/N(R)$ – кільце елементарних дільників, то щойно цитований результат дозволяє для елементів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/N(R)$ знайти такі елементи $\bar{p}, \bar{q}, \bar{u}, \bar{v} \in R/N(R)$, що $(\bar{a}\bar{p} + \bar{b}\bar{q})\bar{u} + \bar{c}\bar{q}\bar{v} = \bar{1}$ (де $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – гомоморфні образи елементів a, b, c при канонічному вкладенні R в $R/N(R)$). Таким чином, існують такі елементи $p, q, u, v \in R, n \in N(R)$, що $(ap + bq)u + cqv = 1 + n$. Оскільки $1 + n \in U(R)$, то $(ap + bq)R + cqR = R$, що і потрібно було довести.

Теорема 9. *Дуо-кільце Безу зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного цілком простого ідеалу P фактор-кільце R/P є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Оскільки гомоморфний образ кільця елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, то нам досить показати достатність. На підставі теореми 7 $R/N(R) = R/P_1 \oplus \cdots \oplus R/P_n$ є прямою сумою кілець елементарних дільників, а тому таким буде і кільце $R/N(R)$. Згідно з наслідком 1 R є кільцем Ерміта. Тоді на підставі твердження 5 R є кільцем елементарних дільників. Теорему доведено.

Перейдемо до розгляду дуо-кілець Безу R, кільця дробів $Q_{Cl}(R)$ яких містять лише скінченне число мінімальних цілком простих ідеалів. Прикладом можуть служити кільця, фактор-кільця яких за первинним радикалом є кільцями Голді.

Теорема 10. *Нехай R – дуо-кільце Безу, яке має класичне дуо-кільце дробів $Q_{Cl}(R)$ зі скінченним числом мінімальних цілком простих ідеалів. Тоді $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, де R_i – кільця Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом.*

Доведення. На підставі теореми 7 $Q_{Cl}(R) = e_1 Q_{Cl}(R) \oplus \dots \oplus e_n Q_{Cl}(R)$, де $e_1 Q_{Cl}(R), \dots, e_n Q_{Cl}(R)$ – кільця Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом. Нехай $S = e_1 R \oplus \dots \oplus e_n R$. Оскільки R – дистрибутивне кільце, то всі ідемпотенти кільця $Q_{Cl}(R)$ лежать в R. Звідси отримуємо, що $S = R$. Очевидно, що якщо P – мінімальний цілком простий ідеал в $e_i Q_{Cl}(R)$, то $P \cap R$ – мінімальний цілком простий ідеал в R, який міститься в $e_i R$. Отже, кільце $e_i R$ містить єдиний мінімальний цілком простий правий ідеал. Теорему доведено.

Як наслідки до теорем 9., 10. в комутативному випадку отримаємо:

Наслідок 3. *Кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли $R/P(R)$ є кільцем елементарних дільників.*

Наслідок 4. *Кільце Безу R для якого $R/P(R)$ – кільце Голді є кільцем Ерміта (де $P(R)$ – нільрадикал кільця R).*

Наслідок 5. *Кільце R, яке має класичне кільце дробів $Q_{Cl}(R)$ зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є кільцем Ерміта*

Розглянемо випадок адекватних справа кілець.

Твердження 11. *Довільний цілком простий ідеал адекватного справа в нулі дуо-кільця міститься в єдиному максимальному правому ідеалі.*

Доведення. Нехай P – цілком простий ідеал кільця R. Якщо P – максимальний, то все доведено. Нехай існують максимальні праві ідеали M_1, M_2 такі, що $P_1 \subset M_2 \cap M_2$. Оскільки $M_1 + M_2 = R$, то існують такі $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$, що $m_1 + m_2 = 1$. Оскільки R – адекватне справа, то для довільного $a \in P$ (зокрема, можливий випадок $a = 0$), $a = rs$, де $rR + m_1 R = R$ і для довільного незворотного лівого дільника s' елемента s ідеал $s'R + m_1 R$ – властивий. Оскільки P – цілком простий ідеал і $P \subset M_1$, то $s \in P$. Нехай $dR = sR + m_2 R$. Оскільки $P \subset M_2$, то d – незворотний лівий дільник елемента s. Але $dR + m_1 R \supset m_2 R + m_1 R = R$, що суперечить вибору елемента a. Отримана суперечність доводить твердження.

Твердження 12. *Дуо-кільце Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом є адекватним справа в нулі тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем нормування.*

Дане твердження є очевидним наслідком твердження 11.

Теорема 13. *Дуо-кільце Безу зі скінченим числом мінімальних цілком простих ідеалів є адекватним справа в нулі тоді і тільки тоді, коли воно є скінченною прямою сумою кілець нормування.*

Доведення. Нехай $P_1, \dots, P_n$ – всі мінімальні цілком прості ідеали кільця R. Тоді на підставі теореми 7 $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, де R_i – кільця Безу з єдиним мінімальним цілком простим ідеалом. Оскільки R – адекватне справа в нулі, то на підставі тверджень 12, 13 кільця R_i – кільця нормування.

Для доведення достатності слід показати, що якщо $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$, де R_i – кільця нормування, то R – адекватне справа в нулі кільце. Нехай $a = (a_i), b = (b_i) \in R$. Визначимо r_i і s_i в кожному R_i таким чином:

$$r_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } b_i \text{ не є одиницею в } R_i, \\ a_i, & \text{якщо } b_i \text{ – одиниця в } R_i, \end{cases}, \quad s_i = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } b_i \text{ не є одиницею в } R_i, \\ 1, & \text{якщо } b_i \text{ – одиниця в } R_i. \end{cases}$$

Тоді $a = r_1 s_1 \dots r_n s_n = r_1 \dots r_n \bar{s}_1 \dots \bar{s}_{n-1} s_n$. Покладемо $r = r_1 \dots r_n$, $s = \bar{s}_1 \dots \bar{s}_{n-1} s_n$. Тоді, очевидно, що $a = rs$ і $rR + bR = R$. Оскільки $s_i q = q \bar{s}_i$ з відповідним елементом q для кожного $i = 1, \dots, n-1$, то отримаємо, що $\bar{s}_i R_i \subset s_i R_i$. Нехай $s' = \bar{s}'_1 \dots \bar{s}'_{n-1} s'_n$ є незворотним лівим дільником s. Для кожного i таке $\bar{s}'_i$ у тому числі і s'_n не є одиницею R_i і ми маємо $\bar{s}'_i R_i + b_i R \neq R_i$. Звідси отримуємо, що $s'R + bR \neq R$. Це показує, що R – адекватне справа в нулі кільце.

1. Henriksen M., Jerison M. *The space of minimal prime ideals of a commutative ring*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – 115. – P. 110 – 130.
2. Matlis E. *The minimal prime spectrum of a reduced ring*// Illin. J. of Math. – 1983. – 27. – P. 353 – 391.
3. Hutson H.L. *On zero-dimensional rings of quotients and the geometry of minimal primes* // J. of Alg. – 1988. – 112. – P. 1 – 14.
4. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975.
5. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elemantary divisor rings* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 82. – P. 362 – 365.
6. Kaplansky J. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Maht. Soc. – 1949. – 66. – P. 464 – 491.
7. Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions*// Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49. – P. 225 – 236.
8. Larsen M., Lewis W., Shores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – 187. – P. 231 – 248.
9. Комарницкий Н.Я.*Коммутативные адекватные области Безу и кольца елементарных делителей*// Алгебраические исследования, Сборник статей, Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.- С. 97-113.
10 Забавський Б.В., Комарницький М.Я. *Про адекватні кільця*// Вісн. Львів. унів. - 1988. - 30. - С. 39-43.
11. Фейс К. Алгебра: кольца, модули, категории. – М.: Мир, 1977.
12. Туганбаев А.А. *Кольца с дистрибутивной структурой идеалов* Абелевы группы и модули. Изд. Томского унив. – В.5 – 1985 – С. 88 – 103.
13. Stenström, Bo.T. Rings of quotiens. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975.
14. Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings*// Michigan Math. J. – 1955/56. – 3. – P. 159 – 163.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997