УДК 512.552.12

НЕКОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ

Б.В. Забавський, О.М. Романів

Zabavsky B.V., Romaniv O.M. Noncommutative rings with elementary reduction of matrices. The ring with elementary reduction of matrices is, by definition, a ring over which every matrix admits a diagonal reduction via elementary transformations. It is proven that a right Euclidean Bezout domain is a ring with the elementary reduction of matrices.

В [1] сформульовано задачу про вивчення як комутативних, так і некомутативних кілець з елементарною редукцією матриць. У даній праці показано, що права евклідова область Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Позначимо через $\mathrm{M}_n(R)$ кільце квадратних матриць порядку n з елементами кільця R, а через $\mathrm{GL}_n(R)$ — групу зворотних матриць порядку n з елементами кільця R.

Наведемо необхідні означення.

Під *елементарною матрицею* з елементами кільця R розуміємо квадратну матрицю одного з трьох типів [2]:

1) діагональна матриця зі зворотними елементами на головній діагоналі;
2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

Кільце R без дільників нуля назвемо $\mathrm{GE}_n(R)$ *областю*, якщо довільна зворотна матриця над R породжується елементарними матрицями другого типу (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю).

Матриці A і B з елементами кільця R є *елементарно еквівалентними* (у позначеннях $A \overset{e}{\sim} B$), якщо існують такі елементарні над R матриці $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot \ldots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s = B.$$

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць*, якщо довільна матриця $A \in \mathrm{M}_n(R)$ *володіє елементарною редукцією*, тобто якщо A елементарно еквівалентна діагональній матриці

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де $\varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1}R$, $i = 1, 2, \dots, r-1$ (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі) [1]. Від *кільця елементарних дільників* [3] кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється тим, що

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

в його означенні матриці $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_s$ є не лише зворотними, а саме елементарними. Зрозуміло, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте не будь-яке кільце елементарних дільників є кільцем з елементарною редукцією матриць. Прикладом такого кільця є кільце $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2+1)$ [1, 4].

Наступні означення будуть сформульовані для правого одностороннього випадку, хоча зрозуміло, що всіх їх можна симетрично переформулювати і для лівого випадку.

Кільце R називається *правим кільцем Безу*, якщо будь-який скінченнопороджений правий ідеал є головним, тобто для будь-яких $a, b \in R$ існує таке $d \in R$, що $aR + bR = dR$.

Під *правим k-членним ланцюгом подільності* для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, розуміємо послідовність рівностей: $a = bq_1 + r_1$, $b = r_1q_2 + r_2$, $\dots$, $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$.

Нормою над областю R назвемо таку функцію $\mathcal{N}$: $R \to \mathbb{Z}$, що $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(a) > 0$ для $a \in R\backslash 0$.

Назвемо область R *правою ω-евклідовою областю* стосовно норми $\mathcal{N}$, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує такий правий k-членний ланцюг подільності, що $\mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b)$. Очевидно, що права 1-евклідова область є правою евклідовою областю.

Твердження 1. *R є правою ω-евклідовою областю тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий k-членний ланцюг подільності.*

Доведення. Необхідність. Нехай R — права ω-евклідова область. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує правий k-членний ланцюг подільності такий, що

$$\mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b).$$

Якщо $r_k = 0$, то необхідність доведено. В іншому випадку розглянемо пару (r_{k-1}, r_k). Для деякого цілого числа l існує правий l-членний ланцюг подільності для елементів r_{k-1}, r_k такий, що норма останнього залишку (позначимо її r_{k+l}) менша норми r_k. Об'єднавши ці два ланцюги в один, отримаємо правий $(k+l)$-членний ланцюг подільності для елементів a, b, причому виконується нерівність

$$\mathcal{N}(r_{k+l}) < \mathcal{N}(r_k) < \mathcal{N}(b).$$

Якщо $r_{k+l} = 0$, то доведення закінчено. У протилежному випадку, аналогічно, розглядаємо правий ланцюг подільності для елементів r_{k+l-1}, r_{k+l} і знаходимо правий залишок, норма якого буде менша, ніж норма r_{k+l}. Даний процес є скінченний. Отже, права ω-евклідовість є умовою існування скінченного правого ланцюга подільності для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$. Необхідність доведено.

Достатність очевидна.

Твердження 2. *Права ω-евклідова область є правою областю Безу.*

Доведення. Нехай R — права ω-евклідова область. На підставі твердження 1, для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий k-членний ланцюг подільності, тобто

$$a = bq_1 + r_1,\ b = r_1q_2 + r_2,\ \dots\dots\dots\dots\dots,\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,\ r_{n-1} = r_nq_{n+1}, \quad (1)$$

де $k = n+1$. З останньої рівності ланцюга (1) легко бачити, що $r_{n-1}R \subset r_nR$, з передостанньої — $r_{n-2}R \subset r_nR$ і т.д. У підсумку ми отримаємо, що

$$bR \subset r_nR, \quad aR \subset r_nR. \quad (2)$$

З іншого боку, підставивши в другу рівність ланцюга (1) вираз $r_1 = a - bq_1$ (який отримується з першої рівності цього ж ланцюга) і зробивши необхідні перетворення, ми виразимо r_2 через a і b. Аналогічно можна виразити r_3 і т.д. У кінцевому випадку для деяких $x, y \in R$ отримаємо

$$r_n = ax + by \tag{3}$$

Таким чином, із співвідношень (2) і (3) випливає, що $aR + bR = r_nR$, тобто довільний скінченнопороджений правий ідеал правої ω-евклідової області є головним. Отже, права ω-евклідова область є правою областю Безу, що й потрібно було довести.

Твердження 3. *Права ω-евклідова область є GE_n областю для довільного натурального n.*

Доведення. Припустимо, що R є правою ω-евклідовою областю. Щоб показати, що $R \in \mathrm{GE}_n$, достатньо довести, що довільна зворотна $n \times n$-матриця зводиться до одиничної елементарними перетвореннями. Нехай $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n\, R$. Тоді

$$a_{11}R + a_{12}R + \dots + a_{1n}R = R. \tag{4}$$

Оскільки область R є правою ω-евклідовою, то, згідно з твердженням 1, для елементів a_{11} і a_{12} існує скінченний правий ланцюг подільності. За допомогою елементарних перетворень стовпців замінимо a_{11} на останній, відмінний від нуля, правий залишок (позначимо його δ_1) в ланцюзі подільності для елементів a_{11}, a_{12}. Тоді перший рядок матриці A набуде вигляду

$$(\delta_1, 0, a_{13}, \dots, a_{1n}).$$

Тепер замінимо δ_1 на останній, відмінний від нуля, правий залишок у ланцюзі подільності для елементів δ_1, a_{13} і т.д. У кінцевому випадку, отримаємо, що матриця A за допомогою елементарних перетворень зведеться, враховуючи (4), до вигляду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями рядків, тобто домноженням зліва на відповідні елементарні матриці, матриця A' зведеться до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Над матрицею A'' здійснюємо аналогічні перетворення і т.д. Очевидно, що даний процес є скінченний. Отже, матриця A за допомогою елементарних перетворень зведеться до одиничної, що й потрібно було довести.

Зауваження 1. Поняття GE_2-області, розглянуте раніше, можна модифікувати. Спочатку покажемо, що GE_2 область породжується матрицями вигляду

$$F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

де $a \in R$ [4]. Справді,

$$F(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$F^{-1}(a) = F(0)F(-a)F(0) \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (F(0))^3 F(a), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = F(-a)(F(0))^3.$$

Нехай $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -r_1 \\ * & * \end{pmatrix},$$

де $r_1 = \alpha - \beta q_1$, тобто $\alpha = \beta q_1 + r_1$,

$$\begin{pmatrix} \beta & -r_1 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_2 \\ * & * \end{pmatrix},$$

де $r_2 = \beta - r_1 q_2$, тобто $\beta = r_1 q_2 + r_2$. Продовжуючи даний процес дальше, за скінченне число кроків матриця M зведеться до матриці вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, а з іншого боку, ми отримаємо скінченний правий ланцюг подільності для елементів α, β.

Таким чином, послідовності елементарних перетворень стовпців можна поставити у відповідність правий ланцюг подільності для початкових елементів α, β. Як наслідок, отримаємо, що матриця M зводиться до одиничної елементарними перетвореннями тоді і тільки тоді, коли існує скінченний правий ланцюг подільності для початкових елементів α, β. Нехай α, β такі елементи кільця R, що $\alpha R + \beta R = R$. Тоді:

— R є GE_2 областю, якщо будь-які елементи $\alpha, \beta \in R$, для яких $\alpha R + \beta R = R$, мають правий скінченний ланцюг подільності.

— R є правою ω-евклідовою областю, якщо довільні елементи $\alpha, \beta \in R$ мають скінченний правий ланцюг подільності.

Твердження 4. *Нехай R — кільце без дільників нуля. Тоді R є правою ω-евклідовою областю тоді і тільки тоді, коли R є GE_2-областю і правою областю Безу.*

Доведення. Необхідність є наслідком тверджень 2 і 3, тому досить довести достатність.

Нехай R є GE_2-областю і правою областю Безу. Припустимо, що $a, b \in R$, $b \neq 0$. Оскільки R — права область Безу, то $aR + bR = dR$. Звідси $a = da_0$, $b = db_0$ і $a_0R + b_0R = R$ для деяких $a_0, b_0 \in R$. Згідно із зауваженням 1, умова GE_2-області забезпечує наявність скінченного правого ланцюга подільності для a_0, b_0. Домноживши зліва рівності цього ланцюга на d, отримаємо скінченний правий ланцюг подільності для елементів a, b. Звідси, в силу твердження 1, отримуємо, що R є правою ω-евклідовою областю.

Твердження 5. *Нехай R — права ω-евклідова область. Тоді довільна зворотна матриця над R є скінченним добутком елементарних матриць.*

Для доведення достатньо зауважити, що, на підставі твердження 4, права ω-евклідова область є GE_2 областю.

Зауважимо , що під правою евклідовою областю Безу ми розуміємо кільце без дільників нуля, яке зліва є Безу, а справа евклідовим.

Теорема 1. *Права евклідова область Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. П. Кон у [5, теор.3.6] довів, що права головна область Безу є кільцем елементарних дільників. Звідси, як наслідок, отримуємо, що і права евклідова область Безу є кільцем елементарних дільників. Згідно з твердженням 5, довільна зворотна матриця над правою евклідовою областю є добутком елементарних матриць. Тому права евклідова область Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць, що і потрібно було довести.

1. Zabavsky B. *Ring with elementary reduction matrix*// Ring Theory Conf. (Miskols, Hungary). – 1996. – P.14.
2. Cooke G. *A weakening of the euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I.*// Journal fur die Reine und angewande Math. – 1976. – Vol. 282. – P.133 – 156.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 66. – P.464 – 491.
4. Bougaut B. *Anneaux Quasi-Euclidiens*// These de docteur troisieme cycle. – 1976. – Vol.67.
5. Cohn P.M. *Right principal Bezout domains*// J. London Math. Soc. – 1987. – Vol.35 ,N2. – P.251-262.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.1997